1784

De eclipsibus solaribus in superficie terrae per proiectionem repraesentandis. Auctore L. Eulero

Leonhard Euler

DE ECLIPSIBVS SOLARIBVS IN SVPERFICIE TERRAE PER PROIECTIONEM REPRAESENTANDIS.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Tab. VII. Fig. 1. Quo omnia, quae huc pertinent, dilucide explicemus atque ex primis principiis deriuemus, ſint A et B centra globorum Solis et Lunae, et recta per haec puncta traducta tranſeat in C per centrum Terrae. Tum vero ſint A a et B b radii Solis et Lunae, et ex Solis limbo ſuperiore a iuxta Lunae limbum inferiorem b producatur recta $a\,b\,c$; ſimilique modo iuxta Solis limbum inferiorem et Lunae ſuperiorem agatur par recta $a\,b\,c$, quae rectae ſe mutuo in axis puncto V interſecent, quod ſi circumquaque fieri intelligatur, orietur conus, verticem ſuum habens in V, baſin vero c C c per centrum Terrae transeuntem. Hunc conum eclipticum vocemus, quia vbique extra

extra eum ambo globi Solis et Lunae integri conſpiciuntur; intra vero Eclipſis Solis ſiue totalis ſiue partialis apparere debet. In confinio vero, hoc eſt in ſuperficie huius coni vbique Sol et Luna ſe inuicem tangere videbuntur.

§. 2. Ad hunc conum accurate determinandum vocetur radius globi ſolaris $A a = A$ et lunaris $B b = B$; porro vocentur diſtantiae centrorum A et B a centro Terrae $A C = a$ et $B C = b$. Praeterea vero ſit α ſemidiameter Solis ex C viſus, β autem ſemidiameter Lunae apparens, atque euidens eſt fore $\alpha = \frac{A}{a}$, ſimilique modo $\beta = \frac{B}{b}$, ſicque habebimus $A = a\alpha$ et $B = b\beta$. Tum vero ad verticem coni ecliptici V inueniendum ponamus $A V = x$ et $B V = y$, atque ſemiangulum coni verticalem $C V c = \omega$.

§. 3. Cum iam ſit interuallum $A B = a - b$, erit $x + y = a - b$; tum vero erit $A a : x = B b : y$, vnde ſit $\frac{A}{x} = \frac{B}{y}$, ideoque $\frac{a\alpha}{x} = \frac{b\beta}{y}$, qua aequatione cum illa $x + y = a - b$ coniuncta colligitur:

$$x = \frac{a\alpha(a-b)}{a\alpha + b\beta} \text{ et } y = \frac{b\beta(a-b)}{a\alpha + b\beta},$$

vnde porro fit

$$\sin.\omega = \frac{a\alpha}{x} = \frac{b\beta}{y} = \frac{a\alpha + b\beta}{a - b}, \text{ ſiue } \omega = \frac{a\alpha + b\beta}{a - b}.$$

Quia enim de Eclipſibus ſermo eſt, ſemper angulum ω cum ſuo ſinu confundere licet. Deinde vero cum ſit $C V = b + y = \frac{ab(\alpha + \beta)}{a\alpha + b\beta}$, per angulum ω multiplicando reperiemus radium baſeos $C c = \frac{ab(\alpha + \beta)}{a - b}$.

§. 4. Nunc, vti manifestum est, Spectatori in C posito ambo centra A et B congruere, at vero Spectatori in circumferentia baseos constituto ambo disci solaris et lunaris se tangere videbuntur, siue distantia centrorum apparens erit summa semidiametrorum apparentium $\alpha + \beta$, dum in ipso centro baseos haec distantia erat nulla; atque hinc pro quouis loco medio m distantia centrorum Solis et Lunae apparebit sub angulo $(\alpha + \beta)\frac{Cm}{Cc}$.

Tab. VII. Fig. 2. §. 5. Hactenus assumsimus tria puncta A B C in directum cadere; nunc autem consideremus casus, quibus recta A B producta extra C transit. Manentibus igitur A, B, C centris Solis, Lunae et Terrae, ac distantiis $CA = a$, $CB = b$, ponatur angulus $ACB = \gamma$, qui cum in Eclipsibus semper sit valde paruus, euidens est intervallum AB sensibiliter ab $a - b$ differre non posse; tum vero in rectam A B productam ex C demittatur perpendiculum C P atque mox patebit, distantiam B P a distantia $CB = b$ sensibiliter discrepare non posse. Quia enim distantia C A quasi est infinita, angulus C B P ab angulo $ACB = \gamma$ quam minime differet; vnde semidiameter baseos coni ecliptici erit $Pp = \frac{ab(\alpha + \beta)}{a - b}$.

§. 6. Habita autem distantiae Solis ratione ex A in C B productam demittatur perpendiculum A S, eritque

$$AS = a \text{ sin. } \gamma \text{ et } CS = a \text{ cos. } \gamma, \text{ vnde fit}$$
$$BS = a \text{ cos. } \gamma - b.$$

Ex his autem colligitur tangens anguli ABS = tangenti anguli $CBP = \frac{a \text{ sin. } \gamma}{a \text{ cos. } \gamma - b}$, quae tangens etiam hoc modo

expri-

exprimi potest: tang. C B P = tang. $\gamma\left(1+\frac{b}{a\,\mathrm{cos}.\,\gamma}\right)$, qui ergo angulus, ob γ angulum valde paruum et $\frac{b}{a}$ fractionem minimam circiter $\frac{1}{400}$, ipsi γ proxime aequalis censeri poterit. Ad vsum autem sequentem vocemus semidiametrum basis coni ecliptici $Pp = p$, ita vt sit $p = \frac{ab(\alpha+\beta)}{a-b}$; tum vero erit C P = b sin. C B P.

§. 7. Referamus nunc haec ad superficiem Terrae, centro C, radio $Ca = Cd$ descriptam, quam rectae A C et B C traiiciant in punctis a et b, eritque angulus $aCb = \gamma$; tum vero sit recta B P axis coni ecliptici, ita vt sit C P = b sin. γ, siue accuratius Tab. VII. Fig. 3.

$$CP = b\,\mathrm{tang}.\,\gamma\left(1+\frac{b}{a\,\mathrm{cos}.\,\gamma}\right);$$

tum vero radius coni erit

$$Pp = p = \frac{ab(\alpha+\beta)}{a-b}.$$

§. 8. Omnia nunc elementa, quae in hac figura occurrunt, accuratius perpendamus, atque ad institutum nostrum propius accommodemus. Ac primo quidem Terrae figuram tanquam perfecte sphaericam assumamus, ne calculum in ipso limine nimium difficultatibus obruamus; perfectis enim omnibus calculis pro hac hypothesi, haud adeo difficile erit, etiam ad veram Terrae figuram respicere, siquidem correctiones hinc oriundae quam minimae sint futurae. Hinc igitur omnes Terrae radios inter se aequales vnitate designemus; vnde si Parallaxin Solis horizontalem ponamus $= \sigma$, quam nouimus esse circiter $8{,}5''$, Lunae vero Parallaxin horizontalem $= \pi$, quia posuimus distantiam Solis a Terra $= a$, Lunae vero $= b$ erit $a = \frac{1}{\sigma}$ et $b = \frac{1}{\pi}$.

§. 9.

§. 9. Deinde punctum a in figura designat locum in Terra, cui Sol verticaliter imminet, siue in cuius zenith centrum Solis existit; simili modo punctum b id est punctum in Terra, in cuius zenith centrum Lunae conspicitur. Haec ergo duo puncta ex tabulis Solis et Lunae, ad quoduis tempus, durante Eclipsi, computari oportet, id quod non difficulter fieri poterit, si primo ad verum tempus coniunctionis, tum vero ad quaedam momenta praecipua, tam ante quam post coniunctionem, haec duo loca sollicite determinentur. Inde igitur ad quoduis tempus durante Eclipsi angulus $aCb = \gamma$ innotescet, qui, vt deinceps videbimus, vltra 95 minuta prima increscere atque adeo summam amborum semidiametrorum apparentium Solis et Lunae, qui, ex centro Terrae visi, positi sunt α et β, haud mediocriter superare potest.

§. 10. Praeterea vero imprimis consideranda est positio axis coni ecliptici ABP (fig. 2.) in quem ex centro Terrae C perpendiculum CP demisimus, et qui radio Ca tanquam perfecte parallelus spectari potest. Quia enim radius Ca productus cum isto axe conuenit in centro Solis, eius directio non vltra Parallaxin Solis a directione Ca declinare poterit, si quidem interuallum CP radium Terrae non multum superare potest, quoniam aliter conus eclipticus non in Terram incideret. Ob paruitatem ergo Parallaxis Solis istum axem radio Ca parallelum spectare poterimus, vnde sequitur, punctum d, vbi recta CP superficiem Terrae traiicit, 90° a puncto a distare, quandoquidem angulus aCd, pro recto haberi potest, ita vt in hoc puncto d Hemisphaerium Terrae diurnum

urnum a nocturno separetur atque idcirco infra hoc punctum $\bar{\alpha}$ nulla Eclipsis existere possit.

§. 11. Attendamus nunc etiam ad verticem coni ecliptici, qui in prima figura est in puncto V, a quo puncti P distantia aequalis est distantiae C P; ibi autem erat distantia $VC = \frac{ab(\alpha+\beta)}{\alpha a + b\beta}$, in qua formula si loco a et b scribamus $\frac{1}{\sigma}$ et $\frac{1}{\pi}$, erit distantia puncti P a vertice coni $V = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\pi+\beta\sigma}$, ideoque, neglecta Solis Parallaxi σ, erit altitudo coni $PV = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\pi}$. Deinde vero semiangulum verticalem huius coni, quem in prima figura posuimus $= \omega$, inuenimus sin. $\omega = \frac{a\alpha + b\beta}{a - b}$, cui ipse angulus ω aequalis censeri potest, sicque erit $\omega = \frac{\alpha\pi+\beta\sigma}{\pi-\sigma}$, ideoque proxime $\omega = \pi$, qui angulus ductus in VP dabit semidiametrum basis coni ad punctum P, qui ergo erit

$$\frac{\alpha+\beta}{\pi-\sigma} = Pp.$$

§. 12. Haec ergo erit amplitudo coni ecliptici ad axis punctum P, quae autem sursum ascendendo continuo imminuitur, vnde in puncto quouis Q, posito interuallo $PQ = q$, semidiameter amplitudinis coni in Q se habebit ad Pp vt VQ ad VP. Quia ergo erat $VP = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\pi+\beta\sigma}$, erit $VQ = VP - PQ = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\pi+\beta\sigma} - q$, quod per angulum ω multiplicatum dabit semiamplitudinem in puncto q, quae erit $Qq = \frac{\alpha+\beta}{\pi-\sigma} - \frac{q(\alpha\pi+\beta\sigma)}{\pi-\sigma}$, quae diminutio, quia punctum Q vix vltra distantiam radii assumi potest, erit valde exigua. Sumto enim $q = 1$, erit

$$Qq = \frac{\alpha+\beta}{\pi-\sigma} - \frac{\alpha\pi-\beta\sigma}{\pi-\sigma},$$

vbi diminutio, neglecto σ, valebit α, ideoque circiter parti radii ducentesimae aequari potest.

§. 13. Eclipsis igitur saltem in puncto P contingere potest tam diu, donec interuallum C p (sumto scilicet puncto p ipsi C propiore) radium Terrae $= 1$ superet. Cum igitur sit $CP = \frac{\gamma}{\pi}$, proxime, et $Pp = \frac{\alpha + \beta}{\pi}$, limes eclipticus erit, vbi fit $\frac{\gamma}{\pi} - \frac{\alpha + \beta}{\pi} = 1$, in quo ergo contingere incipiet Eclipsis horizontalis pro puncto Terrae d. Ex hac autem aequatione limes anguli γ, seu eius maximus valor, quo adhuc Eclipsis euenire potest, definitur, ita vt sit $\gamma = \pi + \alpha + \beta$; quamobrem, cum maxima Lunae Parallaxis horizontalis $\pi = 61', 45''$, maximus autem semidiameter Solis horizontalis $16', 19''$, Lunae vero $16', 47''$, erit maximus angulus $\gamma = 94', 51''$. Tum autem prodibit interuallum $CP = \frac{\gamma}{\pi} = \frac{95}{62}$, sicque ipso radio Terrae maius euadere potest, excessu existente $\frac{33}{62}$, qui ergo semissem radii Terrae aliquantum superat.

§. 14. Hinc igitur patet, in iis tantum coniunctionibus Solis et Lunae Eclipses contingere posse, quando distantia geocentrica centrorum Solis et Lunae, siue angulus $ACB = \gamma$ infra limitem $\alpha + \beta + \pi$ diminuitur, et Eclipsin tam diu durare, quamdiu angulus γ infra hunc limitem substiterit; initium autem et finem Eclipseos euenire, vbi fuerit $\gamma = \alpha + \beta + \pi$, atque adeo tam initium quam finem semper in ea Terrae loca incidere, vbi Sol in Horizonte conspicitur. Quamobrem si Eclipsin supra Horizontem incipere videmus, certi esse possumus, eandem Eclipsin iam ante in alio Terrae loco incepisse,

vbi

vbi scilicet Sol in Horizonte apparuerit, quod idem de fine Eclipseos est tenendum, ita vt primum initium semper in ortum Solis, finis autem postremus in occasum incidat. Quod ad momenta intermedia attinet, Phaenomena Eclipseos in sequenti Problemate accuratius euoluamus.

Problema.

Quando circa coniunctionem Luminarium angulus A C B $=\gamma$ *minor deprehenditur quam* $\alpha+\beta+\pi$, *vbi* α *et* β *denotant semidiametros Solis et Lunae ex centro Terrae visos,* π *autem Parallaxin Lunae horizontalem, inuestigare, per quantum Terrae spatium Eclipsis extendatur et quanta futura sit in singulis huius spatii punctis.*

Solutio.

§. 15. Cum igitur angulus A C B $=\gamma$ minor sit quam $\alpha+\beta+\pi$, ponatur $\gamma=\alpha+\beta+\pi-\delta$, vnde si P V fuerit axis coni ecliptici, qui radio C a parallelus censeri potest, erit interuallum C P $=\frac{\sin.\gamma}{\pi}$, siue ob γ angulum quam minimum erit C P $=\frac{\alpha+\beta+\pi-\delta}{\pi}$, ideoque interuallum d P $=\frac{\alpha+\gamma-\delta}{\pi}$, quod si esset $\frac{\alpha+\beta}{\pi}$, vti in ipso Eclipseos initio euenit, ex loco Terrae d distantia centrorum Solis et Lunae foret $=\alpha+\beta$. Nunc igitur tanto minor apparebit, quanto hoc spatium d P minus est quam $\frac{\alpha+\beta}{\pi}$: erit ergo distantia centrorum apparens $=\alpha+\beta-\delta$, quod adeo contingit in loco d, vbi Sol in Horizonte conspicitur. Videamus iam, qualis Eclipsis apparitura sit in quouis alio Terrae loco z, ex quo ad pla- Tab IV. Fig. 4.

 num

num a C P, in quo existunt centra Solis et Lunae cum centro Terrae, ducamus normalem zy, hincque etiam normalem yx ad radium C a, quae producta axem coni ecliptici secet in t, ac vocemus istas coordinatas

$$Cx = x = pt;\ xy = y \text{ et } yz = z,$$

eritque, ob radium Terrae $= 1$, $xx + yy + zz = 1$. His positis erit interuallum $zt = \sqrt{zz + (p-y)^2}$, posito scilicet breuitatis gratia $CP = p$, ita vt sit $p = \frac{\alpha + \beta + \pi - \delta}{\pi}$, quae distantia, scil. zt, nisi minor fuerit quam radius coni ecliptici in puncto t, Eclipsis in loco z nulla obseruabitur; sin autem minor fuerit, etiam distantia centrorum Solis et Lunae, ex z visa, tanto minor apparebit. Praeterea vero hoc tempore Sol a Zenith huius loci, siue a recta C z producta, distare videbitur angulo a C z, cuius sinus erit $xz = \sqrt{(yy + zz)}$, cosinus vero $Cx = x$, cuius ergo anguli complementum, siue angulus cuius sinus est x, monstrabit altitudinem Solis super Horizonte.

§. 16. Supra autem vidimus, si in axe coni capiatur spatium $PQ = q$, ibi fore radium coni

$$\frac{\alpha + \beta}{\pi - \sigma} - \frac{(\alpha\pi + \beta\sigma)}{\pi - \sigma} q.$$

Negligendo igitur Parallaxin Solis σ, vtpote quam minimam, erit iste radius $\frac{\alpha + \beta}{\pi} - \alpha q$; vnde patet, in puncto t, vbi $Pt = x$, fore radium coni $= \frac{\alpha + \beta}{\pi} - \alpha x$, vbi quantitas αx iterum est tam exigua, vt in vsu practico negligi queat; interim tamen nihil impedit, quominus in calculo retineatur. Quamobrem si huic radio aequale statuamus interuallum tz, tum z erit punctum, vbi distantia centrorum Solis et Lunae obseruabitur summae semidiametrorum

rum $\alpha + \beta$ aequalis, vnde omnia haec puncta z monstrabunt in superficie Terrae limites spatii, in quo Eclipsis cernetur.

§. 17. Hinc igitur manifestum est, lineam curvam, in superficie Terrae per omnia haec puncta z transeuntem, includere spatium eclipticum, extra quod nulla prorsus dabitur Eclipsis. Aequatio igitur pro hac curua erit $\frac{\alpha+\beta}{\pi} - \alpha x = \surd(zz + (p-y))^2$. Hinc ergo, cum sit $zz = 1 - xx - yy$, hoc valore substituto habebimus aequationem inter x et y, qua proiectio istius curuae in planum Cad facta exprimitur, quae ergo erit

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{\pi} - \alpha x\right)^2 = 1 + pp - xx - 2py,$$

haecque aequatio semper est ad Parabolam, solo casu excepto quo $p = 0$, siue axis coni in ipsum radium Ca incidit; tum enim ista aequatio erit

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{\pi} - \alpha x\right)^2 = 1 - xx,$$

vnde x fit quantitas constans.

§. 18. Quod si iam loco radii coni integri eius quamlibet partem $\frac{m}{n}$ substituamus, curua nostra per omnia transibit puncta, vnde centrorum distantia $= \frac{m}{n}(\alpha + \beta)$ conspicitur, ideoque pro his locis aequatio erit

$$\frac{mm}{nn}\left(\frac{\alpha+\beta}{\pi} - \alpha x\right)^2 = 1 + pp - xx - 2py.$$

Ex quo sequitur, sumto $m = 0$, ea loca reperiri, vbi Eclipsis est centralis, seu distantia centrorum apparens nulla, quod ergo eueniet, vbi fuerit

$$1 - xx + pp - 2py = 0.$$

 Et

Et quoniam haec puncta in superficiem sphaericam cadere debent, necesse est vt coordinatae x et y sint radio 1 minores. Hinc igitur omnia Eclipseos Phaenomena in superficie Terrae assignare licebit.

§. 19. Cum neglecto termino αx, vtpote nullius momenti, et posito $\frac{\alpha + \beta}{\pi} = c$, aequatio pro Parabola inuenta sit

$$cc = 1 - xx + pp - 2py, \text{ erit}$$
$$x = \pm \sqrt{(1 + pp - cc - 2py)},$$

patet, ipsam rectam horizontalem C d esse axem huius Parabolae, eiusque verticem ibi fore, vbi $x = 0$, quod ergo euenit vbi $y = \frac{1 + pp - cc}{2p}$. In hac ergo a centro C
Tab. VII. Fig. 5. distantia reperietur Parabolae vertex, qui sit in puncto F, secetque haec Parabola circulum in puncto H, vnde ad basin demittatur perpendiculum HG, ad quem locum H inueniendum erit CG $= y$ et HG $= x$, ideoque

$$xx + yy = 1.$$

Quare cum hinc sit $xx = 1 - yy$, aequatio Parabolae erit $cc = (y - p)^2$, vnde sequitur $y = p \pm c$. Cognitis autem duobus punctis F et H, Parabola facile describitur, quam quaerimus. Tum autem spatium mixtilineum dFH erit proiectio spatii ecliptici in superficie Terrae, intra quod Eclipsis obseruatur.

§. 20. Quando Parabolae vertex F intra Cd cadit, vt figura habet, vnica dabitur Parabolae cum circulo intersectio H, sicque spatium dHF in ipso Horizonte terminatur. Quando autem punctum F extra d cadit, vti in in figura 6^a, quod euenit si fuerit

Tab. VII. Fig. 6.

$$\frac{1 + pp - cc}{2p} > 1, \text{ siue } p - 1 > c,$$

necessario duae dabuntur intersectiones H et h, pro quarum altera erit

$$CG = p + c \text{ et } Cg = c - p,$$

et nunc Spatium Terrae, respondens spatio H h, intra circulum et Parabolam contentum, erit proiectio spatii ecliptici in superficie Terrae, quod Eclipsin patitur et quod propterea his casibus erit penitus determinatum, neque ad horizontem vsque porrigitur. Fieri autem potest vt Parabolae vertex F in infinitum elongetur, quod euenit vbi fit $p = 0$, sicque pro intersectionibus H et h erit $CG = Cg = c$, atque arcus Parabolae H h erit linea recta.

§. 21. Contra autem vertex Parabolae non vltra certum limitem centrum C appropinguare potest. Cum enim fit $CF = \frac{1 + pp - cc}{2p}$, eius valor minimus reperitur, vbi fit $pp = 1 - cc$, ideoque $p = \sqrt{(1 - cc)}$; tum autem erit ista distantia minima $CF = \sqrt{(1 - cc)}$, vnde cum propemodum fit $c = \frac{1}{2}$, ista minima distantia erit circiter $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Neque vnquam ista distantia CF minor euadere potest. Tum autem erit interuallum

$$CG = c \pm \sqrt{(1 - cc)},$$

vbi signum superius valere nequit, ita vt sit hoc casu

$$CG = c - \sqrt{(1 - cc)},$$

quod ergo, casu $c = \frac{1}{2}$, erit $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$, consequentur negatiuum, scilicet punctum G vltra centrum C cadit.

Alia

Alia Solutio Problematis.

§. 22. Poſtquam ad quoduis tempus, durante Eclipſi, ex Tabulis Aſtronomicis deſumti fuerint ſemidiametri horizontales Solis ac Lunae, qui ſint α et β, vna cum Parallaxi Lunae horizontali $= \pi$, (Solis enim Parallaxin tuto negligere licet) ſimulque angulus $a\,C\,b$, quo centra Solis et Lunae a ſe inuicem diſtare ſpectatori, in centro Terrae poſito, videbuntur, fuerit inuentus, qui ſit $= \gamma$, ex eo ſtatim innoteſcet punctum P in Horizonte, cui axis coni ecliptici perpendiculariter inſiſtit. Erit enim diſtantia $C\,P = p = \frac{\text{ſin.}\,\gamma}{\pi} = \frac{\gamma}{\pi}$, ob angulum γ ſatis exiguum, quia Eclipſis locum habere nequit, niſi hic angulus minor fuerit quam $\alpha + \beta + \pi$, vbi imprimis notandum eſt, iſtud punctum P ſemper in id planum incidere, quod per centra Solis, Lunae et Terrae tranſit.

§. 23. Quanquam autem iſte conus eclipticus verticem habet in V, puncto ſcilicet vltra Lunam ſito: tamen ille, ob iſtam diſtantiam maximam, circa regionem Terrae tuto pro cylindro haberi poteſt, cuius ergo radius erit $\frac{\alpha + \beta}{\pi} = c$; atque nunc manifeſtum eſt, baſin huius cylindri quae eſt circulus, centro P radio c in plano Horizontis deſcriptus, ſimul eſſe proiectionem ſpatii ecliptici in planum horizontis factam, vnde ex iſta proiectione omnia Eclipſis Phaenomena multo facilius deriuari poterunt, quam ex illa proiectione parabolica, in planum verticale facta, qua ante vſi ſumus.

§. 24.

§. 24. Repraesentet igitur circulus maior centro C descriptus sectionem Terrae horizontalem per centrum C factam, qua ergo Hemisphaerium diurnum a nocturno separatur, et consideremus primo casum, quo axis coni ecliptici extra hunc circulum in P incidit, cui ergo perpendiculariter insistere est censendus. Tum ex centro P radio $Pe = c$ describatur circulus minor, maiorem secans in puncto f et f, atque segmentum arcubus fdf et fef interceptum erit proiectio spatii ecliptici terrestris in planum horizontale facta. Illud scilicet spatium eclipticum perpendiculariter imminebit isti segmento. Tab. VII. Fig. 7.

§. 25. Consideremus nunc etiam casum quo totus circulus minor intra maiorem cadit, cui ergo in superficie Terrae totum spatium, intra quod Eclipsis datur, perpendiculariter imminet, atque huius spatii perimeter per omnia ea Terrae loca transit, vbi Eclipsis vel incipit vel desinit, hoc est, vbi distantia centrorum Solis et Lunae summae semidiametrorum apparentium aequalis obseruatur, siue ambo disci se inuicem tangere videbuntur.

§. 26. Hinc igitur facile intelligitur, quomodo etiam ea loca in superficie Terrae definiri queant, vbi Eclipsis sub data quantitate conspicitur. Solent autem Astronomi quantitatem Eclipsium per digitos metiri, vbi duodecim digiti respondent casui, quo distantia centrorum Solis et Lunae penitus euanescit; tum vero, vbi distantia centrorum deprehenditur $\frac{11}{12}(\alpha + \beta)$, quantitas Eclipsis vnius digiti censetur; vbi distantia est $\frac{10}{12}(\alpha + \beta)$, dicitur

esse

esse Eclipsis 2 digitorum et ita porro, veluti haec tabula ostendit:

Distantia.	Quant.	Distantia.	Quant.
$\frac{12}{12}(\alpha+\beta)$	0 dig.	$\frac{6}{12}(\alpha+\beta)$	6 dig.
$\frac{11}{12}(\alpha+\beta)$	1 —	$\frac{5}{12}(\alpha+\beta)$	7 —
$\frac{10}{12}(\alpha+\beta)$	2 —	$\frac{4}{12}(\alpha+\beta)$	8 —
$\frac{9}{12}(\alpha+\beta)$	3 —	$\frac{3}{12}(\alpha+\beta)$	9 —
$\frac{8}{12}(\alpha+\beta)$	4 —	$\frac{2}{12}(\alpha+\beta)$	10 —
$\frac{7}{12}(\alpha+\beta)$	5 —	$\frac{1}{12}(\alpha+\beta)$	11 —
		$\frac{0}{12}(\alpha+\beta)$	12 —

§. 27. Vt nunc isti diuersi gradus Eclipsium etiam in nostra figura repraesententur, nihil aliud opus est, nisi vt radius P e in duodecim partes aequales diuidatur, et centro P per singula diuisionum puncta circuli concentrici describantur. Nam vti extremus circulus respondet locis, vbi Eclipsis adhuc est nulla, ita hinc introrsum pergendo secundus circulus dabit loca, vbi Eclipsis est vnius digiti; tertius, vbi Eclipsis est duorum dig. et ita porro, vsque ad ipsum centrum P, quod respondet loco, vbi distantia centrorum Solis et Lunae est nulla; talis enim locus est vnicum punctum in superficie Terrae, per quod nimirum axis coni ecliptici transit.

§. 28. His expositis probe notandum est, dum ista inuestigatio successiue ad alios atque alios angulos γ applicatur, ob motum Coeli diurnum punctum a in superficie Terrae continuo locum suum mutare, vnde etiam pla-

planum horizontale ipfi refpondens continuo immutabitur. Quamobrem, fi haec Phaenomena per totam Eclipfeos moram in fuperficie Globi terreftris defignare velimus, pro pluribus diuerfis momentis tales figurae defcribi debebunt, ex quibus inter fe collatis facile pro quouis Terrae loco iudicare licebit, num Eclipfis eo pertingat, fimulque, ad quantam magnitudinem increfcere queat, atque infuper omnia momenta Phaenomenorum innotefcent.