1783

De inventione longitudinis locorum ex observata lunae distantia a quadam stella fixa cognita. Auctore L. Eulero

Leonhard Euler

DE INVENTIONE LONGITVDINIS LOCORVM EX OBSERVATA LVNAE DISTANTIA A QVADAM STELLA FIXA COGNITA.

Auctore

L. EVLERO.

Problema Fundamentale.

Si alicubi obseruata fuerit distantia Lunae a quapiam stella fixa, vna cum altitudine tam Lunae quam stellae fixae, inuenire eius distantiam veram geocentricam, quae scilicet esset appritura spectatori in centro Terrae positi.

Solutio.

§. 1. Referat circulus H A B O horizontem, cuius Zenith sit in Z, Luna autem tempore obseruationis appareat in circuli verticalis Z L A puncto L, cuius altitudo super horizonte sit arcus A L $= a$, quae scilicet sit altitu- Tab. VI. Fig. 1.

do centri Lunae obſeruata; eius igitur diſtantia a Zenith erit arcus $LZ = 90^\circ - a$. Eodem vero tempore ſtella fixa verſetur in circuli verticalis ZSB puncto S, cuius altitudo obſeruata ſit $BS = b$, ideoque eius diſtantia a Zenith $ZS = 90^\circ - b$. Tertio vero obſeruata ſit diſtantia ſtellae S a centro Lunae L, ſiue arcus circuli magni LS, qui ſit $LS = d$, ita vt litterae a, b et d ſint quantitates per obſeruationes datae, vnde quaeri oportet diſtantiam, ſub qua ſtella a centro Lunae remota conſpiceretur ſpectatori in centro Terrae ſito.

§. 2. Primo igitur ob refractionem altitudines Lunae et ſtellae corrigi debebunt, qua ſit vt ſidera nobis altiora appareant, quam ſi ex centro terrae ſpectarentur. Ex tabula igitur refractionum ſumantur refractiones tam altitudini a quam b reſpondentes, quae ſint α et β, ſicque ob refractionem altitudo Lunae ex centro terrae ſpectata erit $a - \alpha$; altitudo vero ſtellae $= b - \beta$, praeterea vero Luna ob parallaxin ex centro Terrae in maiori altitudine cerneretur, vnde altitudo ante correcta quapiam quantitate augeri debebit, quod incrementum pendet a parallaxi Lunae horizontali, quae illo tempore ſit $= \pi$, atque in Ephemeridibus ad quoduis tempus aſſignari ſolet, quae quia ſecundum coſinus altitudinis Lunae decreſcit, in puncto L erit effectus parallaxeos $= \pi \operatorname{coſ.} a$. Hoc ergo modo vera altitudo centri Lunae erit $= a - \alpha + \pi \operatorname{coſ.} a$ et quia effectus parallaxeos ſemper maior eſt quam refractio, ſi ſtatuatur $\pi \operatorname{coſ.} a - \alpha = \varepsilon$, vera altitudo centri Lunae erit $= a + \varepsilon$; ſtella vero ob immenſam diſtantiam nullam patitur parallaxin.

§. 3.

§. 3. His iam correctionibus adhibitis fit l verus Lunae locus, s autem verus stellae locus, ita vt problema nostrum iubeat determinare arcum circuli maximi per puncta l et s ducti, quippe qui dabit veram distantiam stellae a centro Lunae ex centro terrae spectandam, quae ponatur $ls = z$, quam ergo quomodo ex elementis cognitis, a, b, d et β et ε determinari oporteat, ex principiis Trigonometriae sphaericae erit ostendendum.

§. 4. Primo autem ex triangulo sphaerico LZS quaeratur angulus LZS, qui si vocetur $= u$, erit

$$\text{cos.}\, u = \frac{\text{cos.}\, d - \text{sin.}\, a\, \text{sin.}\, b}{\text{cos.}\, a\, \text{cos.}\, b}.$$

Iam quia hic angulus inuariatus manet pro locis veris l et s, in triangulo sphaerico Zls praeter angulum u habentur latera

$$ZL = 90° - a - \varepsilon \text{ et } Zs = 90° - b + \beta$$

vnde colligitur

$$\text{cos.}\, z = \text{cos.}\, u\, \text{cos.}\,(a + \varepsilon)\, \text{cos.}\,(b - \beta)$$
$$+ \text{sin.}\,(a + \varepsilon)\, \text{sin.}\,(b - \beta)$$

hinc quia cos. u iam inuenimus, erit

$$\text{cos.}\, z = \frac{\text{cos.}\,(a+\varepsilon)\, \text{cos.}\,(b-\beta)\,(\text{cos.}\, d - \text{sin.}\, a\, \text{sin.}\, b)}{\text{cos.}\, a\, \text{cos.}\, b} + \text{sin.}\,(a+\varepsilon)\, \text{sin.}\,(b-\beta).$$

Quoniam vero valorem ipsius cos. u iam inuenimus, expediet forma priori vti, qua erat

$$\text{cos.}\, ls = \text{cos.}\, z = \text{cos.}\, u\, \text{cos.}\,(a + \varepsilon)\, \text{cos.}\,(b - \beta)$$
$$+ \text{sin.}\,(a + \varepsilon)\, \text{sin.}\,(b - \beta).$$

Exem-

Exemplum.

§. 5. Obſeruata ſit alicubi locorum diſtantia Lunae a quapiam ſtella fixa, ſeu arcus $LS = d = 38°, 45'$. Eodem autem tempore inuenta ſit altitudo Lunae $AL = a = 25°, 36'$, altitudo vero ſtellae $BS = b = 17°, 24'$, vnde determinari debeat vera diſtantia ex centro terrae viſa $ls = z$. Praeterea vero ex ephemeridibus conſtet Lunae parallaxis horizontalis $\pi = 59', 30''$.

Primo igitur ex tabula refractionum pro altitudine Lunae a reperitur refractio $\alpha = 2', 3''$, pro altitudine vero ſtellae b erit $\beta = 3', 4''$, tum vero ob $\pi = 59', 30'' = 3570''$ erit π coſ. $a = 3224 = 53', 44''$, hincque fit $\epsilon = 51', 41''$, conſequenter habebimus

$$a + \epsilon = 26°, 27', 41' \text{ et } b - \beta = 17°, 20', 56''.$$

§. 5. Nunc calculum pro inuentione anguli u apponamus:

$l$coſ. $d = 9,8920303$	lſin. $a = 9,6355699$	$l$coſ. $a = 9,9551259$
lDen. $= 9,9347837$	lſin. $b = 9,4757304$	$l$coſ. $b = 9,9796578$
$9,9572466$	ſumm. $= 9,1113003$	ſumm. $= 9,9347837$
	lDen. $= 9,9347837$	
	$9,1765166$	

I°. 0, 906247
II°. 0, 150147

coſ. $u = 0,756100$ et $l$coſ. $u = 9,8785792$.

§. 6.

§. 6. Inuento $\cos u$ reliquus calculus ita adornetur:

$l\cos u = 9,8785792$	$l\sin(a+\varepsilon) = 9,6489398$
$l\cos(a+\varepsilon) = 9,9519370$	$l\sin(b-\beta) = 9,4744923$
$l\cos(b-\beta) = 9,9797790$	$9,1234321$
$9,8102952$	

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{I}^{\circ}. & 0,646094 \\
\mathrm{II}^{\circ}. & 0,132871 \\
\hline
\end{array}
$$

$\cos z = 0,778965$ ergo $l\cos z = 9,8915179$

vnde fit $z = 38°, 50', 3''$, ficque vera diftantia Lunae ab hac ftella erat $38°, 50', 3''$, dum obferuata effet $d = 38°, 45'$, ita vt correctio hic addenda fit $5', 3''$.

Calculus
pro determinatione Longitudinis eius loci, vbi obferuatio exempli praecedentis eft facta.

§. 7. Primo hic tenendum eft, vbicunque haec obferuatio fuerit facta, tempus verum eius loci accurate obferuari debuiffe, vnde ex temporis aequatione colligatur tempus medium, quod fuerit Anno 1777. Aug. 22^d. 14^h. $35'$. Iam fumantur Ephemerides, pro meridiano fixo, puta Londinenfi, computatae, vnde pro meridie tam Aug. 22^d. quam Aug. 23^d. quaeratur diftantia Lunae ab eadem ftella, fueritque ad meridiem Aug. 22^d. ifta diftantia $= 32°, 57'$, at ad meridiem 23^d. Aug. fuerit ifta diftantia $= 46°, 27'$, atque ex hac duplici diftantia quaeratur tempus Londinenfe, quo ifta diftantia fuerit fupra inuentae aequalis. Videmus autem tempore 24^h. diftantiam Londini increuiffe quantitate $13^{\circ}, 30'$. Fiat ergo haec proportio: vt $13^{\circ}, 30'$: 24^{h}, ita exceſſus noſtrae diſtantiae ſupra minorem $5^{\circ}, 53', 3''$ ad quartum $10^{h}, 27', 38''$, ita vt eadem diſtantia Londini debuerit reperiri Anno 1777. Aug. $22^{d}. 10^{h}, 27', 38''$. Quoniam igitur hoc momento tempus loci incogniti erat Aug. $22^{d}. 14^{h}, 35'$, patet hunc locum orientaliorem fuiſſe Londino et differentiam meridianorum fuiſſe $4^{h}, 7', 22''$, ſiue in gradibus $61^{\circ}, 50', 30''$.

§. 8. Quemadmodum ex Ephemeridibus pro quouis meridie diſtantia Lunae a certa ſtella fixa computari debeat, hac regula vti conueniet:

Ad meridiem propoſiti diei excerpatur longitudo Lunae $= L$ et latitudo Lunae $= l$, ſiquidem fuerit borealis, pro auſtralibus vero ſcribi deberet $-l$. Simili modo inde innoteſcet longitudo ſtellae $= S$ cum latitudine $= s$. Hinc ſi circulus ♈ Π ♎ deſignet eclipticam, cuius polus ſit in Π atque L et S ſint loca Lunae et ſtellae, per quae ducentur circuli Π L P et Π S Q, ob longitudinem Lunae $= L$ et ſtellae $= S$, erit arcus ♈ $P = L$ et arcus ♈ $Q = S$, tum vero ob latitudines erit $PL = l$ et $QS = s$, ex quibus ſit arcus $PQ = S - L$, cui aequalis eſt angulus $L \Pi S = S - L$. Iam ducatur circulus maximus LS, et in triangulo $L \Pi S$ cognoſcuntur latera $\Pi L = 90^{\circ} - l$ et $\Pi S = 90^{\circ} - s$, cum angulo intercepto $L \Pi S = S - L$. Hinc iam praecepta trigonometrica oſtendunt

Tab. VI. Fig. 2.

$$\operatorname{cof.} LS = \operatorname{cof.}(S - L) \operatorname{cof.} l \operatorname{cof.} s + \operatorname{fin.} l \operatorname{fin.} s,$$

hocque modo obtinetur diſtantia ſtellae a Luna, ſeu arcus LS, iam ad centrum Terrae reductus. Parallaxis vero

Lu-

Lunae hoc modo perpendi poteſt: Sit C centrum Terrae et O locus obſeruatoris, et ponatur radius Terrae $CO = 1$; Luna autem reperiatur ad diſtantiam $C☽ = n$, et ad C O ducatur normalis O☽, ita vt hic luna in horizonte conſpiciatur; hoc modo erit angulus O☽C parallaxis Lunae horizontalis, quae ſit $= \pi$, eritque $\text{ſin.}\,\pi = \frac{1}{n}$, ideoque $n = \frac{1}{\text{ſin.}\,\pi}$. Nunc vero Luna verſetur in L, et ducta recta O L erit angulus ☽OL altitudo Lunae $= \alpha$, ductaque porro recta $CL = n = \frac{1}{\text{ſin.}\,\pi}$ erit angulus O L C parallaxis conueniens, quam ponamus $= p$. Nunc in triangulo C O L habemus latus $CO = 1$ et latus $CL = n$, ac praeterea angulum $COL = 90° + \alpha$. Hinc ergo erit $\text{ſin.}\,p : 1 = \text{coſ.}\,\alpha : n$, vnde reperitur $\text{ſin.}\,p = \frac{\text{coſ.}\,\alpha}{n}$. Eſt vero $n = \frac{1}{\text{ſin.}\,\pi}$, vnde colligitur $\text{ſin.}\,p = \text{coſ.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\pi$. Quia autem hi anguli π et p vix vnquam vltra vnum gradum excreſcunt, loco ſinuum tuto ſumere licet ipſos angulos, ſicque erit $p = \pi\,\text{coſ.}\,\alpha$. Tab. VI. Fig. 3.