1784

De motu penduli circa axem cylindricum, fulcro datae figurae incumbentem, mobilis. Habita frictionis ratione

Leonhard Euler

DE MOTV PENDVLI

CIRCA AXEM CYLINDRICVM, FVLCRO DATAE FIGVRAE INCVMBENTEM, MOBILIS. HABITA FRICTIONIS RATIONE.

Dissertatio altera.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

In praecedente dissertatione, vbi motum penduli circa axem cylindricum dato fulcro incumbentem determinauimus, animum penitus ab omni frictione abstraximus, ita vt axis super fulcro liberrime sine vllo impedimento prorepere queat; quod cum in praxi nunquam vsu venire possit, quaeramus hic, qualis effectus in motu huiusmodi pendulorum a frictione produci debeat; vbi quidem nostram inuestigationem ad oscillationes tantum quamminimus restringemus.

Tab. V. Fig. 1. §. 2. Sit igitur vt ante N A M figura fulcri saltem circa punctum imum A circularis, cuius centrum sit in in O, vnde ducatur recta verticalis O A G ac dicatur radius $AO = a$. Iam elapso tempore quocunque t pendulum nostrum eiusmodi teneat situm, vt eius axis cylindricus fulcro incumbat in puncto a, vnde per centrum eius axis c, agatur recta $a c O$, quippe quae per ipsum punctum O transibit, voceturque radius $ac = b$, ita vt interuallum $Oc = a - b = e$, angulum vero AOa ponamus $= \theta$; in hoc porro statu penduli eius centrum grauitatis erit in puncto g, ex quo per centrum axis c ducta recta gch, occurrat rectae verticali O A in puncto h, maneatque vt ante distantia $cg = c$, angulus vero obliquitatis $Ghg = \Phi$. Denique, denotante M massam seu pondus totius penduli, exprimat Mkk momentum inertiae omnis materiae pendulum constituentis, respectu axis per ipsum punctum g ducti et axi cylindrico paralleli.

§. 3. His positis, si ex puncto g ad verticalem O G ducatur normalis gp, vocenturque interualla $Op = x$ et $pg = y$, ea per binos angulos $AOa = \theta$ et $Ahg = \Phi$ ita exprimentur, vt fit $Op = x = e \operatorname{cos.} \theta + c \operatorname{cos.} \Phi$ et $pg = y = e \operatorname{fin.} \theta + c \operatorname{fin.} \Phi$. Quare si isti anguli fuerint quasi infinite parui, quemadmodum in oscillationibus minimis euenire necesse est, erit $x = e + c$ et $y = e\theta + c\Phi$, atque ex praecedentibus satis liquet fore pressionem, qua axis cylindricus fulcrum in puncto a premit, ipsi ponderi totius penduli aequalem, ideoque $= M$, vnde fulcrum pari vi M in puncto a axem cylindricum in directione acO reagere est censendum, dum totum pondus penduli M ipsi centro grauitatis g in directione verticali applicatum est intelligendum.

§. 4.

§. 4. Hae autem erant duae vires, quibus pendulum, remota omni frictione, in superiori dissertatione sollicitari consideravimus, et ex quarum actione vniuersum motum determinauimus. Nunc autem, accedente frictione, tertia quaedam vis insuper adiici debebit, a frictione orienda, quae suum effectum exerit in ipso puncto contactus a, vbi scilicet axis cylindricus fulcro incumbit. Constat autem quantitatem frictionis certae cuipiam parti totius pressionis, veluti parti tertiae, aequalem aestimari posse; vnde cum pressio in puncto a sit $= M$, statuamus ipsam frictionem $= \lambda M$, ita vt plerumque sit $\lambda = \frac{1}{3}$, siquidem frictio totum suum effectum exerat, id quod euenit, quando axis cylindricus super fulcro reuera prorepit, idque radit. Quare si ponamus axem cylindricum super fulcro secundum directionem a N prorepere, frictio aget secundum directionem oppositam a A, eritque idcirco ad rectam $a\,c$ O normalis; haec igitur est tertia illa vis praeter binas vires ante descriptas in calculum introducenda.

§. 5. Quia iam obseruauimus, frictionem tum demum totum suum effectum exerere, quando reuera fit attritus, siue punctum A super fulcro promouetur; ante omnia nobis videndum est, quanta celeritate punctum contactus a super fulcro procedat. Hunc in finem in ipsam celeritatem, qua punctum a profertur, inquiramus. Ac primo quidem patet, si nullus adesset motus penduli angularis, hoc est, si celeritas angularis esset $\frac{d\Phi}{dt} = 0$, tum motum puncti a aequalem fore motui puncti c, quod cum circa O proferatur celeritate $= \frac{e\,d\theta}{dt}$, eadem celeritate quoque

punctum

punctum a versus N proferri est censendum. At vero ob motum angularem ipsius penduli, cuius celeritas est $\frac{d\Phi}{dt}$, punctum a insuper circa punctum c proferetur, etiam versus N, celeritate $= \frac{b\,d\Phi}{dt}$, ita vt tota celeritas, qua in puncto a fit attritus, sit $= \frac{e\,d\theta + b\,d\Phi}{dt}$, quae ergo expressio nisi fuerit euanescens, frictio totum suum effectum $= \lambda M$ in directione a A exeret.

§. 6. Facile autem perspicitur, hunc casum cum nostra hypothesi, qua oscillationes infinite paruas statuimus, nullo modo consistere posse. Quoniam enim omnes motus sunt tardissimi, si talis vis in directione a A adesset, cuius quantitas foret circiter $= \frac{1}{3}$ M, omnis motus quasi in instanti subito extingueretur totumque pendulum ad statum quietis redigeretur; quamobrem vt motus oscillatorius locum habere possit, omnino necesse est, vt formula $\frac{e\,d\theta + b\,d\Phi}{dt}$ perpetuo maneat nihilo aequalis, id quod euenire nequit, nisi ipsa formula finita $e\,\theta + b\,\Phi$ fuerit vel nulla, vel constans; quia autem per se est infinite parua, statui poterit $e\,\theta = - b\,\Phi$, siue $\theta = - \frac{b\Phi}{e}$, ita vt angulus θ in contrariam partem vergere debeat.

§. 7. Admissa igitur frictione alius motus oscillatorius locum habere nequit, nisi axis cylindricus in regionem contrariam versus M recedat, dum motus gyratorius fit versus alteram plagam N. Hoc scilicet casu axis cylindricus super fulcro voluendo procedet, ita vt nullus attritus sese exerere possit; vnde si recta $c\,g$ circulum minorem secet in α, in quo puncto pendulum ipso initio

tio incubuit puncto A, euidens est arcum $A a$ aequalem
Tab. V. fore arcui $a \alpha$; vnde cum isti arcus sint quasi infinite par-
Fig. 4. vi, manifestum est, rectam $c g$ perpetuo per ipsum punctum A esse transituram, id quod etiam inde patet, quod sit $e \theta = - b \Phi$. Quia enim in triangulo $O A c$ est angulus $A O c = - \theta$, et angulus $O A c = \Phi$, ob hos angulos infinite paruos erit $- \theta : \Phi = A c : O c$; est vero $A c = \alpha c$, ob spatiolum $A \alpha$ euanescens, et $O c = e$; vtique ergo erit $- e \theta = b \Phi$.

§. 8. Quoniam igitur hoc motu omnis attritus cessat, etiam frictio totam suam vim, quam aestimauimus $= \frac{1}{3} M$, neutiquam exeret, sed quouis momento tantilla solum vi aget, quanta praecise opus est ad attritum auertendum. Hinc igitur vis, quam frictio reuera exeret, quam constanter ponamus $= \lambda M$, erit quantitas variabilis quam minima atque inde definienda, vt nullus oriatur attritus, siue vt perpetuo maneat $e \theta + b \Phi = 0$. Probe scilicet hic est animaduertendum, etiamsi reuera nullus adsit attritus, tamen ideo frictionem non omni vi esse destitutam, siue penitus otiosam, sed eius effectum in eo consumi, vt attritus omnis impediatur, siue vt ista aequalitas $e \theta + b \Phi = 0$, perpetuo conseruetur.

§. 9. Resumamus autem figuram praecedentem; quoniam ad eam iam supra motus determinationem accommodauimus, id quod vtique fieri licet, dummodo notetur perpetuo esse $e \theta + b \Phi = 0$, siue $\theta = - \frac{b \Phi}{e}$. Nunc igitur praeter binas vires superiores, pressionem scilicet in puncto contactus a et totum penduli pondus, insuper tertiam

tertiam vim adiungi oportet $= \lambda M$, in directione $a O$ agentem, quae resoluta dabit vim horizontalem

$$= \lambda M \operatorname{cof.} \theta = \lambda M$$

et verticalem deorsum tendentem $= \lambda M \operatorname{fin.} \theta = \lambda M \theta$. Praeterea vero huius vis momentum respectu puncti g erit $= \lambda M (c - b)$, quae tendet ad motum angularem augendum. Transferamus igitur primo omnes has vires in ipsum punctum g, vbi vires verticales se mutuo destruere debebunt, ob $O p = x = e + c$, ideoque constans; quod etiam inde patet, quod vis grauitatis deorsum tendens sit $= M$; pressio sursum vrgens $= M$; ex frictione autem oriatur vis verticalis $= \lambda M \theta$, quae, ob λ pariter infinite paruum, negligi potest. Vires autem horizontales hinc oriundae et motui contrariae erunt $- M \theta - \lambda M$, vnde oritur ista aequatio:

$$\frac{M d d y}{2 g d t^2} = - M \theta - \lambda M, \text{ siue } \frac{e d d \theta + c d d \Phi}{2 g d t^2} = - \theta - \lambda.$$

§. 10. Pro motu autem gyratorio, pressio in $a = M$ dederat momentum motui contrarium $M (\Phi - \theta) c$: nunc autem frictio praebet momentum accelerans $= \lambda (c - b) M$, vnde principia motus suppeditant hanc aequationem:

$$\frac{M k k d d \Phi}{2 g d t^2} = \lambda (c - b) M - M (\Phi - \theta), \text{ siue}$$

$$\frac{k k d d \Phi}{2 g d t^2} = \lambda (c - b) - c (\Phi - \theta),$$

quae porro diuisa per $c - b$ dat,

$$\frac{k k d d \Phi}{2 g (c - b) d t^2} = \lambda - \frac{c (\Phi - \theta)}{c - b},$$

cui aequationi si addatur ante inuenta, quantitas incognita λ ex calculo elidetur, atque totus motus hac vnica aequa-

 tione

tione exprimetur:

$$\frac{e\,dd\theta + c\,dd\Phi}{2g\,dt^2} + \frac{kk\,dd\Phi}{2g\,(c-b)\,dt^2} = -\theta - \frac{c\Phi + c\theta}{c-b} = \frac{b\theta - c\Phi}{c-b}.$$

§. 11. Cum hac autem aequatione coniungi debet conditio principalis ante descripta, qua esse debet $\theta = -\frac{b\Phi}{e}$, vnde fit $dd\theta = -\frac{b\,dd\Phi}{e}$, quibus valoribus substitutis aequatio inuenta hanc induet formam:

$$\frac{(c-b)\,dd\Phi}{2g\,dt^2} + \frac{kk\,dd\Phi}{2g\,(c-b)\,dt^2} = -\frac{\Phi(bb+ce)}{e(c-b)},$$

haec per $c-b$ multiplicata praebet:

$$\frac{((c-b)^2 + kk)\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{\Phi(bb+ce)}{e},$$

quae vnicam variabilem Φ, praeter tempus t inuoluit, ac manifesto motum oscillatorium regularem indicat. Quodsi enim breuitatis gratia ponamus $\frac{ekk + e(c-b)^2}{bb+ce} = h$, haec forma simplex resultabit: $\frac{h\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\Phi$, cuius integratio nobis largitur hunc valorem: $\Phi = \alpha\,\text{fin.}\,(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta)$; vnde patet, huius penduli motum perfecte conformem futurum esse oscillationibus penduli simplicis, cuius longitudo

$$h = \frac{e(kk + (c-b)^2)}{bb+ce},$$

siue singulae oscillationes absoluentur tempore

$$t = \pi\sqrt{\frac{h}{2g}}\ \text{min. fecund.}$$

§. 12. Cum igitur, remota frictione, huiusmodi pendula infinitis diuersis modis ad motus oscillatorios tam regulares quam irregulares concitari queant, maxime memorabile est, quod ob frictionem omnes istae diuersae motuum species ad vnicam, eamque regularem, redigantur; quandoquidem oscillationes hinc oriundae omnino congruent erit cum oscillationibus penduli simplicis, cuius longitudo est $h = \frac{e(kk + (c - b)^2)}{bb + ce}$, quae quantitas quemadmodum ex elementis pendulum constituentibus componatur, accuratius perpendisse iuuabit.

§. 13. Consideremus igitur nostrum pendulum in statu quietis, quoniam vniusmodi tantum motu oscillatorio cieri potest, sitque O centrum curuaturae fulcri MAN, ex quo ducta verticali OAG, posuimus radium curuaturae fulcri $OA = a$. Axis cylindricus penduli incumbat fulcro in ipso puncto A, cuius radius positus est $CA = b$; tum vero sit vt supra interuallum $OC = a - b = e$, centrum autem grauitatis totius penduli versetur in puncto G, existente interuallo $CG = c$. Praeterea posito pondere totius penduli $= M$, eius momentum inertiae respectu puncti G vocauimus $= Mkk$. Haec sunt elementa statum penduli propositi constituentia, ex quibus ergo, vti vidimus, longitudo penduli simplicis isochroni h ita formatur, vt sit $h = \frac{e(kk + (c - b)^2)}{bb + ce}$, cuius expressionis naturam propius examinemus. Tab. V. Fig. 5.

§. 14. Cum momentum inertiae totius penduli, respectu axis per ipsum centrum grauitatis G ducti, sit $= Mkk$, ob distantiam $AG = c - b$ erit eiusdem momentum inertiae respectu axis per ipsum punctum A ducti $= Mkk + M(c - b)^2$, quod si breuitatis gratia ponatur $= Mff$, vt sit $ff = kk + (c - b)^2$, erit longitudo penduli simplicis isochroni $h = \frac{eff}{bb + ce}$; ad quam expressionem vlterius euoluendam ducamus ex puncto O tangentem axis cylindrici OT, et ex T ad rectam verticalem agamus

 norma-

normalem T P, et quia triangulum O C T ad T eſt rectangulum, ideoque ſimile triangulo C T P, erit O C : C T = C T : C P, hoc eſt $e : b = b : CP$, ideoque $CP = \frac{bb}{e}$; quare cum ſit $CG = c$, erit interuallum $GP = \frac{bb + ce}{e}$. Introducto igitur hoc interuallo G P, erit $h = \frac{ff}{GP}$, quae ergo expreſſio ſatis ſimplex exhibet longitudinem penduli ſimplicis iſochroni.

§. 15. Hic aſſumſimus centrum curuaturae fulcri O ſupra circulum, qui baſin axis cylindrici refert, cadere; ſin autem iſtud punctum O intra hunc circulum caderet, attamen ſupra eius centrum C, vt iam eſſet $CO = e$, tum ex O ducta applicata O T, ex T agatur tangens iſtius circuli T P, rectae verticali occurrens in P; et quia triangula O C T et C T P denuo ſunt ſimilia, erit C O : C T = C T : C P, hoc eſt $e : b = b : CP$, ita vt ſit $CP = \frac{bb}{e}$, quamobrem hoc caſu longitudo penduli iſochroni erit $h = \frac{ff}{GP}$, vt ante. Ex quo patet puncta O et P inter ſe permutari poſſe, ſimulque intelligitur, hoc poſteriori caſu, quo G P maiorem obtinet valorem, oſcillationes fore frequentiores, quam caſu praecedenti.

Tab. V. Fig. 6.

§. 16. Quodſi punctum O in ipſum centrum C incidat, punctum P in infinitum remouebitur, fietque $h = 0$ id quod etiam inde patet, quod ſit $e = 0$. Manifeſtum autem eſt hoc caſu cauitatem fulcri accurate excipere axem cylindricum, eumque propterea immotum retineri, ita vt nullae plane oſcillationes fieri queant. Sin autem punctum O intra centrum C verſus A cadat, ita vt curuatura fulcri

fulcri minor foret quam curuatura axis cylindrici, tum cylindrus nequidem fulcro incumbere posset, sicque omnis motus oscillatorius prorsus tolleretur.

§. 17. At vero si punctum O infra A cadat, fulcrum superne conuexum esset futurum, et quantitas e euaderet negatiua. Ponatur igitur pro hoc casu $e = -i$ fietque

$$h = -i \frac{(kk + (c-b)^2)}{bb - ci}, \text{ siue } h = i \frac{(kk + (c-b)^2)}{ci - bb},$$

qui ergo valor, quoties fuerit $bb > ci$, erit negatiuus, ideoque nullus plane motus oscillatorius contingere posset, sed potius axis cylindricus super tali fulcro delaberetur, simulac minimus motus ipsi tribueretur.

§. 18. Consideremus igitur casum, quo fulcrum superne est conuexum, cuius centrum curuaturae cadat in O, ita vt iam sit $GO = i$, existente $CG = c$. Ex O ducatur tangens axis cylindrici OT, et ex T ducta horizontali TP, euidens est fore $CP = \frac{bb}{i}$, ideoque $c - \frac{bb}{i} = GP$. Quare cum etiamnunc sit $ff = kk + (c-b)^2$, longitudo penduli simplicis isochroni hoc casu erit $h = \frac{ff}{GP}$, quae ergo semper erit positiua, dummodo centrum grauitatis G non supra punctum P ascendat, id quod in motu vacillatorio seu nutatorio euenire posset. Prouti autem pendulum hic contemplamur, vt centrum grauitatis in fulcrum cadat, motus semper oscillatorius realis sequetur, qui eo erit frequentior, quo maius fuerit interuallum GP. Tab. V. Fig. 7.

§. 19. His igitur in genere obseruatis operae pretium erit annotasse, si axis cylindricus omni crassitie careat, ita vt ſit $b=0$, tum longitudinem penduli ſimplicis iſochroni fore $b=\frac{kk+cc}{c}$, vbi ob $CA=0$ erit $AG=0$, qui ergo caſus manifeſto conuenit cum motu penduli ordinarii, quod ex puncto A eſſet ſuſpenſum, quandoquidem momentum inertiae reſpectu puncti A eſt $=M(kk+cc)$, quod diuiſum per M. AG ſecundum ea quae de motu pendulorum ſunt tradita, ſemper longitudinem penduli ſimplicis iſochroni exhibet.

§. 20. Hic immorari non opus eſſe cenſeo caſui, quo totum penduli corpus ſupra pauimentum eleuatur, ideoque etiam centrum grauitatis G: hoc enim caſu ob frictionem orietur ipſe ille motus vacillatorius, quem iam olim fuſius ſum perſcrutatus, quippe cuius oſcillationes ab ipſa frictione regulares reddentur. Praeſens quidem inveſtigatio multo latius patet, cum etiam ad pauimenta ſiue concaua, ſiue conuexa extendatur. Omnes autem variationes, quae hic occurrere poſſunt, ex ante expoſitis abunde eluceſcunt, ſi modo centrum grauitatis G ſupra A eleuetur, ita vt ſuperfluum foret huic argumento diutius immorari, ſi modo haec regulo probe teneatur: quamdiu centrum grauitatis totius penduli G infra punctum illud P ſupra definitum incidat, tum ſemper motum oſcillatorium oriri poſſe, et longitudinem penduli ſimplicis iſochroni ſemper fore $b=\frac{ff}{gP}$, exiſtente Mff momento inertiae totius maſſae penduli, reſpectu axis per punctum contactus A ducti; quando autem centrum grauitatis G ſupra punctum P incidit, tum pendulum nullum plane motum oſcillatorium recipere poſſe, ſed a minima inclinatione eſſe prolapſurum.

DIS-