1784

De inductione ad plenam certitudinem evehenda

Leonhard Euler

DE INDVCTIONE AD PLENAM CERTITVDINEM EVEHENDA.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Notum eſt, pleraſque numerorum proprietates primum per ſolam inductionem eſſe obſeruatas, quas deinceps Geometrae ſolidis demonſtrationibus confirmare elaborauerunt; in quo negotio imprimis *Fermatius* ſummo ſtudio et ſatis felici ſucceſſu fuit occupatus. Maxime autem dolendum eſt, plures eius demonſtrationes iniuria temporum penitus interiiſſe, quo imprimis ſunt referendae eae demonſtrationes, quas circa reſolutionem numerorum vel in tres trigonales, vel quatuor quadrata, vel quinque pentagonales, vel ſex hexagonales &c. ſe inueniſſe affeverauerat. Deinceps quidem reſolutio in quatuor quadrata a celeberrimo *La Grange* et a me per certiſſima principia fuit euicta, neque tamen adhuc iſta demonſtrandi methodus ad numeros trigonales et reliquos polygonales accommodari potuit. Interim tamen iſtae reſolutiones per ſolam inductionem iam ad tantum certitudinis gradum euectae

euectae ſunt, vt nullis amplius dubiis locus relinqui videatur. Quin etiam ipſa inductio fortaſſe per certas rationes ita corroborari poſſe videtur, vt inſtar abſolutae demonſtrationis ſpectari poſſit, id quod circa reſolutionem numerorum in quatuor quadrata et ternos trigonales oſtendere conabor.

De Reſolutione Numerorum in quatuor quadrata.

§. 2. Quanquam haec reſolutio iam perfecta demonſtratione eſt munita: tamen operae pretium erit, perſcrutari, quousque ſoli inductioni inſiſtentes in eius veritate ſtabilienda pertingere valeamus. Primum igitur in ſubſidium vocemus inſigne Theorema Fermatianum, quod omnis numerus primus formae $4n+1$ ſemper ſit ſumma duorum quadratorum, cuius demonſtrationem equidem iam dudum perfectam protuli. Hinc igitur ſtatim ſequitur, aggregatum duorum huiusmodi numerorum certo eſſe ſummam quatuor quadratorum. Aggregata autem duorum numerorum formae $4n+1$ praebent numeros formae $4n+2$, hoc eſt numeros impariter pares; vnde ſi omnes numeri formae $4n+2$ in duos numeros primos formae $4n+1$ reſolui poſſent, etiam forent ſummae quatuor quadratorum, quod ſi fuerit oſtenſum, etiam ſemiſſes horum numerorum, hoc eſt omnes numeri impares, hincque adeo omnes plane numeri erunt ſummae quatuor quadratorum; quandoquidem facile demonſtrari poteſt, ſi numerus quispiam N fuerit ſumma quatuor quadratorum, tum etiam eius duplum, quadruplum, et in genere formam $2^{\nu}N$, ſemper fore ſummam quatuor quadratodratorum. Quin etiam, si N fuerit numerus par, veluti nostro casu, scilicet $4n+2$, tunc etiam eius semissis certe est summa quatuor quadratorum.

§. 3. Tota ergo quaestio huc reducitur: Vtrum omnes numeri impariter pares, siue formae $4n+2$, semper in duas huiusmodi partes, quae sint formae $4n+1$, simulque numeri primi, secari possint, id quod per inductionem inuestigemus. Constitutis scilicet numeris primis forma $4n+1$, qui sunt

1, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, etc.

percurramus ordine omnes numeros formae $4n+2$, et singulis adiungamus resolutionem in duos huiusmodi numeros primos:

$2 = 1+1$
$6 = 1+5$
$10 = 5+5$
$14 = 1+13$
$18 = \begin{cases} 1+17 \\ 5+13 \end{cases}$
$22 = 5+17$
$26 = 13+13$
$30 = \begin{cases} 1+29 \\ 13+17 \end{cases}$
$34 = \begin{cases} 5+29 \\ 17+17 \end{cases}$
$38 = 1+37$

$42 = \begin{cases} 1+41 \\ 5+37 \\ 13+29 \end{cases}$
$46 = \begin{cases} 5+41 \\ 17+29 \end{cases}$
$50 = 13+37$
$54 = \begin{cases} 1+53 \\ 13+41 \\ 17+37 \end{cases}$
$58 = \begin{cases} 5+53 \\ 17+41 \\ 29+29 \end{cases}$
$62 = 1+61$
$66 = \begin{cases} 5+61 \\ 13+53 \\ 29+37 \end{cases}$

$70 = \begin{cases} 17+53 \\ 29+41 \end{cases}$
$74 = \begin{cases} 1+73 \\ 13+61 \\ 37+37 \end{cases}$
$78 = \begin{cases} 5+37 \\ 17+61 \\ 37+41 \end{cases}$
$82 = \begin{cases} 29+53 \\ 41+41 \end{cases}$
$86 = 13+73$
$90 = \begin{cases} 1+89 \\ 17+73 \\ 29+61 \\ 37+53 \end{cases}$
$94 = \begin{cases} 5+89 \\ 41+53 \end{cases}$

$98 = \begin{cases} 1+97 \\ 37+97 \end{cases}$
$102 = \begin{cases} 1+101 \\ 5+97 \\ 13+89 \\ 29+73 \\ 41+61 \end{cases}$
$106 = \begin{cases} 5+101 \\ 17+89 \\ 53+53 \end{cases}$
$110 = \begin{cases} 1+109 \\ 13+97 \\ 37+73 \end{cases}$

§. 4.

§. 4. Talis ergo resolutio vsque ad numerum 110 feliciter successit; ac si quis hunc laborem continuare voluerit, non solum semper succedere, sed etiam continuo plures resolutiones locum habere deprehendet. Interim tamen conclusio nimis foret lubrica, si quis hinc inferre vellet, omnes plane numeros formae $4n+2$ semper esse resolubiles in duos numeros formae $4n+1$. Quanquam plerumque plures resolutiones locum inueniunt, tamen eiusmodi casus non desunt, vbi vnica tantum resolutio successit, veluti in numeris 26, 38, 50, 62, 86; vnde obiici posset, non solum tales casus etiam in maioribus numeris occurrere, sed etiam fortasse euenire posse, vt talis resolutio plane falleret, etiamsi hoc eo minus verendum videtur, quo longius processerimus. Verum tamen quoque concedere debemus, numeros primos formae $4n+1$ continuo fieri rariores, ita vt plures resolutiones ob hanc caussam excludantur. Quin etiam, si numeri primi formae $4n+1$ in maximis penitus cessarent, tum talis resolutio non amplius locum habere posset. At cum iam *Euclides* demonstraverit, multitudinem numerorum primorum reuera esse infinitam, id etiam valere debet pro numeris primis formae $4n+1$, qui propterea nunquam plane deficere poterunt.

§. 5. Ob istas rationes igitur huic assertioni insistere non conuenit, quod omnes plane numeri formae $4n+2$ resolutionem in binos primos formae $4n+1$ admittant, etiamsi fortasse certum sit et aliquando rigida demonstratione confirmari queat. Interim tamen manifestum est, si multitudo numerorum formae $4n+1$, quibus in his resolutionibus sumus vsi, maior esset, quam hic assum-

 simus

fimus, multo minus eiusmodi cafus fore metuendos, qui talem refolutionem refpuerent. Illis autem numeris omni iure adiungere poterimus omnes numeros quadratos formae $4n+1$, quippe qui numeris primis formae $4n+1$ additi producunt numeros adeo in ternos quadratos refolubiles; quamobrem ad illos numeros formae $4n+1$ adiiciamus quoque quadrata imparia, & vsque ad centenarium nanciscemur pro noftris refolutionibus fequentes numeros:

1, 5, 9, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 49, 53, 61, 73, 81, 89.

§. 6. Videamus igitur, quomodo refolutiones numerorum formae $4n+2$ in huiusmodi binas partes fuccedant.

2 =	1+1
6 =	1+5
10 =	1+9, 5+5
14 =	1+13, 5+9
18 =	1+17, 5+13, 9+9
22 =	5+17, 9+13
26 =	1+25, 9+17, 13+13
30 =	1+29, 5+25, 13+17
34 =	5+29, 9+25, 17+17
38 =	1+37, 9+29, 13+25
42 =	1+41, 5+37, 13+29, 17+25
46 =	5+41, 9+37, 17+29
50 =	1+49, 9+41, 13+37, 25+25
54 =	1+53, 5+49, 13+41, 17+37, 25+29
58 =	5+53, 9+49, 17+41, 29+29
62 =	1+61, 9+53, 13+49, 25+37
66 =	5+61, 13+53, 17+49, 25+41, 29+37
70 =	9+61, 17+53, 29+41
74 =	1+73, 13+61, 25+49, 37+37
78 =	5+73, 17+61, 25+53, 29+49, 37+41
82 =	1+81, 29+53, 41+41, 9+73

86 =

$$86=\left\{\begin{array}{l}5+81\\13+73\\25+61\\37+49\end{array}\right. \quad 90=\left\{\begin{array}{l}1+89\\9+81\\17+73\\29+61\\37+53\\41+49\end{array}\right. \quad 94=\left\{\begin{array}{l}5+89\\13+81\\41+53\\1+97\end{array}\right. \quad 98=\left\{\begin{array}{l}9+89\\17+81\\25+73\\37+61\\49+49\end{array}\right.$$

§. 7. Adiectis igitur quadratis ad noſtros numeros primos formae $4n+1$, omnes reſolutiones tam notabiliter increuerunt, et manifeſto in maioribus numeris multo magis increſcent, vt nullo modo metuendum videatur, vt vnquam vnica tantum reſolutio, multo minus plane nulla ſit ſucceſſura; hocque modo inductio ſupra facta iam tantopere eſt corroborata, vt ſolidae demonſtrationi aequiparare poſſe videatur. Sin autem nihilominus aliquis adhuc obiicere vellet, rem nondum ſatis eſſe comprobatam; is tamen concedere erit coactus, ſi multitudinem numerorum illorum formae $4n+1$ inſuper augere liceret, tum plane nulli amplius obiectioni locum relinqui.

§. 8. Quoniam enim numeri illi formae $4n+1$ ad noſtrum ſcopum eatenus ſunt accommodati, quatenus ſunt vel ipſi quadrati, vel in duos quadratos reſolubiles: iis inſuper adiungi poterunt producta ex binis pluribusue numeris eiusdem generis; ſiquidem demonſtratum eſt, productum ex duobus pluribusue numeris, qui ſinguli ſint ſummae duorum quadratorum, ſemper etiam in duo quadrata reſolui poſſe. Quocirca ad ſuperiorem claſſem iſtorum numerorum adhuc adiungere poterimus ſequentes:

45, 65, 85, 117, 125, 145, 153, 185, 205, 221.

 His

His autem numeris adiectis manifestum est, numerum omnium resolutionum tantopere, et continuo magis augeri, vt plane impossibile sit, vt talis resolutio unquam fallere posset. Ita cum in praecedentibus resolutionibus numerus 82 tantum quatuor resolutiones habuerit, nunc sequentes locum habebunt:

$82 = 1 + 81,\ 9 + 73,\ 17 + 65,\ 29 + 53,\ 37 + 45,\ 41 + 41.$
sicque duae nouae resolutiones accesserunt. Quamobrem his rationibus veritas theorematis: quod omnis numerus sit summa quatuor quadratorum, prorsus extra omne dubium posita est censenda. Interim tamen facile concedimus, hanc demonstrationem non tanta euidentia esse praeditam, quanta in rigidis demonstrationibus desiderari solet.

De resolutione numerorum in ternos trigonales.

§. 5. Si numerus N fuerit summa trium trigonalium, hoc est $N = \frac{xx+x}{2} + \frac{yy+y}{2} + \frac{zz+z}{2}$, erit

$$8N + 3 = (2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2.$$

Quodsi igitur demonstrari queat, omnes numeros formae $8N + 3$ esse summas trium quadratorum, tum etiam demonstratum erit, omnes plane numeros N esse summas trium trigonalium; forma enim $8N + 3$ nonnisi tribus quadratis imparibus aequalis esse potest. Vnde si fuerit

$$8N + 3 = (2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2,$$

erit viciſſim

$$N = \frac{xx+x}{2} + \frac{yy+y}{2} + \frac{zz+z}{2},$$

ideoque summa trium trigonalium.

§. 6.

§. 6. Nunc in subsidium vocemus theorema supra memoratum: quod omnis numerus primus formae $4n+1$ sit summa duorum quadratorum, ideoque $4n+1=aa+bb$; atque euidens est etiam eius duplum $8n+2$ fore summam duorum quadratorum; est enim

$$8n+2=(a+b)^2+(a-b)^2.$$

Quod si ergo singulis his numeris $8n+2$ addamus quadrata imparia, quae sunt formae $8m+1$, aggregata erunt vtique summae trium quadratorum; horum autem aggregatorum forma erit $8n+3$; quocirca quaestio huc redit: num omnes numeri formae $8N+3$ ita in duas partes diuidi queant, vt vna sit quadratum impar, altera duplum numeri primi formae $4n+1$, quod vt in minoribus numeris saltem exploremus, ista dupla vsque ad 200 ordine exponamus:

2, 10, 26, 34, 58, 74, 82, 106, 122, 146, 178, 194, 202.

§. 7. Nunc igitur omnes numeros formae $8N+3$ percurramus, et videamus, an omnes componi queant ex quopiam numero huius ordinis et quadrato impari, quae ad eundem terminum vsque sunt

1, 9, 25, 49, 81, 121, 169, 225,

quod tentamen ita repraesentetur:

3 =	1 + 2
11 =	1 + 10; 9 + 2
19 =	9 + 10
27 =	1 + 26; 25 + 2
35 =	1 + 34; 9 + 26; 25 + 10
43 =	9 + 34
51 =	25 + 26; 49 + 2
59 =	1 + 58; 25 + 34; 49 + 10
67 =	9 + 58
75 =	1 + 74; 49 + 26
83 =	1 + 82; 9 + 74; 25 + 58; 49 + 34; 81 + 2
91 =	9 + 82; 81 + 10
99 =	25 + 74
107 =	1 + 106; 25 + 82; 49 + 58; 81 + 26
115 =	9 + 106; 81 + 34
123 =	1 + 122; 49 + 74; 121 + 2
131 =	9 + 122; 25 + 106; 49 + 82; 121 + 10
139 =	81 + 58
147 =	1 + 146; 25 + 122; 121 + 26
155 =	9 + 146; 49 + 106; 81 + 74; 121 + 34
163 =	81 + 82
171 =	25 + 146; 49 + 122; 169 + 2
179 =	1 + 178; 121 + 58; 169 + 10
187 =	9 + 178; 81 + 106

§. 8. Hinc igitur iam ſine nimia temeritate concludi videatur, omnes plane numeros formae $8n + 3$ reſolui poſſe in duas partes, quarum altera ſit quadratum, altera autem duplum numeri primi $4n + 1$. Cum enim numerus quadratorum, quae adhiberi poſſunt, continuo increſcat, combinationum numerus etiam continuo magis augetur; vnde ſi talis reſolutio vsquam falleret, in minoribus numeris fallere debuiſſet. Interim tamen, quia hic occurrerunt eiusmodi caſus, qui vnam tantum reſolutionem admittunt, veluti contigit in numeris 67, 99, 139, 163, quoniam tales ſine dubio in ſequentibus non deerunt, non immerito vereri licet, ne talis reſolutio vspiam plane deficiat. Quanquam igitur iſta concluſio forſitan veritati conſentanea eſſe queat, tamen ei non confidamus.

§. 9.

§. 9. Cum autem classis illa numerorum $8n+2$ haud mediocrem amplificationem admittat, dum scilicet quadrata imparia duplicata ipsis adiungimus, quippe quae per se sunt summae duorum quadratorum, prorsus non amplius erit metuendum, ne vnquam resolutio fiat impossibilis. Praeterea vero etiam insuper dupla eorum numerorum compositorum formae $4n+1$, qui scilicet sint producta ex duobus pluribusue numeris primis eiusdem formae, adiicere poterimus, vnde istorum omnium numerorum formae $8n+2$ haec progressio resultabit:

2, 10, 18, 26, 34, 50, 58, 74, 82, 90, 98, 106, 122, 130, 146, 162, 170, 178, 194, 202, etc.

§. 10. Hos igitur nouos numeros in subsidium vocando resoluamus eos tantum numeros, qui in superiori tabula vnicam resolutionem admiserunt, hoc modo:

$$19 = 1 + 18 = 9 + 10$$
$$43 = 9 + 34 = 25 + 18$$
$$67 = 9 + 58 = 49 + 18$$
$$99 = 1 + 98 = 9 + 90 = 25 + 74 = 49 + 50 = 81 + 18$$
$$139 = 9 + 130 = 49 + 90 = 81 + 58 = 121 + 18$$
$$163 = 1 + 162 = 81 + 82$$

Hic igitur videmus, ad minimum vnam resolutionem accessisse, in maioribus autem numeris adhuc plures accedere debebunt. His igitur probe perpensis Geometrae iudicent, vtrum haec inductio, tot rationibus corroborata, non solidae demonstrationi aequiualere sit censenda.

§. 11.

§. 11. Quanquam autem haec conclusio nulla vlteriori confirmatione indigere videtur: tamen ex alio principio prorsus diuerso haud exiguum firmamentum afferri potest, scilicet: quod omnes numeri primi formae $8n+3$ semper sint formae $2aa+bb$, ideoque per se in tria quadrata resolubiles, id quod iam solide est demonstratum. Hinc autem sequitur, etiam eosdem numeros primos octenario auctos etiam esse summas trium quadratorum. Si enim fuerit $8n+3=2aa+bb$, erit

$$8n+11=(a+2)^2+(a-2)^2+bb,$$

quamobrem iam certi sumus, superiorem resolutionem nunquam in numeris primis $8n+3$, neque etiam in sequentibus $8n+11$ fallere posse; atque hoc etiam valet de numeris $8n+35$; siquidem est

$$8n+35=(a+4)^2+(a-4)^2+bb,$$

quod proinde etiam valebit de omnibus his numeris $8n+3+8pp$, denotante p numerum quemcunque. Porro vero, cum etiam demonstratum sit, omnes numeros primos formae $8n+1$ esse quoque numeros formae $2aa+bb$, talia producta duorum numerorum primorum $(8p+1)(8q+3)$, qui vtique sunt numeri formae $8n+3$, semper esse numeros eiusdem formae $2aa+bb$, ideoque istos numeros siue octenario, siue numero 32, siue in genere numero $8rr$ auctos, certe esse summas trium quadratorum His igitur considerationibus adiunctis theorema Fermatianum de numeris trigonalibus summo rigore demonstratum censeri debebit. Interim tamen fateri cogimur, hoc modo necessitatem, cur ita fieri debeat, non clare perspici posse.

EXER-