1784

# De plurimis quantitatibus transcendentibus, quas nullo modo per formulas integrales exprimere licet

Leonhard Euler

# DE PLVRIMIS QVANTITATIBVS TRANSCENDENTIBVS, QVAS NVLLO MODO PER FORMVLAS INTEGRALES EXPRIMERE LICET.

Auctore

*L. EVLERO.*

§. 1.

Formulae integrales, quarum integrationem per quantitates algebraicas expedire non licet, vulgo tanquam vnicus fons omnium quantitatum transcendentium spectari solent. Ita enim ex formula integrali $\int\frac{dx}{x}$ nati sunt logarithmi, et ex formula $\int\frac{dx}{1+xx}$ arcus circulares; quae quantitates, etiamsi transcendentes, nunc quidem in Analysin ita sunt receptae, vt aeque facile tractari queant ac ipsae quantitates algebraicae. Praeterea vero etiam quantitates, quae rectificationem sectionum conicarum inuoluunt, a Geometris iam ita sunt exploratae, vt problemata, quae ad eas fuerint perducta, pro perfecte solutis haberi soleant. Continentur autem istae quantitates transcendentes in huiusmodi formulis integralibus: $\int dx\sqrt{\frac{f+gxx}{h+kxx}}$, et quotiescun-

que

que aliae quantitates transcendentes occurrunt, eae ſemper per quadraturas certarum linearum curuarum repraeſentari poſſe cenſentur; quo pacto etiam ad formulas integrales reducuntur, quae, vtcunque fuerint complicatae, tamen veros valores talium quantitatum transcendentium exprimere aeſtimantur.

§. 2. Interim tamen obſeruaui, innumerabilia exhiberi poſſe quantitatum transcendentium genera, quae nullo modo per formulas integrales exprimi queant, etiamſi earum valores proxime veros plerumque ſatis facile definire liceat. Oriuntur autem huiusmodi quantitates potiſſimum ex talibus ſeriebus infinitis, quarum ſummae nullo adhuc modo ad formulas integrales reuocari potuerunt, inter quas imprimis notatu digna occurrit iſta ſeries infinita a geometrica parum diſcrepans:

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{31} + \tfrac{1}{63} + \text{etc.}$$

quarum fractionum denominatores vnitate deficiunt a poteſtatibus binarii, cuius ſumma vero proxime haud difficulter aſſignatur. Facile autem intelligitur, eam neque eſſe rationalem, neque ad numeros irrationales referri poſſe; tum vero etiam ſatis certum videtur, eam neque per logarithmos, neque per arcus circulares exprimi poſſe. Interim tamen nulla adhuc via patet, eiusmodi formulam integralem inueſtigandi, cuius valor ſummam iſtius ſeriei exacte exhiberet. Quod ſi huius ſeriei ſinguli termini more ſolito in ſeries geometricas conuertantur, notatu dignum eſt, quod eius ſumma per ſequentes formulas repraeſentari poſſit:

$$\frac{1}{2^{xx}} + 2\int\frac{1}{2^{xx+x}} + 2\int\frac{1}{2^{xx+2x}} + 2\int\frac{1}{2^{xx+3x}} + \text{etc.}$$

vbi

vbi $\int \frac{1}{2^{xx}}$ denotat ſummam feriei infinitae, cuius terminus indici $x$ reſpondens eſt $\frac{1}{2^{xx}}$, quae ergo erit

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{2^{25}} + \text{etc.}$$

huius autem feriei ſumma pariter nullo modo exhiberi poteſt, quod idem de reliquis partibus eſt intelligendum. Ipſius autem feriei propoſitae ſumma proxime vera eſt 1,606695150, qui numerus ſi cuipiam quantitati cognitae, veluti logarithmo ſeu arcui circulari deprehenderetur aequalis, id ſine dubio eximium eſſet inuentum.

§. 3. Quemadmodum hic a poteſtatibus binarii vnitatem ſubtraximus, ita ad eas numerum indefinitum $x$ addamus, ſtatuamusque

$$y = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{4+x} + \frac{1}{8+x} + \text{etc.}$$

qua aequatione, ſi $x$ ſumatur pro abſciſſa, $y$ autem pro applicata, certa linea curua exprimitur, in qua vnicam applicatam, abſciſſae $x = 0$ reſpondentem, reuera aſſignare licet, quippe quae erit $y = 2$. Pro omnibus autem reliquis abſciſſis applicatae erunt quantitates maxime tranſcendentes, quae nullis adeo formulis integralibus exprimi poſſe videntur; ita vt natura huius curuae nulla aequatione ſiue differentiali ſiue integrali repraeſentari queat. Interim tamen euidens eſt, abſciſſis $x = -1$, $x = -2$, $x = -4$, $x = -8$, $x = -16$, etc., applicatas conuenire infinite magnas; ſumto autem $x = \infty$ applicatas eſſe euanituras.

§. 4. Hac aequatio generalior reddi poteſt, ſi loco 2 aſſumatur alius quicunque numerus $a$, ita vt ſit

 $y =$

$$y = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a^2+x} + \frac{1}{a^3+x} + \frac{1}{a^4+x} + \text{etc.}$$

vbi abſciſſae $x = 0$ reſpondet applicata $y = \frac{a}{a-1}$, reliquae vero omnes iterum erunt maxime tranſcendentes. Euidens autem eſt, ſi ſumeretur $a = 1$, omnes applicatas futuras eſſe infinitas, niſi forte abſciſſa $x$ capiatur infinita. Quemadmodum hic omnibus fractionibus dedimus ſignum $+$, ita quoque alternari poterunt, vt ſit

$$y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a^2+x} - \frac{1}{a^3+x} + \frac{1}{a^4+x} - \text{etc.}$$

tum autem abſciſſae $x = 0$ reſpondebit applicata $y = \frac{a}{a+1}$. Quin etiam loco $x$ in ſequentibus terminis eius poteſtates ſcribi poterunt, vt habeatur huiusmodi aequatio:

$$y = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a^2+x^2} + \frac{1}{a^3+x^3} + \frac{1}{a^4+x^4} + \text{etc.}$$

quae vtique ita eſt comparata, vt natura huius curuae nulla aequatione finita ſiue differentiali ſiue integrali exprimi poſſe videatur.

§. 5. Praeter iſtas formas vero infinitae aliae, per ſolas poteſtates cuiuspiam quantitatis $x$ procedentes, exhiberi poſſunt, quas pariter nullo modo ad formulas integrales reducere licet. Cum enim nullae adhuc huiusmodi ſeries ſummari potuerint, niſi quarum exponentes in progreſſione geometrica progrediuntur, ſimul atque exponentibus ipſius $x$ aliam quamcunque progreſſionis legem tribuimus, earum ſummatio ſemper vires analyſeos ſuperare videtur, etiamſi formulas integrales quantumuis complicatas in ſubſidium vocare voluerimus. Ita ſi proponatur iſta aequatio infinita:

$$y = 1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + \text{etc.}$$

vbi

vbi exponentes ipfius $x$ funt numeri trigonales, pro tali curua nulla prorfus aequatio finita per vllas formulas integrales exhiberi poteft. Hic quidem ftatim manifeftum eft, fi fuerit $x = 1$ vel $> 1$, applicatas in infinitum auctum iri; verum fi pro $x$ fumamus valores vnitate minores, fatis expedite valores applicatae $y$ vero proxime affignari poffunt: veluti fi fumatur $x = \frac{1}{10}$, per fractiones decimales ftatim habetur:

$$y = 1,101001000100001000001000000 1$$

quae fractio facillime quousque libuerit continuari poteft, dum numerus cifrarum inter vnitates collocandarum continuo vnitate crefcit. Quanquam autem huius fractionis verus valor per nullas formulas integrales exhiberi poteft: tamen eius fatis exactam nobis formare poffumus ideam; ita vt, fi forte quadratura circuli ad talem formam reduci poffet, ea pro penitus inuenta quafi effet habenda; atque hoc idem tenendum erit de omnibus aliis fractionibus decimalibus, cuius omnes figurae fecundum certam legem progrediuntur, ita tamen vt nullas reuolutiones periodicas contineat, quibus quippe cafibus valor adeo rationaliter exhiberi poffet.

§. 6. Maximi autem fine dubio momenti foret, fi fumma huius feriei:

$$1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + \text{etc.}$$

finita expreffione, quantumuis tranfcendente, exhiberi poffet. Inde enim folidiffima demonftratio theorematis Fermatiani peti poffet, quod omnes numeri integri fint fummae trium trigonalium; tantum enim opus foret cubum

 illius

illius summae in seriem resoluere, atque ostendere, tum omnes plane potestates ipsius $x$ occurrere debere.

§. 7. Quoniam hic sumsimus $x = \frac{1}{10}$, vt euolutio in fractionem decimalem facillima euaderet, haud multo difficilior erit summatio illius seriei vero proxima, si pro $x$ fractio quaecunque vnitate minor accipiatur. Veluti si sumatur $x = \frac{1}{2}$, vt fiat

$$y = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{21}} + \text{etc.}$$

proxime per fractionem decimalem erit

$$y = 1,64163256066.$$

§. 8. Omnes autem istiusmodi series sub hac forma generali complecti licet:

$$y = A\,x^\alpha + B\,x^\beta + C\,x^\gamma + D\,x^\delta + \text{etc.},$$

dummodo exponentes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ non in arithmetica ratione progrediantur. Quaecunque enim lex inter coëfficientes A, B, C, etc. statuatur, nunquam valorem ipsius $y$ finito modo exprimi posse certum est, quaecunque etiam quadraturae in subsidium vocentur. Quod si porro huiusmodi formae per alias similis naturae vel multiplicentur vel diuidantur, vel vtcunque combinentur, semper orientur eiusmodi genera quantitatum transcendentium, quae omnes formulas integrales eludere videntur. Neque vero etiam ista noua genera transcendentium comparationem inter se admittunt, vnde immensam multitudinem omnium diuersorum generum quantitatum satis admirari non possumus.

§. 9.

§. 9. Cum enim inter duos numeros quantumuis propinquos non ſolum innumerae fractiones rationales aſſignari queant, ſed etiam infinities plures irrationales, quae omnes non ſolum ab illis, ſed etiam inter ſe ſunt diuerſae, vix credibile videtur, praeterea dari adhuc infinita quantitatum genera, quae tam inter ſe quam ab illis prorſus diſſideant. Et cum iam infinita talia genera exhiberi queant, quae formulis integralibus exhiberi poſſunt, nunc adeo agnoſcere ſumus coacti, etiam praeter illa genera dari adhuc innumera genera quantitatum tranſcendentium, quae nullo modo ad illas ſe reduci patiantur.