



1784

Speculationes circa quasdam insignes proprietates numerorum

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Speculationes circa quasdam insignes proprietates numerorum" (1784). *Euler Archive - All Works*. 564.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/564>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

SPECVLATIONES
CIRCA QVASDAM INSIGNES PROPRIETATES
NVMERORVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Nullum est dubium, quin multitudo omnium fractionum diuersarum, quae inter terminos 0 et 1 constitui possunt, sit infinita; vnde cum multitudo omnium numerorum integrorum etiam sit infinita, manifestum est, multitudinem omnium plane fractionum adhuc infinities esse maiorem; quandoquidem inter binos numeros, unitate differentes, innumerabiles fractiones diuersae admitti debent. Hic autem assumitur, denominatores fractionum in infinitum augeri posse: at si terminus praescribatur, quem numeratores superare non debeant, tum utique numerus fractionum, quas inter terminos 0 et 1 constituere licet, erit determinatus. Quantum autem iste numerus sit futurus, pro quouis limite, qui denominatoribus praescribitur, quaestio quidem primo intuitu non ita difficilis videtur; verum si rem attentius consideremus, tantae difficultates occurrunt, ut perfecta istius quaestionis solutio vix adhuc sperari posse videatur.

§. 2.

§. 2. Quoniam enim fractiones, de quibus hic quaeritur, omnes inter se diuersae esse debent, ex quolibet denominatore aliae fractiones formari nequeunt, nisi quarum numeratores non solum sint denominatore minores, sed etiam ad eundem primi, quia alioquin ad formam simpliciore, ideoque ad denominatores minores reduci possent. Ita cum fractio $\frac{15}{24}$ reducat ad $\frac{5}{8}$, ista fractio pro denominatore = 24 non amplius numerari poterit, quoniam pro denominatore 8 iam est numerata. Totum igitur negotium huc redit, vt pro quolibet denominatore, qui sit = D, multitudo numerorum ipso minorum, et qui cum eo nullum habeant diuisorem communem, assignetur, quippe qui soli pro numeratoribus accipi possunt. Ita pro denominatore 24 alii numeratores admitti nequeunt, praeter 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, quorum multitudo est tantum 8, cuius ratio in compositione numeri 24 est sita. Si enim denominator D esset numerus primus, tum vtique omnes numeri ipso minores, quorum multitudo est D-1, idoneos praeberent numeratores. Quo plures autem denominator D habuerit diuisores, eo magis multitudo numerorum restringitur.

§. 3. Hinc igitur ista quaestio nascitur: vt, proposito quocunque numero D, multitudo numerorum ipso minorum, ad eumque simul primorum, assignetur. Quod quo facilius praestari possit, denotet character πD multitudinem istam numerorum ipso D minorum, et qui cum eo nullum habeant diuisorem communem. Ac primo quidem manifestum est, si fuerit D numerus primus, fore $\pi D = D - 1$. Ante autem quam numeros compositos e-

examinemus, valores huius characteris πD pro omnibus numeris centenario non maioribus apponamus:

$\pi 1 = 0$	$\pi 21 = 12$	$\pi 41 = 40$	$\pi 61 = 60$	$\pi 81 = 54$
$\pi 2 = 1$	$\pi 22 = 10$	$\pi 42 = 12$	$\pi 62 = 30$	$\pi 82 = 40$
$\pi 3 = 2$	$\pi 23 = 22$	$\pi 43 = 42$	$\pi 63 = 36$	$\pi 83 = 82$
$\pi 4 = 2$	$\pi 24 = 8$	$\pi 44 = 20$	$\pi 64 = 32$	$\pi 84 = 24$
$\pi 5 = 4$	$\pi 25 = 20$	$\pi 45 = 24$	$\pi 65 = 48$	$\pi 85 = 64$
$\pi 6 = 2$	$\pi 26 = 12$	$\pi 46 = 22$	$\pi 66 = 20$	$\pi 86 = 42$
$\pi 7 = 6$	$\pi 27 = 18$	$\pi 47 = 46$	$\pi 67 = 66$	$\pi 87 = 56$
$\pi 8 = 4$	$\pi 28 = 12$	$\pi 48 = 16$	$\pi 68 = 32$	$\pi 88 = 40$
$\pi 9 = 6$	$\pi 29 = 28$	$\pi 49 = 42$	$\pi 69 = 44$	$\pi 89 = 88$
$\pi 10 = 4$	$\pi 30 = 8$	$\pi 50 = 20$	$\pi 70 = 24$	$\pi 90 = 24$
$\pi 11 = 10$	$\pi 31 = 30$	$\pi 51 = 32$	$\pi 71 = 70$	$\pi 91 = 72$
$\pi 12 = 4$	$\pi 32 = 16$	$\pi 52 = 24$	$\pi 72 = 24$	$\pi 92 = 44$
$\pi 13 = 12$	$\pi 33 = 20$	$\pi 53 = 52$	$\pi 73 = 72$	$\pi 93 = 60$
$\pi 14 = 6$	$\pi 34 = 16$	$\pi 54 = 18$	$\pi 74 = 36$	$\pi 94 = 46$
$\pi 15 = 8$	$\pi 35 = 24$	$\pi 55 = 40$	$\pi 75 = 40$	$\pi 95 = 72$
$\pi 16 = 8$	$\pi 36 = 12$	$\pi 56 = 24$	$\pi 76 = 36$	$\pi 96 = 32$
$\pi 17 = 16$	$\pi 37 = 36$	$\pi 57 = 36$	$\pi 77 = 60$	$\pi 97 = 96$
$\pi 18 = 6$	$\pi 38 = 18$	$\pi 58 = 28$	$\pi 78 = 24$	$\pi 98 = 42$
$\pi 19 = 18$	$\pi 39 = 24$	$\pi 59 = 58$	$\pi 79 = 78$	$\pi 99 = 60$
$\pi 20 = 8$	$\pi 40 = 16$	$\pi 60 = 16$	$\pi 80 = 32$	$\pi 100 = 40$

§. 4. Ex hac igitur tabula patet, denominatorem 2 vnicam praeberere fractionem, scilicet $\frac{1}{2}$ inter 0 et 1; denominatorem vero 3 dare 2; at 4 dare has duas fractiones: $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$; et ita porro. Vnde si denominatores non ultra 10 continuare velimus, numerus omnium fractionum erit 31; fin autem continuemus vsque ad 20, numerus est 127; vsque

vsque ad 30 progrediendo summa fractionum prodit 277, uti sequens tabella declarat.

Max. denom.	Num. fract.
10	31
20	127
30	277
40	489
50	773
60	1101
70	1493
80	1975
90	2489
100	3043

§. 5. Quod si omnes plane fractiones admittere vellemus, pro denominatore maximo = 10 numerus omnium fractionum foret $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 9 = 45$. Hinc igitur excludi debent eae, quae reductionem admittunt. Primo igitur excludendae erunt fractiones $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}$, quippe = $\frac{1}{1}$; tum vero istae: $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$, quippe = $\frac{1}{1}$; itemque $\frac{4}{6}$ et $\frac{6}{4}$ ut pote = $\frac{2}{3}$; praeterea $\frac{2}{4}$ et $\frac{4}{2}$; ac denique $\frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}$, quarum omnium numerus est 14, qui a 45 subtractus re-relinquit 31. Pro maioribus autem denominatoribus, quos admittere voluerimus, haec enumeratio nimis fiet prolixo, quae quomodo nihilo minus institui possit, videamus.

§. 6. Sit igitur D maximus denominator, quem admittimus, ac numerus omnium plane fractionum foret

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (D - 1) = \frac{DD - D}{2}.$$

C 3

Hinc

Hinc iam excludi debent omnes fractiones, quarum valor est $\frac{1}{2}$, praeter ipsum $\frac{1}{2}$. Hunc in finem diuidatur D per 2, et quotus, siue verus, siue proxime minor fit $= \alpha$, ac manifestum est, numerum fractionum excludendarum fore $= \alpha - 1$. Deinde pro fractionibus $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ fit $\frac{D}{3} = \beta$, denotante β vel verum, vel vero proxime minorem, eritque numerus fractionum excludendarum $= 2(\beta - 1) = (\beta - 1)\pi : 3$. Simili modo si ponamus $\frac{D}{4} = \gamma$; tum vero porro $\frac{D}{5} = \delta$, $\frac{D}{6} = \epsilon$, etc., quamdiu scilicet isti quoti prodeunt unitate maiores, numeri fractionum hinc excludendarum erunt

$$(\gamma - 1)\pi : 4, (\delta - 1)\pi : 5, (\epsilon - 1)\pi : 6 \text{ etc.}$$

quibus igitur ablatis remanebit multitudo fractionum quaesita:

$$\frac{D D - D}{2} - (\alpha - 1)\pi 2 - (\beta - 1)\pi 3 - (\gamma - 1)\pi 4 - (\delta - 1)\pi 5 - \text{etc.}$$

Ita si fuerit $D = 20$, habebimus

$$\begin{aligned} \frac{20}{2} = \alpha = 10, \quad \frac{20}{3} = \beta = 6, \quad \frac{20}{4} = \gamma = 5, \quad \frac{20}{5} = \delta = 4, \\ \frac{20}{6} = \epsilon = 3, \quad \frac{20}{7} = \zeta = 2, \quad \frac{20}{8} = \eta = 2, \\ \frac{20}{9} = \theta = 2, \quad \frac{20}{10} = \iota = 2. \end{aligned}$$

Hinc igitur, ob $\frac{D D - D}{2} = 190$, multitudo fractionum diuersarum erit.

$$\begin{aligned} 190 - 9 \cdot 1 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 6 - 1 \cdot 4 - 1 \cdot 6 - 1 \cdot 4 \\ = 190 - 63 = 127 \end{aligned}$$

vti supra inuenimus.

§. 7. Totius igitur huius inuestigationis cardo in eo versatur, quomodo, proposito quocunque numero D , inueniri debeat valor characteris πD . Ac primo quidem iam supra annotauimus, si fuerit D numerus primus, tum fore

fore $\pi D = D - 1$. Verum si D fuerit numerus compositus, determinatio characteris πD non parum ardua deprehenditur; pendebit enim a factoribus, ex quibus numerus D componitur.

§. 8. Denotet igitur p numerum primum quemcunque, ut sit $\pi p = p - 1$, et quaeramus valorem πp^2 ; ubi quidem statim patet, non omnes numeros ipso minores, quorum multitudo est $p p - 1$, ad cum esse primos, sed inde excludi debere illos, qui per p sunt diuisibiles, qui sunt: $p, 2p, 3p, 4p, \text{etc.} \dots (p-1)p$. Horum autem multitudo est $p - 1$, qui ergo numerus a $p p - 1$ subtractus relinquit $p(p - 1)$ ita ut sit $\pi p p = (p - 1)p$. Simili modo, si fuerit $D = p^3$, multitudo numerorum ipso minorum est $p^3 - 1$, unde excludi debent ii, qui per p , sunt diuisibiles, qui sunt

$p, 2p, 3p, 4p, \text{etc.} \dots p(p p - 1),$
 quorum multitudo cum sit $p p - 1$, erit

$$\pi p^3 = p^3 - 1 - (p p - 1) = p^3 - p p = (p - 1)p p.$$

Ex quo iam facile perspicitur, pro potestate quacunque in genere fore $\pi p^n = (p - 1)p^{n-1}$.

§. 9. Sit nunc q alius numerus primus a p diuersus, et quaeramus valorem $\pi p q$. Primo igitur multitudo numerorum ipso $p q$ minorum est $p q - 1$, unde ergo excludi debent omnes illi, qui sunt diuisibiles tam per p quam per q . Iam vero multipla ipsius p erunt

$p, 2p, 3p, 4p, \dots p(q - 1)$
 quorum multitudo est $q - 1$. Eodem modo multitudo
 multi-

multiplorum ipsius q erit $p - 1$, quae cum omnia a prioribus sint diuersa, multitudo numerorum excludendorum erit $p + q - 2$, ita ut hinc prodeat

$\pi pq = pq - 1 - (p + q - 2) = pq - p - q + 1 = (p - 1)(q - 1)$,
 unde hoc egregium nacti sumus Theorema: Si fuerint p et q numeri primi diuersi, semper erit

$$\pi : pq = (p - 1)(q - 1).$$

Eodem autem modo ostendi poterit, si praeterea r et s sint numeri primi ab illis diuersi, fore

$$\pi pqr = (p - 1)(q - 1)(r - 1) \text{ et}$$

$$\pi pqrs = (p - 1)(q - 1)(r - 1)(s - 1).$$

§. 10. Inuestigemus nunc valorem huius formulae: $\pi p p q$, ubi omnium numerorum $p p q$ minorum multitudo est $p p q - 1$, unde ergo primo excludi debent omnia multipla ipsius p , quorum multitudo est $p q - 1$; tum vero numerorum per q diuisibilibus multitudo est $p p - 1$, inter quos autem occurrunt numeri

$$p q, 2 p q, 3 p q, \text{ etc. } p q (p - 1),$$

qui insuper per p sunt diuisibiles, quos, quia iam exclusimus, ex hoc postremo ordine tolli oportet, ita ut hic tantum remaneant $p p - 1 - (p - 1) = p p - p$, quamobrem hinc obtinebimus

$$\pi p p q = p p q - 1 - (p q - 1) - (p p - p) = (p - 1)(q - 1)p.$$

Quare cum sit

$$p(p - 1) = \pi p p \text{ et } q - 1 = \pi : q,$$

hinc nascitur istud theorema: Si p et q fuerint numeri primi diuersi, tum erit

$$\pi p p q = \pi p p \cdot \pi q = p(p - 1)(q - 1).$$

§. 11. Simili modo haud difficulter intelligetur fore

$$\pi p^n q = \pi p^n \pi q = p^{n-1} (p-1) (q-1).$$

Nam quia multitudo numerorum minorum est $p^n q - 1$, hinc primo excludantur omnia multipla ipsius q , quorum numerus est $p^n - 1$, et remanebit multitudo $p^n q - p^n$. Praeterea vero etiam excludamus omnes numeros per p diuisibiles, quorum multitudo est $p^{n-1} q - 1$, et remanet $p^n q - p^n - p^{n-1} q + 1$. Huc autem insuper addi debent omnes termini per $p q$ diuisibiles, quorum multitudo est $p^{n-1} - 1$, vnde colligitur

$$\begin{aligned} \pi p^n q &= p^n q - p^n - p^{n-1} q + p^{n-1} \\ &= p^{n-1} (p q - p - q + 1) = p^{n-1} (p-1) (q-1). \end{aligned}$$

§. 12. Haud dissimili modo, si numerus D fuerit productum ex duabus potestatibus quibuscunque numerorum primorum p et q diuersorum, ita vt fit $D = p^\alpha q^\beta$, tum erit

$$\pi p^\alpha q^\beta = p^{\alpha-1} q^{\beta-1} (p-1) (q-1);$$

hincque generaliter, si litterae p, q, r, s denotent numeros primos inter se diuersos, erit

$$\pi p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta = p^{\alpha-1} q^{\beta-1} r^{\gamma-1} s^{\delta-1} (p-1) (q-1) (r-1) (s-1)$$

ex quo intelligitur, fore quoque

$$\pi p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta = \pi p^\alpha \cdot \pi q^\beta \cdot \pi r^\gamma \cdot \pi s^\delta.$$

Quamobrem, si modo valores characteris πD inuenti fuerint pro omnibus potestatibus numerorum primorum, tum ex iis omnium plane numerorum valores characteris π expedite assignari posse manifestum est.

§. 13. Si quis autem ope horum Theorematum pro numeris quantumvis magnis istos valores inuestigare voluerit, promptissime scopum obtinebit, si numerum propositum D in factores inter se primos resoluat, siue ii sint numeri primi, nec ne. Namque si fuerit $D = PQR S$ etc. atque hi factores P, Q, R, S nullos habeant diuifores communes, tum semper erit

$$\pi PQR S = \pi P. \pi Q. \pi R. \pi S.$$

Veluti si proponatur iste numerus: $D = 360$, ob $360 = 9.40$ erit $\pi 360 = \pi 9. \pi 40 = 6. 16 = 96$.

§. 14. Quod si vero progressionem istorum numerorum, qui in tabula supra data exhibentur, contemplerur, quae est 0, 1, 2, 2, 4, 2, 6, 4, 6, 4, 10, 4, etc. nullum plane ordinem in eius terminis obseruare licet; cum tamen in progressionem numerorum, cuius singuli termini exhibent summas diuiforum numerorum naturalium, insignem ordinem mihi detegere contigerit. Multo minus ergo, si ex illis numeris talis series formetur:

$$1. x^2 + 2 x^3 + 2 x^4 + 4 x^5 + 2 x^{10} + \text{etc.}$$

cuius terminus generalis nostro signandi modo est $x^n \pi n$, eius indoles, vel adeo summa, vilo modo per quantitates cognitae, siue algebraicas siue transcendentes, exprimi posse videtur. Quocirca vtique maxime operae pretium foret, in naturam huius progressionis inquirere, quandoquidem hinc scientia numerorum haud contemnendis incrementis locupletari posset.

§. 15. Ex formula autem generali §. 12. data multo facilius regula deduci potest, cuius ope pro quocunque

que numero proposito N valor characteris πN assignari potest, quam in sequente Problemate exponamus.

Problema.

Proposito numero quocunque N inuenire multitudinem omnium numerorum ipso minorum ad eumque primorum.

Solutio.

§. 16. Quicumque fuerit numerus N , semper tali forma repraesentari potest, vt sit $N = p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ etc. existentibus p, q, r, s numeris primis. Inuenimus autem tum fore

$$\pi N = p^{\alpha-1} q^{\beta-1} r^{\gamma-1} s^{\delta-1} (p-1)(q-1)(r-1)(s-1).$$

Hinc igitur erit

$$\frac{\pi N}{N} = \frac{(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)}{p q r s},$$

unde sequitur fore

$$\pi N = \frac{N(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)}{p q r s};$$

ita vt iam non amplius opus sit exponentes $\alpha \beta \gamma$ nosse, sed sufficit omnes numeros primos p, q, r, s diuersos indagasse, per quos numerus propositus N est diuisibilis; quibus cognitis multitudo numerorum, minorum quam N et qui simul ad eum sunt primi, erit

$$\pi N = \frac{N(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)}{p q r s}.$$

§. 17. Ita si v. gr. propositus fuerit iste numerus: $N = 9450$, numeri primi, per quos hunc numerum diuidere licet, sunt 2, 3, 5, 7, quandoquidem per nullos alios diuisionem admittit; hinc igitur erit

$$\pi 9450 = \frac{9450 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = 2160.$$

D 2

§. 18.

§. 18. Quod si ergo N vnicum habeat diuiforem primum p , id quod euenit, quando N vel ipsi p aequatur, vel cuius potestati; tum igitur semper erit $\pi N = \frac{N(p-1)}{p}$. Scilicet si fuerit $N = p$, erit $\pi N = p - 1$; at si fuerit $N = p^n$, tum erit $\pi N = p^{n-1}(p-1)$, vti supra inuenimus. Sin autem N duos tantum admittat diuifores primos p et q , tum erit $\pi N = \frac{N(p-1)(q-1)}{pq}$. Ita si N alios non habeat diuifores, praeter 2 et 3, erit $\pi N = \frac{N}{3}$. Tales autem numeri vsque ad centum sunt

6, 12, 18, 24, 36, 48, 54, 72, 96.

§. 19. Haec ipsa autem regula facilis nos madducit ad aliam demonstrationem multo simpliciorem. Ponamus enim numerum N diuifores primos inter se diuersos habere p , q et r , ac praeterea nullos alios; et quoniam multitudo omnium numerorum ipso non maiorum est $= N$, qui ergo numerus vtrique diuifibilis erit per p , q et r , inde primo excludi debent omnes, qui per p sunt diuifibiles, quorum multitudo cum sit $\frac{N}{p}$, his deletis reliquorum multitudo erit $N - \frac{N}{p} = \frac{N(p-1)}{p}$; vnde iam excludamus omnes, qui sunt per q diuifibiles, quorum multitudo cum sit $\frac{N(p-1)}{pq}$, remanebunt adhuc $\frac{N(p-1)(q-1)}{pq}$. Hinc igitur insuper excludi debent ii, qui sunt per r diuifibiles, quorum multitudo cum sit pars $\frac{1}{r}$ istius numeri, iis deletis numerus reliquorum erit $\frac{N(p-1)(q-1)(r-1)}{pqr}$; hocque modo solide demonstrata est nostra regula.

§. 20. Interim tamen etiam haec regula nullum subsidium nobis suppeditat, ad naturam progressionis, quam numeri πN constituunt, et quae est:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

explorandam. Verum si potestates quantitatis indefinitae x adiungamus, ac statuamus

$$s = 1x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 4x^5 + 2x^6 + 6x^7 + 4x^8 + 6x^9 + 4x^{10} + \text{etc.}$$

ex hac serie sequentem formare possumus :

$$\frac{\int s dx}{x} = \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \frac{4x^5}{5} + \frac{x^6}{2} + \frac{6x^7}{7} + \frac{x^8}{2} + \frac{2x^9}{3} + \frac{2x^{10}}{5} + \text{etc.}$$

vbi omnes coefficientes in formula $\frac{(p-1)(q-1)(r-1)}{pqr}$ continentur.

§. 21. Omnes enim eae potestates ipsius x eundem habebunt coefficientem $\frac{1}{2}$, quarum exponentes solum diuisorem primum admittunt, ideoque sunt potestates binarii, scilicet

$$x^2, x^4, x^8, x^{16}, x^{32}, x^{64}, \text{etc.}$$

Deinde omnes potestates, quarum exponentes sunt dignitates ternarii, quae sunt x^3, x^9, x^{27} , omnes habent eundem coefficientem $\frac{1}{3}$. Simili modo $\frac{1}{5}$ erit communis coefficientis potestatum x^5, x^{25}, x^{125} , etc. At vero $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ communis erit coefficientis omnium potestatum, quarum exponentes tantum hos duos numeros primos 2 et 3 inuoluunt, quae sunt $x^6, x^{12}, x^{18}, x^{24}, x^{36}$, etc. Eodemque modo res se habet de reliquis exponentibus, qui vel binos tantum, vel ternos, vel quaternos numeros primos inuoluunt. Quo plures autem numeri primi in exponentibus occurrunt, eo copiosiores erunt series potestatum, quae communi gaudent coefficiente.

§. 22. Cum igitur in his ordinibus series simplicissimae sint eae, quarum exponentes progressionem geometricam constituunt, cuiusmodi est $x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \text{etc.}$ quoniam huius seriei nullo adhuc modo summa definiri, vel saltem ad formulam quampiam integram reduci potuit, multo minus sperare licet, unquam certum ordinem in hac serie generali detectum iri, unde saltem sequentes termini per praecedentes determinari queant; quod merito eo magis mirum videbitur, quod cuiusque potestatis x^n coefficientis tam facile assignari potest.