



1783

# Miscellanea analytica

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

---

## Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Miscellanea analytica" (1783). *Euler Archive - All Works*. 560.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/560>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).

308 (308)

1. Si n = 1 fiet a = 309 + 152 et s = 289 + 76, qui valores iam nimis sunt magni quam quos operi precium sit enouisse.

Exemplum 4.

§. 34. Sit r = 25 et r r = 625 = 24^2 + 7^2, ideoque b = 24 et c = 7. Iam esse debet 7f - 24g = ± 2, hincque erit a = ff + gg et s = 24f + 7g. Casus simplicissimus dat f = 10 et g = 3, hincque a = 109 et s = 261; unde si statatur s = 625 n + 261, reperietur generatim a = 625 n n + 522 n + 109. Euoluanus autem numerice casum a = 109, qui methodo vulgari molestissimos calculos requirit; cum ergo sit s = 261, ob r = 25 erit p = 6525 et q = 261^2 + 2 = 68123, ex quibus desiderati numeri maximi deducuntur, x = 6525 (quintus) = 15140424455100 y = 68123 (quintus) = 158070671986249.

Exemplum 5.

§. 35. Sit r = 29 et r r = 841 = 21^2 + 20^2, ideoque b = 21 et c = 20, fierique debet 20f - 21g = ± 2, hinc erit a = ff + gg et s = 21f + 20g. Casu autem simplicissimo erit f = 2 et g = 2, hinc a = 8 et s = 82; statuat ergo s = 841 n + 82, fietque a = 841 n n + 164 n + 8, unde autem numeri vehementer magni nascuntur. Ex his igitur abunde perspiciuntur, quemadmodum, ope horum subditorum casus problematici Pelliani aliquoquin difficillimi satis expedite resoluti queant.

THEO-

M

T

Si n = 3... illam autem numerice casum molestissimos calculos requirit; cum ergo sit s = 261, ob r = 25 erit p = 6525 et q = 261^2 + 2 = 68123, ex quibus desiderati numeri maximi deducuntur.

19 + 76, qui cert precium sit

Quasi huius Academi hand nem item quidam meros, quam dia, S per n numeri numeri quens Euleri

THEO-

329 (329)

MISCELLANEA ANALYTICA.

Theorema a Cl. Waring sine demonstratione propositum.

Si n fuerit numerus primus, hoc productum continuum: 1. 2. 3. . . . (n-1), citate actum, semper dividi potest per illam numerum primam n.

Demonstratio.

Quoniam illustris Geometra de la Grange iam geminam huius theorematum demonstrationem in novis Actis Academiae regiae scientiarum boruificae dedit: Geometris hand ingratum fore arbitror, si etiam meam demonstrationem more mihi familiari communicavero. Proposito autem quocunque numero primo n, alio loco ostendi, quod quidem quilibet facile largietur, temper dari huiusmodi numeros, quorum singulae potestates, exponentem minorem quam n - 1 habentes, per n divisae, diversa praecedant residua. Sit igitur a huiusmodi numerus, cuius singulae potestates a^0, a^1, a^2, a^3, . . . . . a^{n-1} per n divisae totidem diversa residua producant, quorum numerus cum sit n - 1, in his residuis omnes occurrent numeri 1, 2, 3, 4, . . . . . n - 1, quibus exhaustis sequens potestas a^{n-1} iterum per n divisae relinquet residuum Euleri Opusc. Anal. Tom. I.

T 1

+ 1, perinde ac prima  $a^2$ . Cum ergo post hanc haec formula  $a^{n-1} - 1$  demum per  $n$  sit divisibilis, ob  $n - 1$  numerum parem, qui sit  $= 2p$ , ita ut  $n = 2p + 1$ , vel formula  $a^p - 1$ , vel haec,  $a^{2p+1} - 1$ , per numerum primum  $n$  divisibilis sit necesse est. Priore autem casu  $a^p$  residuum daret  $+ 1$ , quod cum nostrae hypothesi adhaeretur, posterior formula  $a^p + 1$  per  $n$  erit divisibilis, sine potestas  $a^p$  residuum dabit  $- 1$ , seu  $n - 1$ . His praemissis, quoniam singula residua 1, 2, 3, 4, . . .  $n - 1$ , oriuntur ex potestatibus  $a^1, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}$ , manifestum est, productum omnium eorum residuorum, scilicet productum productum  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1)$ , si per  $n$  dividatur, idem residuum esse relinquitur, quod productum omnium earum potestatum  $a^{1+2+3+\dots+(n-1)}$ , sine haec potestas:  $a^{(n-1)(n-1)/2}$  esset daturum. Cum autem sit  $n = 2p + 1$ , erit  $n - 1 = 2p$  et  $n - 2 = 2p - 1$ , ideoque haec potestas fiet  $a^{2p(2p-1)/2}$ , quae est productum ex his duabus potestatibus  $a^{2p(2-1)}$  et  $a^p$ . Verum iam vidimus, potestatem  $a^{2p}$ , sine  $a^{n-1}$ , per  $n$  divisam, residuum dare  $+ 1$ , quod idem relinquetur ex omnibus eius potestatibus, cuiusmodi est  $a^{2p(2p-1)}$ , at altera potestas  $a^p$  residuum relinquit  $- 1$ , unde ipsius potestatis  $a^{2p} - 1$  residuum erit  $- 1$ . Sicque haec formula  $a^{2p} - 1$  per numerum  $n$  erit divisibilis; substituto igitur producto  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1)$  in locum potestatis  $a^{2p} - 1$ , haec formula:  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) + 1$ , per numerum primum  $n$  erit divisibilis.

**Corollarium 1.**

Hinc facile plures aliae similes formulae deduci possunt, quae singulae pariter per numerum primum

*n* ei hic

In ] debe

term ipsu exclu semp merr arith. reiec divid

ex b

tracta comr quael

hanc haec for-

ob  $n - 1$  numerum primum  $n$  sit  $a^p$  residuum relinquitur, posterior potestas  $a^p$  quoniam sinantur ex potestatem est, productum productum productum primum earum haec potestas: sit  $n = 2p + 1$ , haec potestas  $1 + 2$ , quae est  $a^{2p}$ , sine  $a^{n-1}$ , per  $n$  divisam, omnibus eius ita potestas  $a^{2p} - 1$  per  $n$  sit  $n = 2p + 1$ , ideoque haec formula:  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) + 1$ , per numerum primum  $n$  erit divisibilis.

erunt divisibiles, quas cum ipsa formula vnde sunt natas, hic apponamus :

$$\begin{aligned}
 & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) + 1 \\
 & 1 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 2) - 1 \\
 & 1 \cdot 2 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 3) + 1 \\
 & 1 \cdot 2 \cdot 3 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 4) - 1 \text{ etc.}
 \end{aligned}$$

In his autem formulis numerus  $n$  non eo vesque diminui debet, donec fiat  $n = 0$ .

**Corollarium 2.**

Si porro habeatur progressio arithmetica  $n$  terminorum, cuius differentia neutre sit  $n$ , neque multipulum ipsius, in ea inerit vnus terminus per  $n$  divisibilis, quo excluso productum reliquorum terminorum veritate auctum semper erit divisibile per numerum  $n$ , siquidem fuerit numerus primus. Ita si sit  $n = 7$  et formetur haec progressio arithmetica 7 terminorum: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, reieto termino 14 haec forma 2. 5. 8. 11. 17. 20 + 8 dividi poterit per 7.

**Problema.**

*Invenire quatuor numeros integros tales, ut producta ex binis vniuse aucta suam quadrata.*

**Solutio.**

Problema hoc in Elementis meis Algebrae factus tractavi, methodus vero, qua sum vnus, minus erat accommodata ad numeros integros inveniendos. Haec autem quaestio eo est difficilior, quod sex conditionibus satisfieri

oportet. Nunc igitur sequentem solutionem satis simplicem exhibeo. Summis pro lubitu duobus numeris  $m$  et  $n$ , ut fiat  $m n + 1 = l$ , quatuor numeri quaesiti erunt: I.  $m$ ; II.  $n$ ; III.  $m + n + 2$ ; IV.  $4/(l + m)(l + n)$ , quibus 6 conditiones praescriptae sequenti modo implentur:

1.  $m n + 1 = l$ ,
2.  $m(m + n + 2) + 1 = (l + m)^2$ ,
3.  $n(m + n + 2) + 1 = (l + n)^2$ ,
4.  $4m(l + m)(l + n) + 1 = (2l + 2lm - 1)^2$ ,
5.  $4n(l + m)(l + n) + 1 = (2l + 2ln - 1)^2$

denique  
 6.  $4/(m + n + 2)(l + m)(l + n) + 1 = (4l + 2lm + 2ln - 1)^2$ .  
 Hic vero plurimum observasse iuvabit numerum  $l$  tam positive quam negative accipi posse. Ita si formatur  $m = 3$  et  $n = 8$ , ut fiat  $m n + 1 = 25$ , idcirco  $l = \pm 5$ , casus  $l = -5$  dabit hos quatuor numeros:  
 I. 3. II. 8. III. 1 et IV. 120.

Sin autem capiatur  $l = +5$ , numeri erunt  
 I. 3. II. 8. III. 21 et IV. 2080.

**Analysis ad hanc solutionem perducens.**

Cum tres priores numeri  $m$ ,  $n$  et  $m + n + 2$ , facillime inveniantur, ponatur quartus  $= s$ , atque his tribus conditionibus satisfieri debebit:

1.  $m n + 1 = s$ ,
2.  $m s + 1 = s^2$ ,
3.  $(m + n + 2) s + 1 = s^2$ .

Hinc ergo etiam harum trium formularum productum debite

fatis simpliciteris  $m$  et  $n$ , erunt:  $m)(l + n)$ , modo implen-

$$(m - 1)^2 - n - 1)^2$$

$+ 2ln - 1)^2$ .  
 in  $l$  tam positive quam negative accipi possunt:  $\pm 5$ , casus quo circa invenimus

Ceteris,  $+ n + 2$ ,  $l$ , que his tribus

oductum debite

debit esse quadratum; at calculo infinito hoc productum reperitur:

$$x + 2(m + n + l)z + ((m + n + l)^2 - 1)z^2 + m n(m + n + 2)z^3 = 0,$$

cuius radix, ut tria priora membra tollantur, statuarur  $x + (m + n + l)z - \frac{1}{2}z^2$ , cuius quadratum est:

$$x + 2(m + n + l)z + ((m + n + l)^2 - 1)z^2 - (m + n + l)z^3 + \frac{1}{4}z^4$$

unde nascitur haec aequatio

$$m n(m + n + 2)l = -m - n - l + \frac{1}{2}z,$$

sive  $\frac{1}{2}z = m + n + l + m n(m + n + 2)l$ ,  
 sive  $\frac{1}{4}z = (m + n + l)(m + n + l) + l m n$ ,

vel quia  $m n + 1 = l$  habebimus

$$l(m + n + l) + l m n = l(l + l m + l n + m n) = l((l + m)(l + n)),$$

quo circa invenimus

$$z = 4l((l + m)(l + n)).$$

Quaeramus autem hic inunctum productum ex tribus formulis  $m n + 1$ ,  $n z + 1$ ,  $(m + n + 2)z + 1$  reddendum quadratum; tamen quia pro  $z$  quasi praeter expectationem prodit numerus integer, unde tres istae formulae inter se evadent primae, tuto concludere possumus, etiam singulas ternas formulae fieri quadrata, quorum radices adeo iam supra exhibuimus.

III.

**Problema.**

Invenire numeros  $x$  et  $y$ , ut haec formula  
 $(\frac{x^2 + 1}{x})^2 + (\frac{y^2 + 1}{y})^2$  fiat quadratum.

T t 3

Solutio

**Solutio.**

Primo haec conditio fronte adimplebitur, si capiat  $y = \frac{x+1}{x-1}$ , tum enim fiet  $\frac{2x+1}{y} = \frac{2(x+1)}{x-1}$ , unde formula proposita abit in hanc formam:

$$\frac{(x+1)^2}{x^2} + \frac{4(x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)^2}{x^2(x-1)^2}$$

quae formula iam per se est quadratum. Verum quia haec solutio tantum est specialis, quo generatorem obtineamus statimur

$$y = \frac{p x - 1}{x + p}, \text{ unde fiet } \frac{2x+1}{y} = \frac{(p x - 1)(x+1)}{(x+p)(p x - 1)}$$

quare formula nostra enadet

$$\frac{(x+1)^2}{x^2} + \frac{(p x - 1)^2 (x+1)^2}{(x+p)^2 (p x - 1)^2}$$

quae per quadratum  $(x x + 1)^2$  diuisa abit in hanc:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{(p x - 1)^2}{(p x - 1)^2}$$

quae per quadratum  $x x (x + p)^2 (p x - 1)^2$  multiplicata dat  $(x + p)^2 (p x - 1)^2 + x x (p x + 1)^2$  Haec iam formula quadratum effici debet, quae euoluta reducitur ad istam:

$$p p x^4 + 2 p (p - 1) x^3 + 2 (p^2 - p p + 1) x x - 2 p (p - 1) x + p p,$$

cuius radix secundum praecipua cogita si statuat

$$p x x + (p p - 1) x + p,$$

elicietur ille valor:  $x = \frac{p p - 1}{p}$ , ubi ergo numerus  $p$  pro lubitu accipi potest; tum vero pro altero numero  $y$  habebimus vi affinis

$$y = \frac{p x - 1}{x + p} = \frac{p p - 1 + p}{p + p}$$

Hinc ergo si statuat  $p = 2$ , fiet  $x = \frac{1}{2}$  et  $y = \frac{3}{2}$  et

$$\frac{x x + 1}{x^2} = \frac{1 + 1}{\frac{1}{4}} = 4 \text{ et } \frac{2 x + 1}{y} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} + 1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

quorum quadratorum summa fit quadratum radice  $\frac{22}{3}$  et  $\frac{100}{9}$

Pro-

**IV.**

**Problema.**

Invenire duos numeros  $p$  et  $q$ , quorum summa sit quadratum, summa vero quadratorum biquadratum.

**Solutio.**

Hoc Problema, a *Leibnizio* olim propositum, eo magis est notatu dignum, quod minimi numeri sint vehementer magni, siquidem possunt desiderentur. Quamvis autem hoc problema iam passim occurrat solutum, tamen haec solutio attentione non indigna videtur. Ponamus autem  $p + q = B^2$  et  $p p + q q = A^2$ . Iam a duplo posterioris aequationis  $2 p p + 2 q q = 2 A^2$ , subtrahatur quadratum prioris  $p p + 2 p q + q q = B^2$  et residuum erit  $p p - 2 p q + q q = 2 A^2 - B^2$ , ideoque

$$p - q = \sqrt{2 A^2 - B^2},$$

fisque totum negotium huc reducitur, ut formula  $2 A^2 - B^2$  quadratum reddatur. Ut autem ambo numeri  $p$  et  $q$  prodeant possunt necesse est ut sit  $B > A$ . Statuamus igitur

$$\sqrt{2 A^2 - B^2} = y y + 2 x y - x x,$$

quod eveniet si capiatur

$$A^2 = x x + y y \text{ et } B^2 = x x + 2 x y - y y,$$

quas ergo binas formulas denovo ad quadrata redigi oportet. Cum autem posterior sit  $(x + y)^2 - 2 y y$ , pro vitraque conditione faciamus  $y = 2 a b c d$ , tum vero pro prioris  $x = a a b b - c c d d$ , pro posteriore autem  $x + y = a a c c + 2 b b d d$ , sic enim fiet

$$A = a a b b + c c d d \text{ et } B = a a c c - 2 b b d d.$$

Quia

bitur, si capiat  $y = \frac{x+1}{x-1}$ , unde for-

tum quia haec in obtineamus

$$\frac{x x + 1}{x^2} + \frac{(p x - 1)^2}{(p x - 1)^2}$$

in hanc:

multiplicata

iam formula ad istam:

$x x$

aturatur

umerus  $p$  pro numero  $y$  ha-

et

$$\frac{x x + 1}{x^2} = \frac{1 + 1}{\frac{1}{4}} = 4 \text{ et } \frac{2 x + 1}{y} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} + 1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

Pro-

Quia autem habemus

$$x = aabb - ccd \text{ et } y = 2abcd,$$

erit hinc

$$x + y = aabb - ccd + 2abcd = aacc + 2bbdd,$$

unde deducimus

$$aa = \frac{2abd - d(cbb + cc)}{c^2 - b^2},$$

unde radicem extrahendo reperimus

$$a = \frac{bd \pm \sqrt{b^2cd^2 - d^2(cbb + cc)}}{c^2 - b^2},$$

unde per evolutionem fit  $\frac{a}{2} = \frac{bc \pm \sqrt{(cb^2 - c^2)}}{c^2 - b^2}$ , vel per conversionem  $\frac{d}{2} = \frac{bc \pm \sqrt{(cb^2 - c^2)}}{a^2 - b^2}$ . Hoc igitur modo resolutionem formulae  $\sqrt{(2A^2 - B^2)}$  reduximus ad resolutionem alius formulae prorsus similis  $\sqrt{(2b^2 - c^2)}$ , unde si unicus casus confiter, quo talis formula rationalis evadit inde continuo alius casus concludi poterit. Cum igitur hoc primo eveniat sumendo  $b = 1$  et  $c = 1$ , erit  $\frac{a}{2} = \frac{1-c}{1-b}$ , seu ex posteriori forma  $\frac{d}{2} = \frac{1-c}{1-b}$ . Sumatur ergo  $\frac{d}{2} = \frac{1}{2}$ , seu  $c = 3$  et  $d = 2$ , haecque  $x = 5$  et  $y = 12$ , tum vero  $A = 13$  et  $B = 1$ , atque hinc:

$$yy + 2xy - xx = (x + y)^2 - 2xx = 239,$$

quae est radix quadrata formulae 2. 13<sup>2</sup> - 1. Quia autem hic  $B < A$ , hinc nulla solutio idonea sequitur. Hoc autem casu reperto faciamus nunc  $b = 13$  et  $c = 1$ , haecque  $y(2b^2 - c^2) = 239$ , haecque porro nanciscuntur  $\frac{d}{2} = \frac{1-c}{1-b}$ , unde ob signum ambiguum binae solutiones oriuntur: vel  $\frac{a}{2} = -\frac{1}{2}$ , vel  $\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ . Ex priore ergo casu habemus  $a = 3$ ,  $b = 13$ ,  $c = 1$  et  $d = -1$ , unde colligimus  $x = 1521 - 4 = 1517$  et  $y = -156$ , tum vero  $A = 1525$  et  $B = -1343$ . Quia autem huius litterae B tantum quadratum et biquadratum

dratum minor tam p

unde  $c = 1$ ,  $A, B$ , colligit

fuert  $x + \delta = 2, \beta, \gamma$

vbi to  $Q, R$ , tur, II a sola littera quoniam non ini dratum

$$+ 2bbdd,$$

unde  $c = 1$ ,  $A, B$ , colligit

fuert  $x + \delta = 2, \beta, \gamma$

l per conversionem resolutionem sim alius formicus casus de continuo primo evenit, seu ex posteriori, siue  $a = 3$   $A = 13$  et  $= 239$ ,

Quia autem hoc autem  $a = 1$ , haecque  $\frac{d}{2} = \frac{1-c}{1-b}$ , unde ob signum ambiguum binae solutiones oriuntur: vel  $\frac{a}{2} = -\frac{1}{2}$ , vel  $\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ . Ex posteriori ergo casu habemus  $a = 3$ ,  $b = 13$ ,  $c = 1$  et  $d = -1$ , unde colligimus  $x = 1521 - 4 = 1517$  et  $y = -156$ , tum vero  $A = 1525$  et  $B = -1343$ . Quia autem huius litterae B tantum quadratum et biquadratum

dratum occurrit, sumi poterit  $B = 1343$ , qui valor cum minor sit quam  $A = 1525$ , nullam solutionem desideratam praebet.

Consideremus ergo alterum casum, quo  $\frac{d}{2} = \frac{1-c}{1-b}$ , unde nostrae quaternae litterae erunt  $a = 13$ ,  $b = 13$ ,  $c = 1$  et  $d = 84$ , ex quibus si colligantur valores  $x, y$  et  $A, B$ , erit  $B > A$ , hincque enormes illi numeri pro  $p$  et  $q$  colliguntur problematici satisfacientes.

### Problema 4.

Si formula  $x + Ax + Bxz + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$  fuerit productum ex factoribus  $x + \alpha z, x + \beta z, x + \gamma z, x + \delta z, \text{etc.}$  invenire summam potestatum omnium litterarum  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{etc.}$

### Solutio.

Summas istas quas quaerimus ita designemus:

$$P = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$$

$$Q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{etc.}$$

$$R = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \text{etc.}$$

$$S = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \text{etc.}$$

vbi totum negotium huc redit, ut valores litterarum  $P, Q, R, S, \text{etc.}$  per litteras  $A, B, C, D, \text{etc.}$  determinentur. Hic autem ante omnia observari convenit, litteram  $P$  a sola littera  $A$  pendere, quippe cui est aequalis; deinde littera  $Q$  tantum a duabus litteris  $A$  et  $B$  pendere potest, quoniam producta ex ternis litteris  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{etc.}$  non ingrediuntur in compositionem quadratorum. Eodem modo

modo littera R tantum pendebit a tribus litteris A, B, etc. at littera S involuet has tantum quatuor: A, B, C et D; et ita simili modo de sequentibus.

1°. His praenotatis littera P eodem modo reperietur, ac si formula esset tantum  $x + Ax$  et litterae reliquae B, C, D, E, evanescerent; hoc autem casu vnicus factor locum habet, qui fit  $x + ax$ , ita vt fit  $P = a$ . Iam posito hoc factore  $x + ax = 0$ , sine  $x = -\frac{a}{1}$ , ipsa formula evanescere debet, eritque idcirco  $x - \frac{a}{1} = 0$  sine  $a - A = 0$ , vnde fit  $a = P = A$ , vti quidem notissimum est.

2°. Littera autem Q eundem valorem fortietur ac si formula nostra foret  $x + Ax + Bxz$ , reliquis terminis evanescenibus. Haec autem formula duos habet factores, qui sint  $x + ax$  et  $x + bx$ ; hincque erit  $P = a + b$  et  $Q = a^2 + b^2$ . Fiat nunc  $x + ax = 0$ , sine  $x = -\frac{a}{1}$  et hoc casu ipsa nostra formula debet evanescere, eritque:

$$x - \frac{a}{1} + \frac{b}{x} = 0$$

sive  $a^2 - Aa + B = 0$ . Eodem modo ex altero factore  $x + bx$  orientur haec aequatio:  $b^2 - Ab + B = 0$ . Addantur haec duae aequationes et loco  $a^2 + b^2$  scribendo Q et P loco  $a + b$  orientur haec aequatio:  $Q - AP + 2B = 0$ , vnde colligitur  $Q = AP - 2B$ .

3°. Verus porro valor ipsius R deducetur ex formula  $x + Ax + Bxz + Cz^2$ , cuius tres factores sunt  $(x + ax)(x + bx)(x + cz)$

ita vt habeamus

$$R = a + b + c; \quad Q = a^2 + b^2 + c^2 \quad \text{et} \quad R = a^2 + b^2 + c^2.$$

Quemlibet horum factorum redigamus ad nihilum et ex primo fiet  $x = -\frac{a}{1}$  vnde ipsa formula praebebit

$$1 - \frac{a}{1} + \frac{b}{x} - \frac{c}{x^2} = 0,$$

sive  $a^2 - Aa^2 + Ba - C = 0$ . Simili modo bini reliqui factores dabunt

$$b^2 - Ab^2 + Bb - C = 0 \quad \text{et} \quad c^2 - Ac^2 + Bc - C = 0,$$

quae tres aequationes iunctae dabunt

$$R - A Q + B P - 3 C = 0, \quad \text{vnde} \quad R = A Q - B P + 3 C.$$

4°. Pari modo littera S ex hac formula:

$$x + Ax + Bxz + Cxz^2 + Dx^3$$

colligitur, cuius quatuor factores sunt

$$(x + ax)(x + bx)(x + cz)(x + dx)$$

hincque

$$P = a + b + c + d, \quad Q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

$$R = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad \text{et} \quad S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Quod si nunc singuli factores seorsim nihil accipientur et reductio fiat vt ante, orientur inde 4 sequentes aequationes:

$$a^2 - Aa^2 + Ba^2 - Ca + D = 0$$

$$b^2 - Ab^2 + Bb^2 - Cb + D = 0$$

$$c^2 - Ac^2 + Bc^2 - Cd + D = 0$$

$$d^2 - Ad^2 + Bd^2 - Cd + D = 0$$

quae additae hanc formulam suppeditant:

$$S - AR + BQ - CP + 4D = 0, \quad \text{hincque}$$

$$S = AR - BQ + CP - 4D.$$

Hinc iam facile intelligitur, quomodo etiam superiores potestates, scilicet T, U, V, etc. ex praecedentibus formantur

litteris A, B, etc. A, B, C et D;

Que prim

sive facto

quae

collig

hincq

Quod reduct

quae

Hinc restat

$$a^2 + b^2 + c^2. \quad \text{Quem-}$$





istum valorem loco ( $\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}p$ ) substituamus, fiet  $x = \frac{r+2q(f+p)}{(s-1)^2}$ .  
 Hoc autem numero  $x$  invento omnino decem sequentibus conditionibus satisfiet:

- I°.  $ab + 1 = 0$ ; II°.  $ac + 1 = 0$ ;
- III°.  $ad + 1 = 0$ ; IV°.  $bc + 1 = 0$ ;
- V°.  $bd + 1 = 0$ ; VI°.  $cd + 1 = 0$ ;
- VII°.  $ax + 1 = 0$ ; VIII°.  $bx + 1 = 0$ ;
- IX°.  $cx + 1 = 0$ ; X°.  $dx + 1 = 0$ .

**Corollarium.**

Quod autem semper fit  $\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}p = -\frac{r-1}{2}$ , sequenti modo ostendi potest. Ponatur brevitatis gratia  $m+n+l=f$  et  $l(l+m)(l+n) = k$ , ita ut sit  $k = fl + lm + ln$ , et cum sit  $a = m$ ;  $b = n$ ;  $c = f + l$ ; et  $d = 4k$ , habebimus

$$a + b + c = 2f, \text{ ergo } p = 2f + 4k;$$

deinde quia

$$q = (a + b + c)d + (a + b)c + ab,$$

fiet nunc

$$q = 8fk + (m+n)^2 + 2(m+n) + mn,$$

quae expressio ob  $mn = l - 1$  abit in hanc:  $q = 8fk + ff - 1$ ;

$$1 + q + s = 8fk + ff + 4mnk(f+1)$$

quod an aequale sit ipsi  $\frac{1}{2}p$  videamus. At est

$$\frac{1}{2}p = ff + 4fk + 4k,$$

hisque valoribus inter se aequatis habebimus

$$8fk + ff + 4mnk(f+1) = ff + 4fk + 4k, \text{ sive}$$

$$4fk + 4mnk(f+1) = 4kk$$

quae

et  $x = \frac{r+2q(f+p)}{(s-1)^2}$  cum sequentibus

- $= 0$ ;
- $= 0$ ;
- $= 0$ ;
- $1 = 0$ ;
- $= 0$ .

$= -\frac{s-1}{2}$ , sequenti aia  $m+n+l = f + lm + ln$ , et cum habebimus

$k$ ;

$1, b,$

$mn,$

$$q = 8fk + ff - 1;$$

$c$

$1$  est

us

$$+ 4kk, \text{ sive}$$

quae

quae aequatio per  $4k$  divisa dat

$$f + mn(f+1) = k = fl + lm + ln, \text{ sive}$$

$$f + fm = 4ll, \text{ ob } mn + 1 = ll$$

per hypothesein, quae aequatio cum sit identica, illa:  $x + q + s = \frac{1}{2}p$  necessario est vera, unde sequitur quod affirmativus  $\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}p = -\frac{s-1}{2}$ .

**Exemplum I.**

Sumamus  $m = 1$  et  $n = 3$ ; erique  $f = 2$ ; unde quatuor numeri priores erunt  $a = 1$ ;  $b = 3$ ;  $c = 8$ ;  $d = 120$  hinc ergo colligimus:

$$p = 132; q = 1475; r = 4224 \text{ et } s = 2880;$$

ex quibus valoribus deducimus:

$$x = \frac{4 \cdot 4224 + 264 \cdot 2880}{(2112)^2} = 1;$$

quae fractio reducitur ad hanc  $\frac{77440}{77440}$ , atque hinc decem conditiones praelictricae sequenti modo adimplentur:

- 1°.  $ab + 1 = 2^2$ ; 2°.  $ac + 1 = 3^2$ ;
- 3°.  $ad + 1 = 11^2$ ; 4°.  $bc + 1 = 5^2$ ;
- 5°.  $bd + 1 = 19^2$ ; 6°.  $cd + 1 = 31^2$ ;
- 7°.  $ax + 1 = \frac{(2011)^2}{(2879)^2}$ ; 8°.  $bx + 1 = \frac{(3229)^2}{(3879)^2}$ ;
- 9°.  $cx + 1 = \frac{(4109)^2}{(5079)^2}$ ; 10°.  $dx + 1 = \frac{12009^2}{3873^2}$ .

**Exemplum 2.**

Cum numerus  $x$  hinc prodierit tam vehementer magnus, evolvamus sequentem casum in fractionibus, quoad quidem fractiones admittite: nunc sumus concti. Sumatur igitur

igitur  $n = \frac{1}{2}$ ;  $h = \frac{1}{2}$ ; vt sic  $l = \frac{1}{2}$ ; unde quatuor numeri priores erunt

$$a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{2}; c = 6 \text{ et } d = 48;$$

unde porro deducimus:

$$p = 57; q = 451; r = 931 \text{ et } s = 360;$$

ex his ergo deducitur:

$$x = \frac{4 \cdot 931 + 114 \cdot 361}{359} = \frac{44880}{128881}$$

qui numeri multo sunt minores quam precedentes.

VARIAE

ator numeri

$$360;$$

$$\frac{80}{881}$$

edentes.

VARIAE

## VARIAE OBSERVATIONES

### CIRCA ANGVLOS

IN PROGRESSIONE GEOMETRICA PROGREDIENTES.

#### §. 1.

Cum plerumque infignes proprietates, quae adhuc circa angulos, siue arcus, eorumque sinus, cosinus, tangentes, cotangentes, secantes et cosecantes sunt investigatae, ex consideratione arcuum in arithmetica progressionem cretensium sint derivatae: non minus notatu dignae videntur illae proprietates, quas ex consideratione arcuum in geometrica progressionem procedentium deducere licet; imprimis cum earum veritas plerumque multo magis abcondita videatur, quocirca hoc loco plures eiusmodi proprietates evolvere constitui.

§. 2. Primum fontem ad huiusmodi speculationes nobis aperit notissima formula:  $\sin. 2\Phi = 2 \sin. \Phi \cdot \cos. \Phi$  unde, si  $s$  denotet arcum siue angulum quemcumque, erit

$\sin. s = 2 \sin. \frac{1}{2}s \cdot \cos. \frac{1}{2}s$ ; tunc vero simili modo erit

$\sin. \frac{1}{2}s = 2 \sin. \frac{1}{4}s \cdot \cos. \frac{1}{4}s$ , qui valor ibi substitutus praebet

$\sin. s = 4 \sin. \frac{1}{4}s \cdot \cos. \frac{1}{4}s \cdot \cos. \frac{1}{4}s$ . Deinde quia porro est

$\sin. \frac{1}{4}s = 2 \sin. \frac{1}{8}s \cdot \cos. \frac{1}{8}s$ , hoc valore substituto erit

$\sin. s = 8 \sin. \frac{1}{8}s \cdot \cos. \frac{1}{8}s \cdot \cos. \frac{1}{8}s \cdot \cos. \frac{1}{8}s$ . Pari modo progrediendo est

$\sin. s = 16 \sin. \frac{1}{16}s \cdot \cos. \frac{1}{16}s \cdot \cos. \frac{1}{16}s \cdot \cos. \frac{1}{16}s \cdot \cos. \frac{1}{16}s$

Euleri *Opusc. Anal. Tom. I.* X x atque