1783

Nova subsidia pro resolutione formulae *axx* + 1 = *yy*

Leonhard Euler

E554

NOVA SVBSIDIA
PRO RESOLVTIONE FORMVLAE
$axx + 1 = yy$.

§. 1.

Problema hoc, ab auctore *Pellianum* dictum, quo pro dato quocunque numero a, neque quadrato neque negatiuo, numeri quaeruntur x, vt formula $axx + 1$ fiat quadratum, iam saepius pertractaui methodumque tradidi, cuius ope multo facilius resolui potest quam methodo ab ipso *Pellio* excogitata. Interim tamen euolutio eorum casuum, qui pro x numeros praegrandes postulant, cuiusmodi est casus $a = 61$, pro quo fit $x = 226153980$ et $y = 1766319049$, etiam mea methodo succincta, plurimas non parum taediosas operationes exigit; vnde equidem non parum praestitisse mihi videor, dum aliam prorsus viam detexi, hos ipsos praemagnos numeros mira facilitate inueniendi. Ante autem quam eam aperiam, circa indolem numerorum a, quos per minores numeros x et y resoluere licet, notasse iuuabit: quoties a fuerit numerus huius formae: $a = bbcc \pm 2b$, solutionem in promtu esse, si capiatur $x = c$; tum enim fit $y = bcc \pm 1$; tum vero etiam si fuerit $a = bbcc \pm b$ et

et cap
sus fin
metho
autem
A
\E
x et y.
vnde p
4app
igitur
et y =
quo pro dato
negatiuo, nu-
it quadratum,
uius ope mul-
so Pellio ex-
um, qui pro
t casus a = 61,
19049, etiam
taediosas ope-
raestitisse mihi
ipsos praema-
e autem quam
quos per mi-
iuuabit: quo-
c + 2b, so-
tum enim fit
= bbcc ± b
et
dratum,
fiat qua
hic p =
habere
terum h
Hinc au
meri qu

et capiatur $x = 2c$ erit $y = 2bcc \pm 1$; vnde plurimos casus sine vlteriori calculo expedire licebit, qui quidem etiam methodo *Pelliana* satis prompte resolui possunt. Sequentia autem problemata ad casus magis abstrusos deducent.

Problema 1.

§. 2. *Si fuerit $app - 1 = qq$, inuenire numeros x et y, vt fiat $axx + 1 = yy$.*

Solutio.

Ex proposita formula erit $app = qq + 1$, vnde per $4qq$ multiplicando et vnitatem addendo orietur $4appqq + 1 = 4q^4 + 4qq + 1 = (2qq + 1)^2$. Hinc igitur pro solutione problematis consequimur $x = 2pq$ et $y = 2qq + 1$.

Corollarium 1.

§. 3. Quoties ergo euenit, vt fiat $app + 1$ quadratum, facile inueniri potest x, vt haec formula $axx + 1$ fiat quadratum. Ita si fuerit $a = 5$, ob $5 \cdot 1^2 - 1 = 2^2$ erit hic $p = 1$ et $q = 2$, vnde fit $x = 4$ et $y = 9$.

Corollarium 2.

§. 4. Hoc autem tantum pro iis numeris a locum habere potest, qui sunt summae duorum quadratorum; caeterum haec proprietas iam ipsi *Pellio* cognita fuisse videtur. Hinc autem sequens Problema inuersum, quo ipsi isti numeri quaeruntur, euoluam.

Pro-

Problema 2.

§. 5. *Inuestigare numeros a, pro quibus fieri potest* $\ldots - 1 = qq$, *hincque ipsos numeros* x *et* y *assignare, vt* $a x x + 1 = y y$.

Solutio.

Cum debeat esse $a p p = q q + 1$, erit $a = \frac{qq+1}{pp}$, ideoque pro p et q eiusmodi numeri quaeri debent, vt haec fractio praebeat numerum integrum. Quia igitur tam pp quam p debet esse summa duorum quadratorum, statuatur

$$p p = b b + c c \text{ et } q q + 1 = (b b + c c)(f f + g g)$$

vt fiat $a = ff + gg$. Iam vero erit $q = bf + cg$ et $\pm 1 = bg - cf$. Ex datis ergo numeris b et c alteri f et g ita accipi debent, vt fiat $bg - cf = \pm 1$, quod quidem infinitis modis facile fieri potest. Tum igitur erit $q = bf + cg$, et quia numerus p vt datus spectatur, hinc concludimus fore $x = 2 p q$ et $y = 2 q q + 1$, quarum formularum vsus quo clarius appareat, sequentia exempla adiiciemus, dum pro p nonnullos numeros, qui quidem sint summae duorum quadratorum, assumemus.

Exemplum 1.

§. 6. Sit $p = 5$, erit $p p = 25 = b b + c c$, vnde fit $b = 3$ et $c = 4$, tum ergo f et g tales sumi debent, vt fiat $3 g - 4 f = \pm 1$, indeque habebimus $a = ff + gg$ et pro hoc numero $q = 3 f + 4 g$, ac denique $x = 10 q$ et $y = 2 q q + 1$. Huiusmodi autem valores pro litteris f et g in sequenti tabella exhibemus:

ibus fieri potest
y assignare, vt
erit $a = \frac{qq+1}{pp}$,
debent, vt haec
igitur tam pp
orum, statuatur
)$(ff+gg)$
$= bf + cg$ et
b et c alteri f
1, quod qui-
im igitur erit
spectatur, hinc
$+ 1$, quarum
uentia exempla
s, qui quidem
ius.
$+ cc$, vnde fit
umi debent, vt
$= ff + gg$ et
ue $x = 10 q$ et
s pro litteris f
4f−

$$4 f - 3 g = \pm 1.$$

f	1	2	4	5	7	8
g	1	3	5	7	9	11
a	2	13	41	74	130	185
q	7	18	32	43	57	68
x	70	180	320	430	570	680
y	99	649	2049	3699	6499	9249

In hac tabula occurrunt ergo casus alioquin non parum difficiles.

Exemplum 2.

§. 7. Sit $p = 13$, ideoque $p p = 169 = 5^2 + 12^2$, vnde fit $b = 5$ et $c = 12$. Nunc primo habetur ista aequatio: $12 f - 5 g = \pm 1$; tum vero erit $a = ff + gg$, et $q = 5 f + 12 g$, vnde fit $x = 26 q$ et $y = 2 q q + 1$. Casus ergo hinc oriundos in sequenti tabula exhibemus:

$$12 f - 5 g = \pm 1.$$

f	2	3	7	8
g	5	7	17	19
a	29	58	338	425
q	70	99	239	268
x	1820	2574	6214	6968
y	9801	19603	114243	143649

Exemplum 3.

§. 8. Sit $p = 17$, ideoque $p p = 289 = 8^2 + 15^2$, ergo $b = 8$ et $c = 15$, vnde prima aequatio adimplenda erit $15 f - 8 g = \pm 1$, quo facto fiet $a = ff + gg$, et

$q = 8f + 15g$, hincque porro $x = 34q$ et $y = 2qq + 1$. Casus hinc oriundos sequens tabula ostendit:

$$15f - 8g = \pm 1.$$

f	1	7
g	2	13
a	5	218
q	38	251
x	1292	8534
y	2889	126003

Exemplum 4.

§. 9. Sit $p = 25$, hinc $pp = 625 = 7^2 + 24^2$, vnde $b = 7$ et $c = 24$. Iam habetur ista aequatio: $24f - 7g = \pm 1$ ex qua prodit $a = ff + gg$, $q = 7f + 24g$ et $x = 2pq = 50q$ atque $y = 2qq + 1$. Hinc vnicum casum euoluamus, quo $f = 2$ et $g = 7$, hinc oritur $a = 53$, tum vero fit $q = 182$, ergo $x = 9100$ et $y = 66249$.

Problema 3.

§. 10. *Si fuerit $app - 2 = qq$, inuenire numeros x et y, vt fiat $axx + 1 = yy$.*

Solutio.

Cum igitur fit $app = qq + 2$, multiplicemus vtrinque per qq, et adiecta vnitate erit

$$appqq + 1 = q^4 + 2qq + 1$$

vnde manifesto colligitur $x = pq$ et $y = qq + 1$.

Pro-

$y = 2qq + 1$.
ap fiat
$a =$ ben tem hab acc por $= 7^2 + 24^2$, tio: $24f - 7g$ $f + 24g$ et : vnicum ca- vt tur $a = 53$, $=$ $= 66249$. et mo vel 19. seq *inire numeros* multiplicemus de $=$ hin qu $+ 1$. Pro-

Problema 4.

§. 11. *Inuestigare numeros a, pro quibus fieri potest $app - 2 = qq$, hincque ipsos numeros x et y assignare, vt fiat $axx + 1 = yy$.*

Solutio.

Cum debeat esse $app = qq + 2$, erit $a = \frac{qq+2}{pp}$, sicque pro p et q eiusmodi numeri quaeri debent, vt illa fractio praebeat numerum integrum. Quia autem formula $qq + 2$ alios diuisores non admittit, nisi qui habeant formam $bb + 2cc$, etiam pro p alios numeros accipere non licet, nisi qui sint eiusdem formae, quocirca ponamus statim $pp = bb + 2cc$, siatque

$$qq + 2 = (bb + 2cc)(ff + 2gg)$$

vt obtineatur $a = ff + 2gg$, tum vero esse oportet $cf - bg = \pm 1$, hincque orietur $q = bf + 2cg$, ac tandem $x = pq$ et $y = qq + 1$. At forma $bb + 2cc$ alios diuisores primos non admittit, nisi qui sint vel huius formae: $8n + 1$, vel huius: $8n + 3$, qui ergo ita progrediuntur: 3, 11, 17, 19. 41, 43, etc. et qui ex his componuntur, quamobrem sequentia exempla percurramus.

Exemplum 1.

§. 12. Sit $p = 3$, hinc $pp = 9 = 1^2 + 2.2^2$, vnde fit $b = 1$ et $c = 2$; aequatio ergo resoluenda est $2f - g = \pm 1$, quo facto erit $a = ff + 2gg$; $q = f + 4g$ atque hinc $x = 3q$ et $y = qq + 1$. Casus hinc oriundos sequens tabula complectitur.

 $2f-$

$$2f - g = \pm 1.$$

f	1	1	2	2	3	3	4
g	1	3	3	5	5	7	7
a	3	19	22	54	59	107	114
q	5	13	14	22	23	31	32
x	15	39	42	66	69	93	96
y	26	170	197	485	530	962	1025

Exemplum 2.

§. 13. Sit $p = 9$, erit $pp = 81 = 7^2 + 2.4^2$, ideoque $b = 7$ et $c = 4$; hinc aequatio nostra $4f - 7g = \pm 1$; tum vero erit $a = ff + 2gg$ et $q = 7f + 8g$, hincque porrò $x = 9q$ et $y = qq + 1$. Ecce ergo casus qui hinc oriuntur:

$$4f - 7g = \pm 1.$$

f	2	5	9	12
g	1	3	5	7
a	6	43	131	242
q	22	59	103	140
x	198	531	927	1260
y	485	3482	10610	19601

Exemplum 3.

§. 14. Sit $p = 11$, erit $pp = 121 = 7^2 + 2.6^2$, ideoque $b = 7$ et $c = 6$, ergo aequatio nostra $6f - 7g = \pm 1$, tum vero $a = ff + 2gg$ et $q = 7f + 12g$, vnde $x = 11q$ et $y = qq + 1$. Casus ergo erunt:

$6f-$

3 | 4
7 | 7
07 | 114
31 | 32
93 | 96
62 | 1025
fice 1 = 7² + 2.4², 4f − 7g = ± 1;
tun + 8g, hincque
et o casus qui hinc
2
7
42
40
60
ide 601
hin
vn 1 = 7² + 2.6²,
ra 6f − 7g = ± 1,
2g, vnde x = 11q
6f−

$$6f - 7g = \pm 1.$$

f	1	6	8
g	1	5	7
a	3	86	162
q	19	102	140
x	209	1122	1540
y	362	10405	19601

Exemplum 4.

§. 15. Sit $p = 17$, erit $pp = 289 = 1^2 + 2.12^2$, sicque $b = 1$ et $c = 12$, vnde aequatio $12f - g = \pm 1$, tum vero habebimus $a = ff + 2gg$, $q = f + 24g$, $x = 17q$ et $y = qq + 1$. vnde duos casus notasse sufficiet.

$f = 1$, $g = 11$, $a = 243$, $q = 265$, $x = 4505$ et $y = 265^2 + 1$.

$f = 1$, $g = 13$, $a = 339$, $q = 313$, $x = 17 \cdot 313$ et $y = 313^2 + 1$.

Exemplum 5.

§. 16. Sit $p = 19$, erit $pp = 361 = 17^2 + 2.6^2$, ideoque $b = 17$ et $c = 6$, et aequatio erit $6f - 17g = \pm 1$, hinc fiet

$a = ff + 2gg$; $q = 17f + 12g$; $x = 19q$ et $y = qq + 1$,

vnde sequentes casus nascuntur:

Si $f = 3$ et $g = 1$, erit $a = 11$, $q = 63$, $x = 1197$ et $y = 3969$.

Si $f = 14$ et $g = 5$, erit $a = 246$, $q = 298$, $x = 5662$, $y = 298^2 + 1$.

Exem-

Problema 5.

§. 17. *Si fuerit $app+2=qq$, inuenire numeros x et y, vt fiat $axx+1=yy$.*

Solutio.

Cum sit $app=qq-2$, manifestum est fore $x=pq$ et $y=qq-1$, vnde ad sequens problema progredimur.

Problema 6.

§. 18. *Inuestigare numeros a, pro quibus fieri possit $app+2=qq$, hincque numeros x et y assignare, vt fiat $axx+1=yy$.*

Solutio.

Ex aequatione $app+2=qq$ deducitur $a=\frac{qq-2}{pp}$, ita vt pp debeat esse diuisor formulae $qq-2$, id quod euenire nequit, nisi sit pp ideoque et p numerus formae $bb-2cc$. Hanc ob rem statuamus $pp=bb-2cc$ et $qq-2=(bb-2cc)(ff-2gg)$, quod vt fieri possit debet esse $cf-bg=\pm 1$; tum vero erit $q=bf-2cg$ et $a=ff-2gg$, atque habebimus $x=pq$ et $y=qq-1$. Nunc vero obseruari conuenit, pro p alios numeros primos accipi non posse, nisi in alterutra harum formularum: $8n+1$ et $8n-1$ contentos. Quod si iam sumeretur $p=1$, foret $a=qq-2$, qui est casus per se notissimus, fieretque $x=q$ et $y=qq-1$, quare ad sequentia exempla progredimur.

Exem-

Exemplum 1.

§. 19. Sit $p=7$, erit $pp=49=9^2-2.4^2$, hinc $b=9$ et $c=4$, ergo aequatio nostra $4f-9g=\pm 1$; tum vero erit $a=ff-2gg$ et $q=9f-8g$, $x=7q$ et $y=qq-1$, vnde casus sequentes euoluamus.

1°. $f=2$, $g=1$, $a=2$, $q=10$, $x=70$ et $y=99$,

2°. $f=7$, $g=3$, $a=31$, $q=39$, $x=273$ et $y=1520$,

3°. $f=11$, $g=5$, $a=71$, $q=59$, $x=413$ et $y=3480$,

4°. $f=16$, $g=7$, $a=158$, $q=88$, $x=616$ et $y=7744$.

Hic autem notari debet, omnes numeros formae $bb-2cc$ infinitis modis in eadem forma contineri posse. Ita manente $p=7$ erit quoque $pp=49=11^2-2.6^2$, ita vt nunc sit $b=11$ et $c=6$, sicque nostra aequatio erit $6f-11g=\pm 1$, tum vero vt ante $a=ff-2gg$, at vero $q=11f-12g$ et $x=7q$ atque $y=qq-1$. Hinc sequentes casus euoluamus:

1°. $f=2$, $g=1$, $a=2$, $q=10$, $x=70$ et $y=99$,

2°. $f=9$, $g=5$, $a=31$, $q=39$, $x=273$ et $y=1520$,

hinc autem manifestum est, eosdem casus esse prodituros quos iam ante inuenimus.

Exemplum 2.

§. 20. Sit $p=17$, erit $pp=289=19^2-2.6^2$, vnde nostra aequatio fit $6f-19g=\pm 1$, tum vero erit $a=ff-2gg$, $q=19f-12g$ et $x=17q$ et $y=qq-1$.

1°. $f=3$, $g=1$, $a=7$, $q=45$, $x=765$ et $y=2024$,

2°. $f=16$, $g=5$, $a=206$, $q=244$, $x=4148$ et $y=244^2-1$.

Exem-

Exemplum 3.

§. 21. Sit $p = 23$, erit $pp = 529 = 27^2 - 2 \cdot 10^2$, ideoque $b = 27$ et $c = 10$. Aequatio ergo nostra erit $10f - 27g = \pm 1$, hinque $a = ff - 2gg$. $q = 27f - 20g$, $x = 23q$ et $y = qq - 1$. Hinc si $f = 8$, erit $g = 3$, $a = 46$, $q = 156$, $x = 3588$ et $y = 156^2 - 1$.

Problema. 7.

§. 22. *Si fuerit $app + 4 = qq$, inuenire numeros x et y vt fiat $axx + 1 = yy$.*

Solutio.

Quia numerus 4 est quadratum, erit in forma desiderata $\frac{app}{4} + 1 = \frac{qq}{4}$, ita vt iam esset $x = \frac{p}{2}$ et $y = \frac{q}{2}$ si quidem essent p et q numeri pares, qui ergo casus foret maxime obuius. At si p et q sint numeri impares, notandum est, ex hoc casu concludi posse secundum praecepta cognita hunc secundum casum: $x = \frac{pq}{2}$ et $y = \frac{qq}{2} - 1$, qui numeri autem etiamnum sunt fracti. Hinc autem tertius casus deducatur, dum valores secundi casus per q multiplicantur et primi subtrahuntur, hinc autem prodibit

$x = p\left(\frac{qq-1}{2}\right)$ et $y = q\left(\frac{qq-3}{2}\right)$,

qui ambo valores ob q numerum imparem erunt integri, quocirca hanc sumus adepti solutionem problematis, vt sit $x = p\left(\frac{qq-1}{2}\right)$ et $y = q\left(\frac{qq-3}{2}\right)$.

Co-

$= 27^2 - 2 \cdot 10^2$, eritq ...tio ergo no- dem $= ff - 2gg$. tes ($q - 1$. Hinc ...5, $x = 3588$
..., inuenire nu-
app ... erit in forma fiat ... $= \frac{p}{2}$ et $y = \frac{q}{2}$ ...ui ergo casus ...meri impares, ...lum praecepta pro $= \frac{qq}{2} - 1$, qui doqu autem tertius drato er q multipli- ponei rodibit, $= (b$ ... erunt integri, hoc ...oblematis, vt quo ergo
Co-
Ex

Corollarium.

§. 24. Si ergo fuerit $a = bb - 4$, capi poterit $p = 1$, eritque $q = b$, hinque $x = \frac{bb-1}{2}$ et $y = b\left(\frac{bb-3}{2}\right)$, vbi quidem pro b numeros impares accipi oportet, vnde sequentes casus euoluisse iuuabit:

1°. Sit $b = 3$, erit $a = 5$ et $x = 4$ atque $y = 9$.
2°. Sit $b = 5$, erit $a = 21$, hinc $x = 12$ atque $y = 55$,
3°. Sit $b = 7$, erit $a = 45$, hinc $x = 24$ atque $y = 161$,
4°. Sit $b = 9$, erit $a = 77$ et $x = 40$ atque $y = 351$,
5°. Sit $b = 11$, erit $a = 117$ et $x = 60$ atque $y = 649$.

Problema 8.

§. 25. *Inuestigare numeros a, pro quibus fieri possit $app + 4 = qq$, hincque numeros x et y assignare, ut fiat $axx + 1 = yy$.*

Solutio.

Cum hinc sit $app = qq - 4$, fiet $a = \frac{qq-4}{pp}$, vbi pro p omnes numeros impares accipere licet, quandoquidem numerator $qq - 4$ est differentia duorum quadratorum. Semper igitur statui poterit $pp = bb - cc$, ponendo $b = \frac{pp+1}{2}$ et $c = \frac{pp-1}{2}$; tum vero fiat $qq - 4 = (bb - cc)(ff - gg)$, vt hinc oriatur $a = ff - gg$; ad hoc vero requiritur vt sit $cf - bg = \pm 2$ et $q = bf - cg$, quo facto reperietur $x = p\left(\frac{qq-1}{2}\right)$ et $y = q\left(\frac{qq-3}{2}\right)$. Hinc ergo sequentia exempla euoluamus.

Exemplum 1.

§. 26. Sumatur $p = 3$, fietque $b = 5$ et $c = 4g$, hinc $4f - 5g = \pm 2$, porro $a = ff - gg$, $q = 5f - 4$, $x = 3\left(\frac{qq-1}{2}\right)$ et $y = q\left(\frac{qq-3}{2}\right)$; vnde casus sequentes consideremus:

1°. $f = 2$, $g = 2$, hinc $a = 0$, vnde ergo nihil sequitur.

2°. $f = 3$, $g = 2$, hinc $a = 5$, $q = 7$, $x = 72$ et $y = 161$.

3°. $f = 7$, $g = 6$, hinc $a = 13$, $q = 11$, $x = 180$ et $y = 649$.

4°. $f = 8$, $g = 6$, hinc $a = 28$, $q = 16$, $x = 3 \cdot \frac{255}{2}$, qui casus inutilis.

5°. $f = 12$, $g = 10$, vnde pariter nihil colligitur, necesse enim est vt numerus f sit impar.

6°. $f = 13$ et $g = 10$, vnde $a = 69$, $q = 25$, ergo $x = 936$ et $y = 7775$.

7°. $f = 17$ et $g = 14$, vnde $a = 93$, $q = 29$, ergo $x = 1260$ et $y = 12151$.

8°. $f = 23$ et $g = 18$, vnde $a = 205$, $q = 43$, ergo $x = 2772$ et $y = 39689$.

Hic quoque valor ipsius q in genere assignari potest ex unico valore cognito $q = 2$. Ponatur enim $q = 9n \pm 2$, eritque $qq - 4 = 81nn \pm 36n$, vnde fit $a = 9nn \pm 4n$, tum vero erit $x = 3\left(\frac{81nn \pm 36n + 3}{2}\right)$ et

$$y = 9n \pm 2\left(\frac{81nn \pm 36n + 1}{2}\right)$$

vbi pro n quemlibet numerum imparem assumere licet.

Exem-

Exemplum.

§. 26. Sit $p = 5$, eritque $b = 13$ et $c = 12$, ideoque $12f - 13g = \pm 2$, vnde fit $a = ff - gg$ et $q = 13f - 12g$, $x = 5\left(\frac{qq-1}{2}\right)$ atque $y = q\left(\frac{qq-3}{2}\right)$, vbi iterum f debet esse numerus impar. Sit

1°. $f = 11$ et $g = 10$, hinc $a = 21$, $q = 23$, $x = 1320$ et $y = 6049$.

2°. $f = 15$ et $g = 14$, hinc $a = 29$, $q = 27$, $x = 1820$ et $y = 9801$.

Statim autem sine litterarum f et g ope statui poterit $q = 25n \pm 2$, eritque $a = 25nn \pm 4n$; tum vero vt ante erit $x = 5\left(\frac{qq-1}{2}\right)$ et $y = \left(\frac{qq-3}{2}\right)$; atque hic iam pro n quosvis numeros impares assumere licet, quorum singuli ob signum ambiguum binas dabunt solutiones

1°. Si $n = 1$ erit $a = 25 \pm 4$ et $q = 25 \pm 2$.

2°. Si $n = 3$ erit $a = 225 \pm 12$ et $q = 75 \pm 2$.

3°. Si $n = 5$ erit $a = 625 \pm 20$ et $q = 125 \pm 2$.

4°. Si $n = 7$ erit $a = 1225 \pm 28$ et $q = 175 \pm 2$.

Euolutio generalis.

§. 27. Si p fuerit numerus impar quicunque, sumatur $q = npp \pm 2$, eritque $a = \frac{qq-4}{pp} = nnpp \pm 4n$, tum vero habebitur $x = p\left(\frac{qq-1}{2}\right)$, $y = q\left(\frac{qq-3}{2}\right)$, quae unica solutio locum habet quando p erit numerus primus; verum si p inuoluat factores inter se primos, aliae insu-

per

per solutiones locum habere possunt. Sit enim $p = rs$, fierique poterit $pp = rrss = bb - cc$, sumendo $b = \frac{rr+ss}{2}$ et $c = \frac{rr-ss}{2}$; tum quaerantur numeri f et g, vt fiat $cf - bg = \pm 2$ et statuatur $bf - cg = k$, eritque $kk - 4 = (bb - cc)(ff - gg) = rrss(ff - gg)$, hinque $\frac{kk-4}{pp} = ff - gg$. Iam sumatur $q = npp \pm k$, ac reperietur $a = \frac{qq-4}{pp} = nnpp \pm 2bk + ff - gg$, atque hic iterum erit $x = p\left(\frac{qq-1}{2}\right)$ et $y = q\left(\frac{qq-3}{2}\right)$.

Veluti si fuerit $p = 15 = 5 \cdot 3$, siue $r = 5$ et $s = 3$, priori modo statim habetur $q = 225n \pm 2$, hinque $a = 225nn \pm 4n$, ex posteriore vero solutione habemus $d = 17$ et $c = 8$, nuncque fiet $8f - 17g = \pm 2$, sumendo $f = 4$ et $g = 2$, ideoque $ff - gg = 12$ et $k = 52$. Si ergo capiatur $q = 225n \pm 52$, prodibit $a = 225nn \pm 104n + 12$, tum vero pro vtroque casu erit $x = 15\left(\frac{qq-1}{2}\right)$ et $y = q\left(\frac{qq-3}{2}\right)$.

Problema 9.

§. 28. *Si fuerit $arr - 4 = ss$, inuenire numeros x et y, vt fiat $axx + 1 = yy$.*

Solutio.

Cum sit $arr = ss + 4$, multiplicando per ss et 4 addendo prodit $rrss + 4 = s^4 + 4ss + 4 = (ss+2)^2$, sicque ad casum praecedentem reuoluimur, quo erat $app + 4 = qq$: erit scilicet nunc $p = rs$ et $q = ss + 2$, ex quibus valoribus colligimus vt ante

$$x = p\left(\frac{qq-1}{2}\right) \text{ et } y = q\left(\frac{qq-3}{2}\right).$$

Co-

enim $p = rs$,
ndo $b = \frac{rr+ss}{2}$
t g, vt fiat
ritque $kk - 4$
hinque $\frac{kk-4}{pp}$
ac reperietur
ne hic iterum
$= 5$ et $s = 3$,
2, hinque
lutione habe-
$17g = \pm 2$,
$k = 52$. Si
$\pm 104n + 12$,
$y = q\left(\frac{qq-3}{2}\right)$.
re numeros x
ando per ss
$4 = (ss+2)^2$,
ir, quo erat
$q = ss + 2$,
Co-

Corollarium

§. 29. Hic ante omnia occurrit casus quo $a = ee + 4$, denotante e numerum imparem quemcunque, pro quo erit $r = 1$ et $s = e$. Hinc igitur fiet $p = e$ et $q = ee + 2$, hincque porro $x = p\left(\frac{qq-1}{2}\right)$ et $y = q\left(\frac{qq-3}{2}\right)$, vnde sequentes casus euoluamus:

Sit 1°. $e = 1$, erit $a = 5$, $p = 1$, $q = 3$, ideoque $x = 4$ et $y = 9$,

2°. $e = 3$, erit $a = 13$, $p = 3$, $q = 11$, vnde $x = 180$ et $y = 649$,

3°. $e = 5$, erit $a = 29$, $p = 5$, $q = 27$, ergo $x = 1820$ et $y = 9801$,

4°. $e = 7$, erit $a = 53$, $p = 7$, $q = 51$, ergo $x = 9100$ et $y = 66249$,

5°. $e = 9$, erit $a = 85$, $p = 9$, $q = 83$, ergo $x = 30996$ et $y = 285769$.

Problema 10.

§. 30. *Inuestigare reliquos numeros, vt fieri possit $arr - 4 = ss$, indeque assignare numeros x et y, vt fiat $axx + 1 = yy$.*

Solutio.

Cum sit $arr = ss + 4$, erit $a = \frac{ss+4}{rr}$; vnde patet, pro r alios numeros impares assumi non posse

 nisi

nisi qui sint summae duorum quadratorum. Sit igitur $rr = bb + cc$ et ponatur $ss + 4 = (bb + cc)(ff + gg)$, quem in finem esse oportet $cf - bg = \pm 2$, tum vero erit $s = bf + cg$; ex cognitis autem numeris r et s erit $p = rs$ et $q = ss + 2$, vnde porro concluditur $x = p\left(\frac{qq-1}{2}\right)$ et $y = q\left(\frac{qq-3}{2}\right)$; pro r ergo alios numeros accipere non licet, nisi vel 5, vel 13, vel 17, vel 25, vel 29, etc. quos casus in sequentibus exemplis euoluemus.

Exemplum 1.

§. 31. Sit $r = 5$, ideoque $rr = 25 = 4^2 + 3^2$, vnde $b = 4$ et $c = 3$. Hinc esse debet $3f - 4g = \pm 2$, tum vero fit $a = ff + gg$ et $s = 4f + 3g$, vnde solutio conficitur vt ante.

1°. Sit $f = 2$ et $g = 1$, erit $a = 5$, $s = 11$, hincque porro $p = 55$ et $q = 123$.

Vnde pro x et y ingentes prodeunt numeri problemati satisfacientes, sed non minimi.

2°. Si $f = 2$ et $g = 2$, erit $a = 8$; casus autem, quibus a numerus impar, hic excludimus.

3°. Sit $f = 6$ et $g = 5$, erit $a = 61$, tum vero $s = 39$, hincque porro $p = 195$ et $q = 1523$; atque hinc concluduntur valores $x = 226153980$ et $y = 1766319049$. Ex casu autem primo, quo erat $s = 11$ et $\frac{11^2+4}{25} = 5$, statim poni potest $s = 25n \pm 11$, vnde deducitur $a = 25nn \pm 22n + 5$; tum vero erit $p = 5(25n \pm 11)$ et $q = (25n \pm 11)^2 + 2$, vnde denique deducitur $x = p\left(\frac{qq-1}{2}\right)$ et $y = q\left(\frac{qq-3}{2}\right)$. Hinc autem suffecerit valores numeri a deriuasse vbi quidem pro p numeros pares sumi oportet, ne a prodeat numerus par.

1°. Si $n = 0$ fit $a = 5$,

2°. Si $n = 2$ fit vel $a = 61$ vel $= 149$,

3°. Si $n = 4$ fit vel $a = 317$ vel $a = 493$,

pro his ergo casibus numeri x et y in immensum excrescent.

Exemplum 2.

§. 32. Sit nunc $r = 13$, erit $rr = 169 = 12^2 + 5^2$, vnde $b = 12$ et $c = 5$, ita vt fieri debeat $5f - 12g \pm 2$, tum vero erit $a = ff + gg$ et $s = 12f + 5g$. Casus autem simplicissimus est $f = 2$ et $g = 1$, qui praebet $a = 5$ et $s = 29$, ex quo statim generaliter statui potest $s = 169n \pm 29$, vnde deducitur $a = 169nn \pm 58n + 5$, pro quo numero fiet $p = 13(179n \pm 29)$ et $q(169n \pm 29)^2 + 2$, vnde denique colligitur $x = p\left(\frac{qq-1}{2}\right)$ et $y = q\left(\frac{qq-3}{2}\right)$. At pro n numeros pares accipi oportet, vt quidem fiat a numerus impar.

1°. Si $n = 0$ fit $a = 5$ et $s = 29$, hincque $p = 13.29$, qui autem casus per se est notus.

2°. Sit $n = 2$, erit vel $a = 565$ vel $a = 797$.

Exemplum 3.

§. 33. Sit $r = 17$ et $rr = 289 = 15^2 + 8^2$, vnde $b = 15$ et $c = 8$, fierique debet $8f - 15g = \pm 2$, hincque $a = ff + gg$ et $s = 15f + 8g$. Pro casu simplicissimo sumamus $f = 4$ et $g = 2$, vnde fit $a = 20$ et $s = 76$; pro solutione ergo generali ponamus $s = 289n \pm 76$, fietque

$$a = 289nn \pm 152n + 20,$$

vbi pro n numeros impares capi conuenit.

1°.

1°. Si $n = 1$ fiet $a = 309 \pm 152$ et $s = 289 \pm 76$, qui valores iam nimis funt magni quam quos operi pretium fit euoluiffe.

Exemplum 4.

§. 34 Sit $r = 25$ et $rr = 625 = 24^2 + 7^2$, ideoque $b = 24$ et $c = 7$. Iam effe debet $7f - 24g = \pm 2$, hincque erit $a = ff + gg$ et $s = 24f + 7g$. Cafus fimpliciffimus dat $f = 10$ et $g = 3$, hinque $a = 109$ et $s = 261$; vnde fi ftatuatur $s = 625n \pm 261$, reperietur generatim $a = 625nn \pm 522n + 109$. Euoluamus autem numerice cafum $a = 109$, qui methodo vulgari moleftiffimos calculos requirit; cum ergo fit $s = 261$, ob $r = 25$ erit $p = 6525$ et $q = 261^2 + 2 = 68123$, ex quibus defiderati numeri maximi deducuntur,

$x = 6525\left(\frac{68123^2 - 1}{2}\right) = 15140424455100$

$y = 68123\left(\frac{68123^2 - 3}{2}\right) = 158070671986249.$

Exemplum 5.

§. 35. Sit $r = 29$ et $rr = 841 = 21^2 + 20^2$, ideoque $b = 21$ et $c = 20$, fierique debet $20f - 21g = \pm 2$, hincerit $a = ff + gg$ et $s = 21f + 20g$. Cafu autem fimpliciffimo erit $f = 2$ et $g = 2$, hinc $a = 8$ et $s = 82$; ftatuatur ergo $s = 841n \pm 82$, fietque $a = 841nn \pm 164n + 8$, vnde autem numeri vehementer magni nafcuntur.

Ex his igitur abunde perfpicitur, quemadmodum, ope horum fubfidiorum cafus problematis Pelliani alioquin difficillimi fatis expedite refolui queant.

THEO-

M
T
Si n . 3. . . illum
Quar huius Acade: haud i nem r tem q quiden meros, quam dua. S
per n numeri numeri quens Eul
89 ± 76, qui eri pretium fit
f² + 7², ideo- g = ± 2, hinc- Cafus fimplicis- 09 et s = 261; etur generatim autem nume- moleftiffimos ob r = 25 erit ibus defiderati
+ 20², ideoque = ± 2, hinc- autem fimpli- : 82; ftatuatur ± 164 n + 8, cuntur. admodum, ope liani alioquin
THEO-

MISCELLANEA ANALYTICA.

I.

Theorema a Cl. *Waring* fine demonftratione propofitum.

Si n fuerit numerus primus, hoc productum continuum: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)$, vnitate auctum, femper diuidi poteft per illum numerum primum n.

Demonftratio.

Quanquam illuftris Geometra *de la Grange* iam geminam huius theorematis demonftrationem in nouis Actis Academiae regiae fcientiarum borufficae dedit: Geometris haud ingratum fore arbitror, fi etiam meam demonftrationem more mihi familiari communicauero. Propofito autem quocunque numero primo n, alio loco oftendi, quod quidem quilibet facile largietur, femper dari huiusmodi numeros, quorum fingulae poteftates, exponentem minorem quam $n - 1$ habentes, per n diuifae, diuerfa praebeant refidua. Sit igitur a huiusmodi numerus, cuius fingulae poteftates

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots\ldots\ a^{n-2}$$

per n diuifae totidem diuerfa refidua producant, quorum numerus cum fit $n - 1$, in his refiduis omnes occurrent numeri $1, 2, 3, 4, \ldots\ldots n-1$, quibus exhauftis fequens poteftas a^{n-1} iterum per n diuifa relinquet refiduum $+1$,