1783

Proposita quacunque protressione ab unitate incipiente, quaeritur quot eius terminos a dminimum addi oporteat, ut omnes numeri producantur

Leonhard Euler

E - 558

Propoſita quacunque progreſſione ab vnitate incipiente, quaeritur, quot eius terminos ad minimum addi oporteat, vt omnes numeri producantur?

Huius generis eſt notiſſimum illud theorema *Fermatii* ſiue *Bachetti*, quod omnis numerus ſit ſumma vel quatuor vel pauciorum quadratorum, cuius demonſtrationem poſt *Fermatianam*, quae intercidit, Cel. *La Grange* in medium attulit, ego vero etiam non ita pridem ex aliis principiis deductam cum Academia communicaui. Memoratus autem *Fermatius* praeterea affirmauerat, ſe quoque demonſtraſſe, omnes numeros eſſe ſummas vel trium pauciorumue numerorum trigonalium, tum vero etiam quinque pauciorumue numerorum pentagonalium, item ſex pauciorumue ſexagonalium, et ita porro. Horum autem theorematum nullum adhuc ſolide demonſtratum comparauit.

Nuper vero etiam Ill. *Béguelin*, Berolinenſis Academiae ſocius, huiusmodi theoremata adhuc multo latius ad omnes numeros pyramidales ſeu figuratas extendit, qui quidem ex ſummatione numerorum polygonalium continue repetita naſcuntur. Ad haec explicanda denotet nobis Θ numerum terminorum ad minimum addendorum, vt omnes plane numeri producantur, atque Vir ingenioſiſſimus pro ſeriebus ſequentibus valores litterae Θ ſubnexos dedit:

1, 1+a, 1, 2+, 1, 3+, 1, 4+, 1, 5+, 1, 6+ nitate inci- minimum ducantur? vnde in g 1; Fermatii ſiue quatuor vel m poſt Fer- ige in me- ex aliis prin- Memoratus quoque de- trium pau- etiam quin- tem ſex pau- autem theo- omparauit. numerum plectitur o ſeries ſum vtique max dolendum, monſtratio tranſennam tis agnoſce inueſtigatio ritatem ta ſcere cogo triginta et reperitur. ineníis Aca- multo latius xtendit, qui um continue tet nobis Θ m, vt omnes ſiſſimus pro s dedit: Has denti fine nunc earun vix adhuc ſtrationes d Euleri O; 1, 1+a,

	Θ
$1, 1+a, 1+2a, 1+3a, 1+4a$, etc.	a.
$1, 2+a, 3+3a, 4+6a, 5+10a$, etc.	$a+2$.
$1, 3+a, 6+4a, 10+10a, 15+20a$, etc.	$a+4$.
$1, 4+a, 10+5a, 20+15a, 35+35a$, etc.	$a+6$.
$1, 5+a, 15+6a, 35+21a, 70+56a$, etc.	$a+8$.
$1, 6+a, 21+7a, 56+28a, 126+84a$, etc.	$a+10$.
etc.	

vnde in genere concluditur, fore pro hac ſerie generali:

$$1;\ \frac{n+a}{1};\ \frac{(n+1)(n+2a)}{1\cdot 2};\ \frac{(n+1)(n+2)(n+3a)}{1\cdot 2\cdot 3};\ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4a)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};\ \text{etc.}$$

numerum $\Theta = a + 2n - 2$, quae forma non ſolum complectitur omnes numeros polygonales, ſed etiam omnes ſeries ſummatrices ex illis natas; ex quo hoc theorema vtique maximam attentionem meretur. Tantum autem eſt dolendum, quod ipſe inuentor fateatur, ſe ſolidam eius demonſtrationem neutiquam poſſidere, ſed tantum, quaſi per tranſennam, eius veritatem ope principii rationis ſufficientis agnoſcere. Etſi autem huic principio in huiusmodi inueſtigationibus nihil plane tribuendum eſſe arbitror, veritatem tamen illius propoſitionis ob alias rationes agnoſcere cogor; quin etiam hoc ipſum theorema iam ante triginta et plures annos in aduerſariis meis conſignatum reperitur.

Has igitur inſignes numerorum proprietates perpendenti ſine dubio maxime dolendum videbitur, nos etiamnunc earum demonſtratione indigere, idque eo magis, quod vix adhuc prima principia ſint ſtabilita, ex quibus demonſtrationes deſideratae peti queant; quamobrem conſtitui hic ista principia adcuratius inuestigare, vnde fortasse, quicquid in hoc genere etiamnum desideratur, tandem haurire licebit. Hunc in finem consideremus progressionem quamcunque ab vnitate incipientem, quae sit:

$$1, A, B, C, D, E, F, \text{etc.}$$

de qua, quot eius terminis ad minimum sibi inuicem addendis opus sit, vt omnes plane numeri producantur, quaeritur; atque hunc ipsum numerum quaesitum littera Θ indicemus; quo quidem non solum termini diuersi, sed et iidem aliquoties repetiti contineri sunt intelligendi. Hanc igitur inuestigationem sequenti modo ex primis principiis deducere conabor.

§. 1. Consideremus igitur initio solum primum seriei terminum, qui est $= 1$, ac manifestum est, hinc vsque ad secundum terminum A omnes numeros produci non posse, nisi statuatur $\Theta = A - 1$, siquidem numerus $A - 1$ ex totidem vnitatibus constans toties primum terminum 1 repetendum postulat; vnde quaecunque fuerit nostra series, iam clare perspicimus, numerum quaesitum Θ certe minorem esse non posse quam $A - 1$.

§. 2. Nunc praeter primum terminum 1 admittamus quoque secundum A, ad quem vsque modo vidimus statui debere $\Theta = A - 1$. Hinc autem vlterius progrediendo numerus proxime sequens ex totidem terminis compositus erit $2A - 2$, quippe qui constat ex secundo termino A semel sumto et primo termino 1 tot vicibus sumto quot formula $A - 2$ indicat, quandoquidem hic numerus ita repraesentari potest: $A + 1(A - 2)$, ita vt multitudo terminorum iunctorum sit $1 + A - 2 = A - 1$. Numerus vero immediate sequens $2A - 1$ non amplius per tot terminos se produci patitur, quia est $2A - 1 = A(1) + 1.(A - 1)$, vnde ad eum producendum requiruntur termini $1 + A - 1 = A$; quocirca hucusque progressi habemus $\Theta = A$. Nondum enim ad tertium terminum B respicimus; si enim foret $B = 2A - 1$, vel adeo minor, tum haec ratio cessaret et praecedens valor $\Theta = A - 1$ adhuc subsisteret; sin autem tertius terminus B superet istum limitem $2A - 1$, tum certe statui debebit $\Theta = A$, vnitate scilicet maior quam casu praecedente.

titudo Num per $= A$ quiru gressi num mino adhuc istum vnitat ... sse, quicquid haurire lice- onem quam- inuicem ad- antur, quae- littera Θ in- ersi, sed et endi. Hanc iis principiis vlteri euiden termi pars minos vsque do nu vero nume tertiu tineat meri ... um primum est, hinc vs- eros produci em numerus primum ter- inque fuerit m quaesitum 1. m 1 admit- modo vidi- vlterius pro- lem terminis ex secundo tot vicibus dem hic nu-), ita vt mul- titu-

§. 3. Remoueamus autem tertium terminum B vlterius, et cum numerus $2A - 1$ requirat A terminos, euidens est, numerum $3A - 1$ requisiturum esse $A + 1$ terminos, cum sit $3A - 1 = A + (2A - 1)$, quarum pars prior vnum continet terminum, posterior vero A terminos; vnde si B superet hunc limitem $3A - 1$, ad eum vsque habebimus $\Theta = A + 1$. Vlterius autem progrediendo numerus $4A - 1$ requiret terminos $A + 2$; numerus vero $5A - 1$ requiret terminos $A + 3$; atque in genere numerus $n.A - 1$ requiret terminos $A + n - 2$, siquidem tertius terminus B illo fuerit maior.

§. 4. His colligendis, si tertius terminus B contineatur inter binos limites modo assignatos, valorem numeri Θ concludimus sequenti modo:

Si B contineatur intra	erit Θ
$A - 1$ et $2A - 1$	$A - 1$
$2A - 1$ et $3A - 1$	A
$3A - 1$ et $4A - 1$	$A + 1$
$4A - 1$ et $5A - 1$	$A + 2$
.	.
.	.
.	.
$nA - 1$ et $(n+1)A - 1$	$A + n - 2$.

Consequenter, si ponamus esse $B > nA - 1$, attamen $B < (n+1)A - 1$, quia hinc sequitur, $n < \frac{B+1}{A}$ et tamen $n > \frac{B+1}{A} - 1$. his valoribus substitutis fiet

$$\Theta < A - 2 + \frac{B+1}{A}$$

et tamen

$$\Theta > A - 3 + \frac{B+1}{A}.$$

Sufficit autem pro Θ sumere numerum integrum proxime minorem priori, vel proxime maiorem altera formula. Cum igitur vsque ad terminum A fuerit $\Theta = A - 1$, vsque ad B progrediendo hic valor augmentum accipiet, quod ita se habebit ex formula priore: $\Theta < A - 1 + \frac{B - A + 1}{A}$; ex posteriore autem: $\Theta > A - 1 + \frac{B - 2A + 1}{A}$.

§. 5. Hucusque nostra inuestigatio feliciter successit, vt nunc vlterius progrediamur, ponamus numerum hactenus inuentum $= \vartheta$, qui denotat, quot terminis opus est ad omnes numeros ab vnitate vsque ad terminum B producendos, ita vt sit vel

$$\vartheta < A - 1 + \frac{B - A + 1}{A}, \text{ vel}$$

$$\vartheta > A - 1 + \frac{B - 2A + 1}{A},$$

quippe

quip
et A
min
B p
quen
qui
vlter
term
ret
minc , attamen
term. $\frac{+1}{A}$ et ta-
ret l
tum;
mite
auten n proxime
peret nula. Cum
cedat , vsque ad
$(a+$, quod ita
$C >$ $\frac{-A+1}{A}$; ex
num
vbi liciter suc-
oport numerum
nume minis opus
hunc rminum B
vbi
ior s
quippe

quippe qui numeri tantum ex binis numeris initialibus 1 et A componuntur. Nunc autem admisso etiam tertio termino B, totidem terminis, vel paucioribus, iungendis, vltra B procedamus, donec perueniamus ad numerum $B + b$, quem non amplius ex ϑ terminis componere liceat, sed qui requirat $\vartheta + 1$ terminos; tum vero manifestum est, vlterius progrediendo numerum $2B + b$ requirere $\vartheta + 2$ terminos; similique modo porro numerus $3B + b$ requiret $\vartheta + 3$ terminos; numerus $4B + b$ vero $\vartheta + 4$ terminos; et in genere numerus $nB + b$ requiret $\vartheta + n$ terminos.

§. 6. Quodsi ergo sequens terminus C non superet limitem $B + b$; numerus ϑ nullum accipiet augmentum; sin autem maior sit, neque tamen maior secundo limite $2B + b$, ad numerum ϑ vnitas erit addenda; sin autem vlterius crescat, neque tamen limitem $3B + b$ superet, augmentum accedet $= 2$; vnde palam est, si C excedat limitem $nB + b$, neque tamen vltra sequentem $(a+1)B + b$ crescat, augmentum fore $= n$. Sumamus ergo $C > nB - b$, quia erit $n < \frac{C - b}{B}$, ad hunc vsque terminum C multitudo terminorum iungendorum erit

$$= \vartheta + n = \vartheta + \frac{C - b}{B},$$

vbi scilicet numerum integrum proxime minorem capi oportet. Sin autem sumeremus formulam $\vartheta + \frac{C - B - b}{B}$, tum numerus integer proxime maior capi deberet; sicque ad hunc vsque terminum C numerus noster quaesitus erit

$$\Theta = A - 1 + \frac{B - 2A + 1}{A} + \frac{C - B - b}{B},$$

vbi pro vtraque fractione numerus integer proxime maior sumi debet.

 §. 7.

§. 7. Istum numerum denuo indicemus littera ϑ, atque vltra C progrediamur, tot vel paucioribus terminis iungendis, donec perueniamus ad numerum $C + c$, quem non amplius producere liceat, sed qui requirat $(\vartheta + 1)$ terminos, ac ratiocinium vt ante instituendo euidens est, vsque ad terminum sequentem D numerum illum ϑ augmentum capere $\frac{D - C - c}{C}$, si scilicet loco fractionis numerus integer proxime maior accipiatur; quocirca vsque ad hunc terminum nanciscimur numerum nostrum quaesitum:

$$\Theta = A - 1 + \frac{B - 2A + 1}{A} + \frac{C - B - b}{B} + \frac{D - C - c}{C}.$$

§. 8. Quodsi simili modo post terminum D pergamus vsque ad numerum $D + d$, qui non amplius ex tot terminis componatur, sed vno plus requirat; tum vsque ad terminum sequentem E praecedens valor litterae Θ insuper augmentum accipiet $= \frac{E - D - d}{D}$, sicque quovsque libuerit vlterius procedere licet. Hic autem non est dissimulandum, huiusmodi laborem non nisi summa cum molestia suscipi posse; quin etiam, quocunque iam fuerimus progressi, nunquam tamen certi esse poterimus de vero valore ipsius Θ, si progressio adeo in infinitum continuetur. Interim tamen, quovsque has operationes produxerimus, semper tuto concludere poterimus pro serie in infinitum continuata, verum valorem Θ certe non fore minorem eo, quem inuenimus; ac si satis longe fuerimus progressi, plerumque iste valor inuentus haud a veritate aberrabit.

§. 9. Ceterum circa illas fractiones, quibus numerum Θ constitui inuenimus, notari conuenit, si quae earum

rum vel euanescat vel adeo negatiua euadat, tum eius valorem esse nullum, quantumuis etiam eius valor negatiuus fuerit magnus, quoniam ob terminos sequentes valor praecedens nunquam potest diminui; quando autem istae fractiones sunt positiuae, quamdiu earum valores vnitatem non superant, eae vnitati aequales sunt reputandae; quando autem vnitate sunt maiores, neque tamen binarium superent, pro iis 2 scribi oportet, et ita porro. Ex quo intelligere licet, quomodo ex aliquot terminis seriei initialibus verus valor ipsius Θ elici possit, etiamsi series in infinitum continuetur; hoc scilicet eueniet, si omnes fractiones sequentes euadant negatiuae.

§. 10. Mirum vero non est, hoc modo inuestigationem istam summis plerumque difficultatibus fore implicatam, quandoquidem hic rem nimis generaliter sumus complexi, neque ad vllam legem, qua termini seriei progrediantur, respeximus. Nullum enim est dubium, quin ipsa progressionis lex plurimum ad numerum Θ reperiendum conferat; quemadmodum vidimus in serie generali initio allata, quae omnes numeros figuratos in se complectitur, de qua adfirmare possumus, numerum Θ semper esse $= a + 2n - 2$; neque tamen adhuc patet, quomodo haec determinatio adhuc generalior reddi possit. Ill. quidem *Beguelin*, hoc casu inductus, erat arbitratus, simili lege pro omnibus plane seriebus algebraicis ab vnitate incipientibus, quarum scilicet terminum generalem formula algebraica exhibere liceat, valorem ipsius Θ sequenti modo exhiberi posse: Sit series proposita 1, A, B, C, D, E etc. ad ordinem n referenda, et formentur inde successiue series differentiarum omnium ordinum, quarum termini initiales sint

sint respectiue a, b, c, d, etc. vltimae vero differentiae ordinis n, que sunt constantes, sint $= i$, ita ut multitudo numerorum $a, b, c, \ldots . i$ sit $= n$; tum vir laudatus putavit fore $\Theta = a + n - 1$, quae formula utique cum casu numerorum figuratorum congruit. Cum enim hic sit $a = A - 1$, pro illo casu nostrum a erit $n + a - 1$, cui si addatur ob ordinem seriei numerus $n - 1$, ipsa illa formula pro Θ data resultat.

§. 11. Leuiter attendenti autem facile erit eiusmodi casus excogitare, quibus ista regula refragetur, veluti euenit in hac serie: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29 etc.
cuius differentiae primae 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc.
et secundae - - 1, 1, 1, 1, 1, 1, etc.
quae igitur est ordinis 2^{di}, siue $n = 2$ et $a = 1$. Secundum regulam igitur deberet esse $\Theta = 2$: certum vero est, ad producendos omnes numeros ad minimum ternis terminis istius seriei addendis opus esse. Deinceps vero vir Illustris significauit, se cum istam regulam perscriberet omisisse fractionem insuper addendam, quae sit $\frac{i}{a}$, quam quidem semper negligere liceat, si fuerit unitate minor, quemadmodum id in omnibus numeris figuratis usu venit; quando autem ad unitatem vel ultra ascendat, tum eius valorem in integris, negligendo fractionem annexam, superaddi debere. Cum nunc nostro casu differentiae ultimae sint $i = 1$, erit $\frac{i}{a} = 1$, hincque fiet $\Theta = 3$, quod cum veritate egregie consentit, et nunc quidem fatendum est, hanc regulam emendatam non solum numeris figuratis, sed et innumeris aliis progressionum generibus satisfacere.

nera pluri a sec feren tum ralis 1; 1 1 + secun quod vbi b bere rat n facile turam beatu 1; 2 pro meth collig $\Theta =$ $\Theta =$ seque ad te vix mem magis antur. Eu

ero differentiae ita ut multitum vir laudatus formula utique uit. Cum enim a erit $n + a - 1$, s $n - 1$, ipsa facile erit eiusgula refragetur, 16, 22, 29 etc. 5, 6, 7, etc. , 1, 1, etc. $= 1$. Secundum im vero est, ad ternis terminis ps vero vir Ilperscriberet omie sit $\frac{i}{a}$, quam unitate minor, uratis usu venit; endat, tum eius annexam, superferentiae ultimae $\Theta = 3$, quod quidem fatendum numeris figurageneribus satis- §. 12.

§. 12. Interim tamen etiam infinita serierum genera exhibere licet, quibus haec regula fallit, id quod plurimum intererit adcuratius ostendisse. Incipiamus ergo a secundo ordine progressionum algebraicarum, cuius differentiae secundae iam sunt constantes, ita vt hi duo tantum numeri a et b occurrant, vnde earum forma generalis erit

$1;\ 1 + a;\ 1 + 2a + b;\ 1 + 3a + 3b,\ 1 + 4a + 6b;\ 1 + 5a + 10b.$ etc. et cum sit $n = 2$ et $i = b$, secundum regulam illam deberet esse $\Theta = a + 1 + \frac{b}{a}$, quod, vti iam notauimus, pro numeris polygonalibus, vbi $b = a - 1$ egregie conuenit. Quin etiam locum habere deprehenditur, quoties numerus b non multum superat numerum a; statim enim ac fractio $\frac{b}{a}$ fit satis magna, facile ostendi potest, hanc regulam a veritate esse aberraturam; namque si sumamus $a = 1$ et $b = 100$, vt habeatur haec progressio:

1; 2; 103; 304; 605; 1006; 1507; 2108, 2810; etc. pro qua regula illa dat $\Theta = 102$, si hanc seriem methodo initio exposita examinemus, vsque ad tertium 103 colligimus $\Theta = 51$; ad quartum terminum 304 vsque $\Theta = 52$; hinc porro ad sequentem 605 prodit tantum $\Theta = 53$; qui valor non amplius augetur, etiamsi ultra sequentem 1006 progrediamur; ex quo facile intelligitur, ad terminos vlteriores vsque progrediendo hunc numerum vix vltra 54 auctum iri, cum tamen secundum regulam memoratam esse deberet $\Theta = 102$; error autem multo magis enormis euadet, si loco b numeri maiores accipiantur.

§. 13. Cum hoc casu error sit tantopere enormis, operae pretium erit, pro valore $a = 1$, vnde oritur series $1;\ 2;\ 3+b;\ 4+3b;\ 5+6b;\ 6+10.b;\ 7+15b;\ 8+21.b.$ etc. loco b successiue numeros continuo maiores assumere, et cuilibet harum serierum numerum Θ, ex obseruationibus erutum, adscribere, vt cum valore regulae $\Theta = 2 + b$ comparari possit.

b	Series.							Θ	error
1	1,	2,	4,	7,	11,	16,	22,	. . . . 3.	0
2	1,	2,	5,	10,	17,	26,	37,	. . . . 4.	0
3	1,	2,	6,	13,	23,	36,	52.	. . . . 4.	1
4	1,	2,	7,	16,	29,	46,	67,	. . . . 5.	1
5	1,	2,	8,	19,	35,	56,	82,	. . . . 5.	2
6	1,	2,	9,	22,	41,	66,	97,	. . . . 6.	2
7	1,	2,	10,	25,	47,	76,	112.	. . . . 6.	3
8	1,	2,	11,	28,	53,	86,	127,	. . . . 7.	3
9	1,	2,	12,	31,	59,	96,	142.	. . . . 7.	4
10	1,	2,	13,	34,	65,	106,	157.	. . . . 8.	4

Hinc igitur patet, ab initio casibus $b = 1$ et $b = 2$ regulae errorem esse nullum, hinc vero continuo magis increscere; ac si hos valores attente consideremus, facile concludemus, pro hoc serierum genere fore $\Theta = 3 + \frac{1}{2}b$, vnde pro casu $b = 100$ fit $\Theta = 53$.

§. 14. Consideremus simili modo genus, quo $a = 2$, nostraque series erit.

$1;\ 3;\ 5+b;\ 7+3b;\ 9+6b;\ 11+10b;\ 13+15b;\ 15+21b;\ 17+28b;$ etc. pro qua regula Cel. Beguelin dat $\Theta = 3 + \frac{b}{2}$; Exponamus igitur sequentes series cum valoribus ipsius Θ vt ante:

b

re enormis, oritur series ; 7 + 15 b; ntinuo ma- merum Θ, ex lore regulae

b		error
1	. 3.	0
2	. 4.	0
3	. 4.	1
4	. 5.	1
5	. 5.	2
6	. 6.	2
7	. 6.	3
8	. 7.	3
9	. 7.	4
10	. 8.	4

Sin 1; colli Θ =

nem = 2 regulae inci increscere; secu ncludemus, gresi , vnde pro 1; 1 - 1 + quo a = 2, susp deat + 10 b; prae c. pro qua iri. namus igi- nor ante: aut

b

b	Series							Θ	error
1	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	3	0
2	1,	3,	7,	13,	21,	31,	43.	4	0
3	1,	3,	8,	16,	27,	41,	58,	4	0
4	1,	3,	9,	19,	33,	51,	73,	5	0
5	1,	3,	10,	22,	39,	61,	88	5	0
6	1,	3,	11,	25,	45,	71,	103,	5	1
7	1,	3,	12,	28,	51,	81,	118.	5	1
8	1,	3,	13,	31,	57,	91,	133,	6	1
9	1,	3,	14,	34,	63,	101,	148	6	1
10	1,	3,	15,	37,	69,	111,	163.	7	1

Sin autem sumamus $b = 100$, pro hac serie:

$1;\ 3;\ 105;\ 307,\ 609;\ 1011;\ 1513;\ 2115;$ etc. colligimus $\Theta = 37$, cum ex illa regula esse deberet $\Theta = 53$.

§. 15. Progrediamur nunc ad progressionum ordinem tertium, vbi $n = 3$, et ternae series differentiarum incipiant ab his numeris: a, b et c, ita vt $i = c$, et secundum regulam $\Theta = a + 2 + \frac{c}{a}$; ipsa igitur progressio erit

$1;\ 1+a;\ 1+2a+b;\ 1+3a+3b+c;\ 1+4a+6b+4c;\ 1+5a+10b+10c;\ 1+6a+15b+20c$ etc. atque hic statim merito suspectum videtur, quod valor ipsius Θ plane non pendeat a littera b; euidens enim est, si b fuerit numerus praemagnus, etiam numerum Θ non mediocriter auctum iri. Quin etiam in genere affirmare licet, numerum Θ minorem certe esse non posse, quam si esset $c = 0$: hoc autem casu per eandem regulam foret $\Theta = a + 1 + \frac{b}{a}$;

 quare

quare, quoties haec formula $a + 1 + \frac{b}{a}$ maior eſt quam $a + 2 + \frac{c}{a}$, regula iſta neceſſario fallere debet, ſi fuerit $\frac{b}{a} > 1 + \frac{c}{a}$ ſiue $b > a + c$.

§ 16. Ad hoc oſtendendum ſumamus $a = 2$; $c = 1$ et $b = 6$; vnde haec ſeries naſcitur:

1; 3; 11; 26; 49; 81; 123; 176; 241;

pro qua eſſe deberet $\Theta = 4 + \frac{2}{2} = 4$, cum tamen numerus 21 non in pauciores quam 5 terminos diſtribui poſſit; error autem maior erit prodituurus, quo magis numerus b augebitur.

§. 17. Quemadmodum numerus b ſuppeditauit unum errorum fontem, ita etiam ex numero c, ſi capiatur ſatis magnus, errores inſignes naſcentur. Sumamus ſcilicet $a = 2$; $b = 1$; $c = 10$, vt prodeat iſta ſeries: 1; 3; 6; 20; 55; 121; 228; etc. ideoque per regulam $\Theta = 9$; tentanti autem mox patebit, hunc valorem non ſuperare 6; ex quo manifeſtum eſt, pro maioribus numeris c errores adhuc maiores eſſe prodituros; vbi notaſſe iuuabit, ſi b fuerit numerus praeparuus, regulam errare in defectu; ſin autem c fuerit numerus praemagnus, in exceſſu.

§. 18. Tutiſſima igitur via, quicquam certi in hac re concludendi erit ſine dubio, vt plures huiusmodi caſus tam ex ſecundo et tertio progreſſionum ordine, vti fecimus, quam etiam ex ſequentibus omni ſtudio explorentur, et qui hunc laborem ſuſcipere voluerit, detegit fortaſſe regulam quandam latius patentem et certiorem, qua huiusmodi numerorum reſolutiones definiri queant.

§. 19.

§. 19. Forſitan etiam non parum iuuabit progreſſiones geometricas conſideraſſe, pro quibus numerus noſter Θ, quo vlterius progrediamur, magis increſcit. Ita in progreſſione dupla 1; 2^1; 2^2; 2^3; 2^4; 2^5; etc. ſi in termino 2^5 ſubſiſtamus, erit $\Theta = 5$; et in genere pro omnibus numeris vsque ad 2^n fit $\Theta = n$; tum vero in progreſſione, tripla 1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, etc. vſque ad terminum 3^n numerus noſter reperitur $\Theta = 2n$; atque in genere pro progreſſione 1, m, m^2; m^3; m^4; m^5; m^6; etc. vsque ad terminum m^n concluditur numerus $\Theta = (m - 1)\, n$. Hic vero notandum, differentiis continuis ſumendis earum terminos primos fore $m - 1$; $(m - 1)^2$; $(m - 1)^3$; etc. ita vt litterae ſupra vſurpatae ſint hic $a = m - 1$; $b = (m - 1)^2$; $c = (m - 1)^3$; $d = (m - 1)^4$ etc.; vnde concludi poſſet fore $\Theta = \frac{a}{1} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{e}{d}$ etc. haec autem regula in aliis caſibus multum falleret. Quin etiam in progreſſione hypergeometrica Walliſii

1; 2; 6; 24; 120; 720; 5040; etc.

vsque ad terminum 6 eſt $\Theta = 3$; vsque ad 24 eſt $\Theta = 6$; vsque ad terminum $1 . 2 . 3 . \ldots n$ erit $\Theta = \frac{n(n-1)}{2}$.

§. 20. Verum etiam ſeries recurrentes memorabilia nobis ſuppeditant exempla pro numero Θ. Ita pro hac ſerie notiſſima:

Indices 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,
termini 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, etc.

cuius quilibet terminus eſt ſumma duorum praecedentium, ſi vsque ad terminum indice n ſignatum progrediamur, erit $\Theta = \frac{n}{2}$, vbi ſi n fuerit impar, fractio adiuncta pro vnitate eſt reputanda. Vlteriorem huius argumenti disquiſitionem mihi quidem ſuſcipere non vacat.

Nova