1780

De variis motuum generibus, qui in satellitibus planetarum locum habere possunt.

Leonhard Euler

DE VARIIS MOTVVM GENERIBVS, QVI IN SATELLITIBVS PLANETARVM LOCVM HABERE POSSVNT.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Quamquam nunc quidem tabulae lunares non vltra vnum minutum primum a veritate aberrare perhibentur, tamen, quantum adhuc in ipſa theoria ſit deſiderandum, exinde intelligi poteſt, quod, ſi orbitae lunaris excentricitas multo maior exiſteret, vel etiam ſub maiore angulo ad eclipticam inclinaretur, cognitio motus Lunae etiamnunc fere penitus lateret, ita vt in computo eclipſium fortaſſe adhuc pluribus horis eſſemus aberraturi. Cum enim in praeſenti ſtatu determinatio loci Lunae circiter 30 correctiones exigat, pro maiori excentricitate et inclinatione forſitan centum correctiones vel adeo ne mille quidem ſufficerent. Ob tantum autem correctionum numerum, etiamſi ſingulae eſſent exactae, enormes errores plane euitari non poſſent.

§. 2.

§. 2. Multo maior vero incertitudo esset metuenda, si luna ad multo maiorem distantiam a terra fuisset remota, quippe quo casu omnes correctiones nunc quidem adhiberi solitae nullum amplius locum inuenire possent, propterea quod hoc casu mox incertum esset futurum, vtrum talem Lunam ad ordinem satellitum potius referri conueniat, quam ad planetas primarios, sicque hoc casu omnia subsidia, quibus Astronomi hactenus vsi sunt, omni vsu essent caritura, et nos adhuc in crassissima ignoratione talis motus versaremur. Ex quo abunde intelligere licet, nostram theoriam motuum coelestium adhuc maximo defectu laborare, et, nisi insignia incrementa in Analysi detegantur, meliorem successum nullo modo sperari posse.

§. 3. His igitur summis difficultatibus perpensis nulla alia via patere videtur, hanc scientiam ad maiorem perfectionis gradum euehendi, nisi vt plures huiusmodi motus omni studio perpendantur, atque tales casus fingantur, qui continuo propius ad eiusmodi motus nobis adhuc penitus absconditos accedant. Hunc in finem vtique a casibus simplicioribus inchoari conueniet, dum scilicet omnes circumstantiae, quibus difficultates multiplicantur, quantum fieri potest, remoueantur. Quemadmodum enim in Geometria, ante quam problemata difficillima soluenda suscipiuntur, plura alia simpliciora praemitti solent, quae continuo propius ad illa perducant, ita etiam in Astronomia simili methodo versari conueniet.

§. 4. Vt igitur in omnes motus, qui in Lunam cadere possunt, feliciori successu inquiramus, primo Lu-

nam

nam in ipſo plano eclipticae circumferri aſſumemus, deinde quoque ipſam terram motu vniformi circa Solem in circulo reuolui ſtatuemus. Praeterea vero, ne actio Lunae terram afficere queat, maſſam Lunae tanquam minimam ſpectabimus, vnde haec quaeſtio nobis euoluenda proponatur:

Problema.

Si, dum terra motu aequabili in circulo circa Solem promouetur, corpori cuipium, quaſi Lunae, extra terram in ipſo plano eclipticae poſito, motus quicunque imprimatur, inueſtigere motum, quo hoc corpus, ex centro terrae ſpectatum, progredi videbitur.

§. 5. Quoniam motus, qualis ex centro terrae ſpectabitur, deſideratur, ipſam terram tanquam quieſcentem et fixam in T ſpectabimus, vnde in ipſo plano eclipticae rectam pariter fixam T A ducamus, a qua ad quoduis tempus elongationem noſtri corporis, ſeu Lunae, aſſignari oporteat. Elapſo igitur quocunque tempore reperiatur Sol in S, Luna vero in L, et quia nunc Sol circa terram vniformiter in circulo promoueri videbitur, eius diſtantiam a terra T S vnitate deſignabimus. Praeterea vero, quia motus Solis eſt vniformis, ipſe angulus A T S, quem vocemus $= \theta$, commodiſſimam menſuram temporis nobis ſuppeditabit. Pro Luna autem ponamus eius diſtantiam a terra $TL = v$, eiusque longitudinem, a directione T A computatam, ſeu angulum $ATL = \Phi$. Tum vero ſtatuamus breuitatis gratia angulum $STL = \Phi - \theta = \eta$, eritque recta $SL = \sqrt{(1 - 2v \cos. \eta + vv)}$, quam breuitatis gratia deſignemus per u. Praeterea ex punctis L Tab. X Fig. 5

 et

et S ad rectam T A demittantur perpendicula L X et S P, et pro puncto L vocatis coordinatis $TX = x$ et $XL = y$, erit $x = v$ cof. Φ et $y = v$ fing. Φ, pro Sole autem erit $TP =$ cof. θ et $SP =$ fin. θ.

§. 6. Nunc vt principia motus huc applicemus, primo ipfe angulus $ATS = \theta$ nobis exprimat menfuram temporis, ita vt elementum temporis fit $d\theta$; deinde ipfam Solis maffam pariter vnitate defignemus, cuius refpectu fit maffa terrae $= m$, cuius valor ex vera parallaxi Solis deducitur $m = \frac{1}{1000000}$, Lunae autem maffam, vt iam notauimus, nullam ftatuamus. His pofitis Luna primo follicitabitur ad terram vi $= \frac{m}{vv}$, in directione L T; fecundo autem ad Solem trahitur vi $= \frac{1}{uu}$, in directione L S. Tertio vero, quia terram in quiete fpectamus, vires, quibus terra follicitatur, contrarie Lunae applicari oportet, vnde cum Sol terram attrahat vi $= 1$, in directione T S, eadem vis $= 1$ Lunae applicata eft intelligenda fecundum directionem S T.

§. 7. Nunc fingulas has vires fecundum binas directiones coordinatarum x et y refolui oportet, vnde prima vis $= \frac{m}{vv}$ fecundum L T per refolutionem dabit pro directione X T vim $= \frac{mx}{v^3} = \frac{m \operatorname{cof.} \Phi}{vv}$ et pro directione L X vim $= \frac{my}{v^3} = \frac{m \operatorname{fin.} \Phi}{vv}$. Secundo vis fecundum L S, quae eft $\frac{1}{uu}$, dabit pro directione T X vim $= \frac{\operatorname{cof.} \theta - x}{u^3} = \frac{\operatorname{cof.} \theta - v \operatorname{cof.} \Phi}{u^3}$ et pro directione X L vim $= \frac{\operatorname{fin.} \theta - y}{u^3} = \frac{\operatorname{fin.} \theta - v \operatorname{fin.} \Phi}{u^3}$. Denique tertia vis $= 1$, in directione S T agens, praebet pro directione X T vim $=$ cof. θ et pro directione L X vim $=$ fin. θ; vnde colligendo tota vis in directione X T vrgens erit

m

$$\frac{m\,\text{cof.}\,\Phi}{v\,v} - \frac{\text{cof.}\,\theta + v\,\text{cof.}\,\Phi}{u^3} + \text{cof.}\,\theta;$$

tota autem vis in directione LX vrgens erit

$$= \frac{m\,\text{fin.}\,\Phi}{v\,v} - \frac{\text{fin.}\,\theta + v\,\text{fin.}\,\Phi}{u^3} + \text{fin.}\,\theta.$$

§. 8. Iam per principia motus his viribus proportionales esse debent accelerationes corporis L secundum easdem directiones, quae cum fint $\frac{d\,d\,x}{d\,\theta^2}$ et $\frac{d\,d\,y}{d\,\theta^2}$, fumto temporis elemento $d\,\theta$ conftante, conftituta maffarum et temporis ratione vt fecimus, iftae accelerationes per $1 + m$ multiplicari debent, vt viribus illis euadant aequales, quae cum coordinatas x et y diminuere tendant, binae aequationes motum corporis L determinantes erunt

1°. $(1 + m)\frac{d\,d\,x}{d\,\theta^2} = -\frac{m\,\text{cof.}\,\Phi}{v\,v} + \frac{\text{cof.}\,\theta - v\,\text{cof.}\,\Phi}{u^3} - \text{cof.}\,\theta$ et

2°. $(1 + m)\frac{d\,d\,y}{d\,\theta^2} = -\frac{m\,\text{fin.}\,\Phi}{v\,v} + \frac{\text{fin.}\,\theta - v\,\text{fin.}\,\Phi}{u^3} - \text{fin.}\,\theta.$

Vbi loco $1 + m$ tuto fcribere licet 1, non folum quia maffa m tam eft parua, fcilicet $\frac{1}{1000000}$, fed etiam quia nobis maffas corporum coeleftium tam accurate noffe non conceditur.

§. 9. Quo has aequationes propius ad vfum noftrum accommodemus, notaffe iuuabit effe

$$x\,\text{cof.}\,\Phi + y\,\text{fin.}\,\Phi = v \text{ et } y\,\text{cof.}\,\Phi - x\,\text{fin.}\,\Phi = 0.$$

Hinc differentiando habebimus

$$d\,x\,\text{cof.}\,\Phi + d\,y\,\text{fin.}\,\Phi = d\,v \text{ et } d\,y\,\text{cof.}\,\Phi - d\,x\,\text{fin.}\,\Phi = v\,d\,\Phi;$$

porro igitur differentiando reperietur

$$d\,d\,x\,\text{cof.}\,\Phi + d\,d\,y\,\text{fin.}\,\Phi = d\,d\,v - v\,d\,\Phi^2 \text{ et}$$

$$d\,d\,y\,\text{cof.}\,\Phi - d\,d\,x\,\text{fin.}\,\Phi = 2\,d\,v\,d\,\Phi + v\,d\,d\,\Phi.$$

Quodfi nunc loco $d\,d\,x$ et $d\,d\,y$ valores fupra dati fubftituan-

tuan-

tuantur, prodibunt sequentes nouae aequationes:

$$1^{\circ}.\ \frac{(1+m)(ddv - v\,d\Phi^2)}{d\theta^2} = -\frac{m}{vv} + \frac{\operatorname{cof.}\eta}{u^3} - \frac{v}{u^3} - \operatorname{cof.}\eta;$$

$$2^{\circ}.\ \frac{(1+m)(2\,dv\,d\Phi + v\,dd\Phi)}{d\theta^2} = -\frac{\operatorname{fin.}\eta}{u^3} + \operatorname{fin.}\eta.$$

Hoc scilicet modo non solum coordinatas x et y, sed etiam angulorum Φ et θ tam sinus quam cosinus ex calculo expulimus; interim tamen hi ambo anguli in angulo η continentur, siquidem est $\eta = \Phi - \theta$.

§. 10. Quoniam in his duabus formulis innumerae diuersae motuum species continentur, videamus ante omnia, vtrum inter eas eiusmodi detur species, qua Luna circa Terram vniformiter in circulo reuolui queat, nec ne? Hunc in finem ponamus distantiam Lunae a terra, quae debet esse constans, $v = x$, et cum eius celeritas angularis sit $= \frac{d\Phi}{d\theta}$, faciamus $\frac{d\Phi}{d\theta} = n$, ita vt sit $d\Phi = n\,d\theta$ et $dd\Phi = 0$. His autem valoribus introductis ambae nostrae aequationes euadent:

$$1^{\circ}.\ -ann(1+m) = -\frac{m}{aa} + \frac{\operatorname{cof.}\eta}{u^3} - \frac{a}{u^3} - \operatorname{cof.}\eta \text{ et}$$

$$2^{\circ}.\ 0 = -\frac{\operatorname{fin.}\eta}{u^3} + \operatorname{fin.}\eta, \text{ vbi erit}$$

$$u = \sqrt{(1 - 2a\operatorname{cof.}\eta + aa)}.$$

§. 11. Ex secunda aequatione statim patet, eam subsistere non posse, nisi sit vel $\operatorname{fin.}\eta = 0$, vel $u = 1$. At vero posterius fieri nequit, nisi angulus η sit constans, propterea quod esse deberet $\operatorname{cof.}\eta = \frac{1}{2}a$. Quia vero est $d\Phi = n\,d\theta$, ideoque $\Phi = n\theta$, erit $\eta = (n-1)\theta$, qui angulus constans esse nequit, nisi $n = 1$. Hic autem casus iam in priore continetur, quo esse debet $\operatorname{fin.}\eta = 0$, id quod duplici modo fieri potest, vel sumendo $\eta = 0$, vel $\eta = 180°$. Quare cum sit $\eta = (n-1)\theta$, priore casu debet esse

esse $n = 1$. Pro altero vero casu, quo $\eta = 180°$, ex valore differentiali $d\Phi = n\,d\theta$ fit

$$\Phi = n\theta + \alpha, \text{ ideoque } \eta = (n-1)\theta + \alpha = 180°,$$

quod fieri nequit, nisi sit $n = 1$ et $\alpha = 180°$, sicque duos habebimus casus euoluendos, alterum quo $\eta = 0$, alterum vero quo $\eta = 180°$. Vtrumque ergo seorsim euoluamus.

§. 12. Sit igitur primo $\eta = 0$, ideoque sin. $\eta = 0$ et cos. $\eta = 1$, vnde fiet $u = 1 - a$. Quare cum posteriori aequationi iam est satisfactum, sumendo $n = 1$ prior aequatio hanc praebet conditionem:

$$-a(1+m) = -\frac{m}{aa} + \frac{1}{(1-a)^2} - 1$$

quae vnicam tantum continet incognitam a, cuius ergo valorem hinc determinari oportet. Reducitur autem ista aequatio ad hanc formam:

$$0 = a^3(1-a)^2(1+m) - m(1-a)^2 + a^3(2-a)$$

quae aequatio ad quinque dimensiones exsurgit. Quia autem m est fractio quam minima, haec aequatio subsistere nequit, nisi ipsa quantitas a sit quam minima; tum autem loco $(1-a)^2$ scribere licebit 1, quo facto habebimus

$$a^3(1+m) - m + 2a^3 = 0,$$

vnde colligitur

$$a^3 = \frac{m}{3+m}, \text{ ideoque } a = \sqrt[3]{\frac{m}{3+m}} = \sqrt[3]{\frac{m}{3}}.$$

§. 13. Sin autem sit $\eta = 180°$ et cos. $\eta = -1$, ob $n = 1$ et $u = 1 + a$ prior aequatio dabit

$$0 = +a(1+m) - \frac{m}{aa} - \frac{1}{(1+a)^2} + 1;$$

vbi etiam facile patet a esse debere minimum, atque adeo,

 facta

facta euolutione et neglectis terminis minimis, prorſus vt ante prodibit $a^3 = \frac{m}{3+m}$. Hi autem valores proxime tantum ſunt veri, et aliquod diſcrimen prodiret, ſi approximationem vlterius proſequi vellemus, quod autem operae pretium non videtur, cum ſufficiat iſtum valorem ipſius a proxime noſſe.

Euolutio caſus,

quo Luna motu vniformi in circulo circa terram reuolui poſſit.

§. 14. Iam oſtendimus, hoc fieri non poſſe, niſi angulus $STL = \eta = \Phi - \theta$ fuerit vel nullus vel 180 graduum. Priore igitur caſu Luna perpetuo Soli maneret coniuncta, ſeu in perpetua coniunctione cum Sole cerneretur; poſteriori vero caſu perpetuo in oppoſitione Solis verſaretur, ideoque pleno lumine luceret. Vtroque ergo caſu talis Luna reuolutiones ſuas ſingulis annis abſolueret, et tempus menſtruum exacte cum duratione anni conueniret.

§. 15. Deinde etiam vidimus, diſtantiam talis Lunae a terra eſſe $a = \sqrt[3]{\frac{m}{3}}$. Cum igitur ſit $m = \frac{3}{1000000}$, erit $a = \frac{1}{100}$, ſiue haec diſtantia aequabitur centeſimae parti diſtantiae Solis a Terra. Quare cum diſtantia media verae Lunae a Terra ſit quaſi $\frac{1}{400}$ diſtantiae Solis, talis Luna quadruplo longius a terra diſtaret quam vera Luna, ideoque in ſemidiametris terrae eius diſtantia foret circiter 240 ſemidiametrorum terreſtrium. Vnde patet, quantopere tempus periodicum talis Lunae a regula *Kepleri* eſſet diſcrepaturum, quoniam ſecundum hanc regulam tempus perioriodicum talis Lunae se habere deberet ad tempus menstruum vt 8 : 1, vel talis Luna octo mensibus suos circuitus absoluere deberet, cum tamen integrum annum postulet, ratio autem manifesto sita est in eo, quod vis centripeta terrae in maioribus distantiis continuo magis a vi Solis diminuitur.

§. 16. Quoniam porro talis Luna etiam a Sole perpetuo eandem distantiam seruaret, dum scilicet priori casu, quo $\eta = 0$, eius distantia a Sole perpetuo foret $= 1 - a$, posteriori vero casu, quo $\eta = 180°$, ea foret $= 1 + a$, talis Luna ex Sole spectata etiam circulum describere cerneretur, idque motu vniformi, quandoquidem perpetuo terrae coniuncta maneret, eodemque tempore suas reuolutiones perageret; perpetuo enim vel in coniunctione inferiore, vel in superiore versaretur.

§. 17. Maxime notatu dignus est iste casus, quo existere posset corpus coeleste, quod tam circa terram, quam circa Solem circulum describere cerneretur, quatenus enim circa terram in circulo reuoluitur, eatenus rite tanquam satelles terrae spectari potest, quatenus autem circa Solem in circulo reuoluitur, eatenus pro planeta primario haberi potest. Quare cum distantia a terra sit $a = \frac{1}{100}$, ad hanc vsque distantiam sphaera lunaris extendenda merito videtur, ita vt omnia corpora, quae intra hoc spatium circa terram voluuntur, ad classem satellitum merito referri queant; quae autem extra hoc spatium cursum suum absoluunt, ea ad classem planetarum principalium numerari debeant.

§. 18.

§. 18. Quemadmodum autem terrae suam sphaeram lunarem assignauimus, ita etiam reliquis planetis suae sphaerae satellitiae constitui poterunt. Formulae enim supra datae ad planetam Iouem transferentur, si distantia media Iouis a Sole vnitate designetur, littera vero m massam Iouis denotet, quae cum sit circiter $\frac{1}{1125}$, radius sphaerae satellitiae Iouis reperietur $a = \sqrt[3]{\frac{1}{3.1125}} = \frac{1}{15}$. Ex quo sequitur, quaecunque corpora circa Iouem intra hanc distantiam reuoluuntur, ea inter eius satellites esse numeranda, dum contra omnia, quae extra motus suos peragunt, in ordinem planetarum principalium redigi debeant. Simili modo sphaera satellitia Saturni ad distantiam $\frac{1}{21}$ suae distantiae a Sole extendenda reperietur.

Propior applicatio superiorum formularum ad motus lunares.

§. 19. Quoniam igitur ad genus lunare alia corpora referri non conuenit, nisi quorum distantia a terra non excedit partem centesimam distantiae Solis a Terra, in formulis nostris distantia $TL = v$ semper minor spectari poterit quam $\frac{1}{100}$, vnde cum ista distantia sit valde exigua, valorem litterae $u = \sqrt{(1 - 2v \operatorname{cos}. \eta + vv)}$ satis commode vero proxime exprimere licebit; erit enim

$$\frac{1}{u^3} = (1 - 2v \operatorname{cos}. \eta + vv)^{-\frac{3}{2}};$$

vnde si altiores ipsius v potestates negligere velimus, erit $\frac{1}{u^3} = 1 + 3v \operatorname{cos}. \eta$; sin autem etiam potestatem secundam vv admittere vellemus, foret

$$\frac{1}{u^3} = 1 + 3v \operatorname{cos}. \eta - \tfrac{3}{2} vv + \tfrac{15}{2} vv \operatorname{cos}. \eta^2.$$

Verum quia v semper minus est quam $\frac{1}{100}$, hos postremos ter-

terminos facile negligere licebit, ita vt sufficiat sumsisse $\frac{1}{u^3} = 1 + 3\,v$ cof. η.

§. 20. Hoc autem valore introducto binae aequationes motum determinantes supra §. 9. inuentae erunt:

$$1^\circ.\ \frac{d\,d\,v - v\,d\,\Phi^2}{d\,\theta^2} = -\frac{m}{v\,v} - v\,(1 - 3\ \text{cof.}\ \eta^2)\ \text{et}$$

$$2^\circ.\ \frac{2\,d\,v\,d\,\Phi + v\,d\,d\,\Phi}{d\,\theta^2} = -\,3\,v\ \text{cof.}\ \eta\ \text{fin.}\ \eta.$$

Cum igitur fit

$$\text{cof.}\ \eta^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\ \text{cof.}\ 2\,\eta\ \text{et cof.}\ \eta\ \text{fin.}\ \eta = \tfrac{1}{2}\ \text{fin.}\ 2\,\eta,$$

hae aequationes induent fequentes formas:

$$1^\circ.\ \frac{d\,d\,v - v\,d\,\Phi^2}{d\,\theta^2} = -\frac{m}{v\,v} + \tfrac{1}{2}\,v\,(1 + 3\ \text{cof.}\ 2\,\eta)\ \text{et}$$

$$2^\circ.\ \frac{2\,d\,v\,d\,\Phi + v\,d\,d\,\Phi}{d\,\theta^2} = -\tfrac{3}{2}\,v\ \text{fin.}\ 2\,\eta.$$

Hinc iam multo facilius cafus deriuari poteft, quo corpus circulum motu vniformi defcribit. Pofito enim $v = a$ et $d\,\Phi = n\,d\,\theta$, hae aequationes dabunt

$$1^\circ.\ -a\,n\,n = -\frac{m}{a\,a} + \tfrac{1}{2}\,a\,(1 + 3\ \text{cof.}\ 2\,\eta)\ \text{et}$$

$$2^\circ.\ 0 = -\tfrac{3}{2}\,a\ \text{fin.}\ 2\,\eta,$$

vbi vt ante effe debet vel $\eta = 0$, vel $\eta = 180^\circ$, tum vero $n = 1$. Pro priore cafu autem vtrinque erit cof. $2\,\eta = 1$, vnde ifta aequatio fiet $3\,a^3 = m$, ideoque $a = \sqrt[3]{\frac{m}{3}}$, vt ante.

§. 21. Caeterum hinc videri poffet, etiam fumi poffe $\eta = 90^\circ$. Quoniam enim hoc modo pofteriori aequationi fatisfit, tum autem ob $d\,\Phi = n\,d\,\theta$ eft angulus $\Phi = n\,\theta + \alpha$, ideoque $\eta = (n - 1)\,\theta + \alpha = 90^\circ$, foret vtique $\alpha = 90^\circ$ et $n = 1$. At vero pro priore aequatione habebitur cof. $2\,\eta = -1$, vnde prodiret $0 = \frac{-m}{a\,a}$,

qui

qui ergo casus manifesto locum habere nequit. Quemadmodum autem hinc casum elicuimus, quo motus corporis fit circularis, etiam operae pretium erit in eos casus inquirere, vbi motus tantum quam minime, seu infinite parum a circulari discrepat.

Inuestigatio casuum, quibus motus Lunae infinite parum a circulari esset discrepaturus.

§. 22. Quia motus proxime in circulo absolui debet, distantia v semper quam minime a constante discrepare debet. Ponatur igitur $v = a(1 + \alpha \operatorname{cos}. 2\eta)$, vbi α fractionem prae vnitate quam minimam denotet, ita vt eius potestates tuto negligi queant. Ex ipsa enim aequationum forma facile intelligitur, partem istam minimam inuoluere debere cosinum anguli 2η. Deinde quia etiam motus proxime debet esse vniformis, statuatur simili modo $\frac{d\Phi}{d\theta} = n(1 + \beta \operatorname{cos}. 2\eta)$, ita vt etiam β sit fractio quam minima. Hinc cum sit $d\eta = d\Phi - d\theta$, erit

$$\frac{d\eta}{d\theta} = n(1 + \beta \operatorname{cos}. 2\eta) - 1, \text{ siue } \frac{d\eta}{d\theta} = n - 1,$$

ob β fractionem minimam. His positis erit

$$\frac{dv}{d\theta} = -2a\alpha(n-1)\operatorname{sin}. 2\eta \text{ et}$$

$$\frac{ddv}{d\theta^2} = -4a\alpha(n-1)^2 \operatorname{cos}. 2\eta,$$

tum vero habebitur

$$\frac{dd\Phi}{d\theta^2} = -2n\beta(n-1)\operatorname{sin}. 2\eta.$$

§. 23. His iam valoribus introductis pro aequatione posteriore habebimus

$v\,dd\Phi$

$$\frac{v\,dd\Phi}{d\theta^2} = -2\,a\,n\,\beta\,(n-1)\,\text{fin.}\,2\,\eta \text{ et}$$

$$\frac{2\,dv\,d\Phi}{d\theta^2} = -4\,n\,a\,\alpha\,(n-1)\,\text{fin.}\,2\,\eta.$$

His porro valoribus introductis aequatio posterior erit

$$-2an\beta(n-1)\,\text{fin.}\,2\eta - 4an\alpha(n-1)\,\text{fin.}\,2\eta = -\tfrac{3}{2}a\,\text{fin.}\,2\eta,$$

neglecta in parte dextra particula infinite parua. Hinc per a fin. $2\,\eta$ diuidendo habebimus

$$4\,n\,(n-1)\,(\beta + 2\,\alpha) = 3, \text{ ideoque}$$

$$\beta + 2\,\alpha = \frac{3}{4\,n\,(n-1)}.$$

Vnde iam patet, quia α et β debent esse fractiones quam minimae, hunc casum locum habere non posse, nisi fuerit numerus n satis notabilis, hoc est nisi Luna admodum celeriter circa terram reuoluatur.

§. 24. Expediamus nunc etiam priorem aequationem, pro qua erit primo

$$\frac{ddv}{d\theta^2} = -4\,a\,\alpha\,(n-1)^2\,\text{cof.}\,2\,\eta,$$

deinde vero erit

$$\frac{v\,d\Phi}{d\theta^2} = a\,n\,n\,(1 + (\alpha + 2\,\beta)\,\text{cof.}\,2\,\eta).$$

Porro pro parte dextra habebitur

$$\frac{m}{vv} = \frac{m}{aa}(1 + \alpha\,\text{cof.}\,2\,\eta)^{-2} = \frac{m}{aa}(1 - 2\,\alpha\,\text{cof.}\,2\,\eta),$$

ac denique

$$\tfrac{1}{2}v\,(1 + 3\,\text{cof.}\,2\,\eta) = \tfrac{1}{2}a\,(1 + (\alpha + 3)\,\text{cof.}\,2\,\eta)$$
$$= \tfrac{1}{2}a\,(1 + 3\,\text{cof.}\,2\,\eta),$$

ob α minimum. Ex his igitur prior aequatio colligitur fore

$$-4\,a\,\alpha\,(n-1)^2\,\text{cof.}\,2\,\eta - a\,n\,n\,(1 + (\alpha + 2\,\beta)\,\text{cof.}\,2\,\eta)$$
$$= -\frac{m}{aa}(1 - 2\,\alpha\,\text{cof.}\,2\,\eta) + \tfrac{1}{2}a\,(1 + 3\,\text{cof.}\,2\,\eta).$$

 In qua

In qua aequatione duplicis generis termini occurrunt: alteri absoluti, alteri vero per cof. 2η affecti, quos ergo feorfim inter fe aequari conuenit. Ex terminis igitur abfolutis orietur

$$-ann = -\frac{m}{aa} + \frac{1}{2}a, \text{ fiue } nn = \frac{m}{a^3} - \frac{1}{2},$$

vnde fit $\frac{m}{a^3} = nn + \frac{1}{2}$; at alteri termini, per cof. 2η diuifi, praebent

$$-4a\alpha(n-1)^2 - ann(\alpha + 2\beta) = \frac{2m\alpha}{aa} + \frac{3}{2}a, \text{ fiue}$$
$$4\alpha(n-1)^2 + nn(\alpha + 2\beta) + \frac{3}{2} = -\frac{2m\alpha}{a^3}.$$

§. 25. Tres igitur adepti fumus conditiones, quas adimpleri oportet, ex quarum fecunda $\frac{m}{a^3} = nn + \frac{1}{2}$, ftatim deduci poteft diftantia $a = \sqrt[3]{\frac{2m}{2nn+1}}$. Quodfi porro in tertia aequatione loco $\frac{m}{a^3}$, fcribatur valor $nn + \frac{1}{2}$, ea erit

$$4\alpha(n-1)^2 + nn(\alpha + 2\beta) + \frac{3}{2} = -2\alpha nn - \alpha,$$

fiue

$$4\alpha(n-1)^2 + 3\alpha nn + 2\beta nn + \alpha + \frac{3}{2} = 0.$$

Prima vero conditio dederat $\beta + 2\alpha = \frac{3}{4n(n-1)}$, vnde fit $\beta = \frac{3}{4n(n-1)} - 2\alpha$, qui valor in illa aequatione fubftitatus producit

$$4\alpha(n-1)^2 + \frac{3n}{2(n-1)} - \alpha nn + \alpha + \frac{3}{2} = 0,$$

fiue

$$\alpha(3nn - 8n + 5) = \frac{-3n}{2(n-1)} - \frac{3}{2} = -\frac{3(2n-1)}{2(n-1)},$$

vnde elicitur $\alpha = \frac{-3(2n-1)}{2(n-1)^2(3n-5)}$, hincque

$$\beta = \frac{3(11nn - 12n + 5)}{4n(n-1)^2(3n-5)}.$$

Pro diftantia autem a inuenimus $a = \sqrt[3]{\frac{2m}{2nn+1}}$.

§. 26.

§. 26. Hic autem probe notandum eſt, hos valores locum habere non poſſe, niſi numeri α et β fuerint valde exigui, vt earum quadrata et producta tuto negligi queant; vnde ſtatim patet, id fieri non poſſe, niſi numerus n accipiatur praegrandis. Ad hunc limitem aeſtimandum, quoniam poſuimus

$$v = a(1 + \alpha \operatorname{cof.} 2\eta) \text{ et } \frac{d\Phi}{d\theta} = n(1 + \beta \operatorname{cof.} 2\eta),$$

hinc quaeramus ipſum angulum Φ, qui erit

$$\Phi = n\theta + \beta n \int d\theta \operatorname{cof.} 2\eta,$$

vbi quia eſt

$$d\eta = d\Phi - d\theta = (n-1)d\theta, \text{ erit } d\theta = \frac{d\eta}{n-1};$$

vnde fit

$$\int d\theta \operatorname{cof.} 2\eta = \int \frac{d\eta \operatorname{cof.} 2\eta}{n-1} = \frac{\operatorname{fin.} 2\eta}{2(n-1)}$$

quamobrem habebimus $\Phi = n\theta + \frac{\beta n \operatorname{fin.} 2\eta}{2(n-1)}$; ex qua forma facile intelligitur, dummodo poſterior pars non ſuperet aliquot minuta prima, terminos neglectos tuto omitti poſſe. At vero vnum minutum primum in partibus radii eſt 0,00029, vnde ſi ſumamus $n = 100$, valor formulae $\frac{\beta n}{2(n-1)}$, producit tantum 0,000142, ideoque ſemi-minutum primum. Ex quo tuto concludere licet, limitem, quem numerus n ſuperare debet, ſatis tuto conſtitui poſſe $n = 50$. Poſito autem $n = 50$ fit

$$\beta = \frac{3.26905}{200.49^2.145} = 0,001159, \text{ hincque}$$

$$\frac{n\beta}{2(n-1)} = \frac{50.\beta}{98} = 0,00059,$$

quae fractio valet ſatis exacte duo minuta prima; quamobrem ſtatui poſſe videtur, quamdiu numerus n maior fuerit quam 50, formulas inuentas tam exacte cum veritate conſentire, vt error prorſus ſentiri nequeat; contra vero, ro, quo minor numerus n accipiatur quam 50, tum formulas noſtras continuo magis a veritate eſſe aberraturas, propterea quod his caſibus terminos, quos negleximus, non amplius omittere licet.

§. 27. Conſideremus igitur propius caſum quo $n = 50$, et quoniam iam inuenimus eſſe $\beta = 0,001159$, quaeramus etiam valorem ipſius $\alpha = -\frac{3(2n-1)}{2(n-1)^2(3n-5)}$, qui reperitur $\alpha = -0,000425$. Pro diſtantia autem a inueniendа, quia inuenimus $a^3 = \frac{2m}{2nn+1}$, erit

$$\frac{1}{a^3} = \frac{2nn+1}{2m} = \frac{1000000(2nn+1)}{6}, \text{ ob } m = \frac{3}{1000000}.$$

Cum igitur ſit $2nn + 1 = 5001$, erit $l\frac{1}{a^3} = 8,9209056$, ideoque $l\frac{1}{a} = 2,9736352$, conſequenter $\frac{1}{a} = 941$, ideoque $a = \frac{1}{941}$. Quare cum diſtantia Solis, quam hic vnitate deſignamus, contineat ſatis exacte 24000 ſemidiametros terrae, diſtantia huius Lunae a terra erit quaſi 25 ſemidiametrorum terreſtrium, ideoque plus quam duplo minor, quam diſtantia Lunae verae. Hinc autem motus talis Lunae per ſequentes duas aequationes exprimetur:

$$1^\circ.\ v = a(1 - 0,000425 \operatorname{cof.} 2\eta);$$
$$2^\circ.\ \Phi = 50\theta + 0,00059 \operatorname{fin.} 2\eta$$

ſiue in minutis ſecundis $\Phi = 50\theta + 122'' \operatorname{fin.} 2\eta$.

§. 28. Talis igitur Luna in diſtantia a Terra 25 ſemidiametrorum terreſtrium propemodum circulum motu vniformi eſſet deſcriptura, eiusque tempus periodicum ſupraeciſe foret pars quinquageſima vnius anni, ideoque ſuas reuolutiones perageret tempore $7^d.\ 7^h$. Interim tamen in eius motu quaedam exiguae inaequalitates deprehendentur

dentur ab elongatione huius Lunae a Sole pendentes, quas ergo, vti in vera Luna fieri ſolet, variationem appellare liceat, quibus tam diſtantia a terra, quam locus medius, in formula 50 θ contentus, afficietur; has ergo pro praecipuis angulis η hic ob oculos ponamus.

Variatio	$\eta = 0$ vel $= 180°$	$\eta = 45°$ vel $= 225°$
Diſtantiae	$-0,000425\,a$	0
Longitudo	0	$122''$

Variatio	$\eta = 90°$ vel $= 270°$	$\eta = 135°$ vel $= 315°$
Diſtantia	$0,000425\,a$	0
Longitudo	0	$-122''$

Scilicet in coniunctionibus et oppoſitionibus diſtantiam mediam a diminui oportet particula $\frac{a}{2352}$, quae tantum facit partem nonageſimam quartam ſemidiametri terrae, ſive circiter 9 milliaria Germanica; tum vero longitudo nulla eget correctione. Contra vero in quadraturis diſtantiam Lunae augeri oportet particula $\frac{a}{94}$, longitudo autem pariter nulla correctione indiget. At vero in octantibus, vbi $\eta = \begin{cases} 45° \\ 225 \end{cases}$ vel $\eta = \begin{cases} 135° \\ 315 \end{cases}$, diſtantia nullam correctionem poſtulat, longitudinem vero Φ priori caſu augeri, poſteriori vero diminui oportet quantitate $122''$, hoc eſt $2'$, $2''$. Multo minus autem motus talis Lunae a circulari vniformi foret diſcrepaturus, ſi eius diſtantia minor eſſet quam 25 ſemidiametrorum terrae.

§. 29. Quodſi velimus, vt talis Luna in ipſa ſuperficie terrae reuoluatur, ita vt ſit $a = \frac{1}{24000}$, hinc primo com-

computari debet valor numeri n, qui indicat, quot reuolutiones talis Luna interuallo vnius anni circa terram esset peractura. Cum igitur inuenerimus $nn + \frac{1}{2} = \frac{m}{a^3}$, erit

$$nn + \tfrac{1}{2} = 3 \cdot 240^3 \text{ ideoque } n = \sqrt{3 \cdot 240^3}$$

ex quo reperitur $n = 6439$. Toties scilicet talis Luna vno anno reuolueretur, qui numerus per 365 diuisus ostendet quoties talis Luna tempore 24 horarum circumferetur, scilicet $17\frac{2}{3}$, quod satis egregie conuenit cum calculo *Hugenii*, Euidens autem est valores α et β hoc casu prorsus euanescere.

§. 30. Quanquam autem his casibus, quibus distantia a non vltra 25 semidiametros terrestres exsurgit, eius distantia a terra exiguam variationem patitur, ita vt orbita non perfecte sit circularis, tamen tali orbitae ab Astronomis nulla excentricitas tribui solet, propterea quod inaequalitates a solo angulo η pendent, dum effectus excentricitatis ab Anomalia pendet, cuius hic nullum vestigium apparet. Quemadmodum etiam distantiae verae Lunae a terra, haud exiguam variationem paterentur, etiamsi eius excentricitas euanesceret.

§. 31. Cum determinationes hactenus inuentae tanquam exactissimae spectari queant, dummodo distantia talium Lunarum non notabiliter 25 semidiametros terrestres superet, hoc intelligi oportet, quando orbitae omni excentricitate carent, ita vt omnes inaequalitates tam in distantia, quam motus celeritate a sola elongatione Solis, siue angulo η pendeant, ad cuiusmodi motum producendum manifestum est tali Lunae initio certum motum imprimi

primi debuisse. Sin autem motus impressus tantillo fuerit maior vel minor, inde statim orietur quaepiam excentricitas, quae, dummodo fuerit satis parua, sequenti modo definiri poterit.

Inuestigatio motuum,
qui oriuntur, si in casibus praecedentibus praeter variationem etiam quam minima excentricitas accesserit.

§. 32. Quoniam pro effectu ab excentricitate oriundo certus quidam angulus in computum trahi debet, qui anomalia vocari solet, designemus istum angulum littera ζ, pro quo ponamus $d\zeta = i\,d\theta$, quem numerum i ex ipsis formulis nostris determinari oportet. Simili igitur modo, quo supra angulum η in calculum introduximus, nunc quoque angulum ζ introducamus, ideoque ponamus

$$v = a(1 + \alpha \operatorname{cos}. 2\eta + \gamma \operatorname{cos}. \zeta);$$
$$\frac{d\Phi}{d\theta} = n(1 + \beta \operatorname{cos}. 2\eta + \delta \operatorname{cos}. \zeta);$$

vbi pariter supponimus coefficientes γ et δ esse quam minimos, ita vt earum combinationes tam inter se quam cum litteris α et β negligi queant. Hinc igitur similis calculus institui debebit, vt ante, et quoniam litterae α et β iam sunt inuentae, hic tantum habebimus has formulas:

$$v = a(1 + \gamma \operatorname{cos}. \zeta) \text{ et } \frac{d\Phi}{d\theta} = n(1 + \delta \operatorname{cos}. \zeta).$$

Praeterea cum per litteras α et β omnes termini angulum η vel 2η inuoluentes iam ex aequationibus principalibus sint sublati, nunc sufficiet has aequationes considerasse:

$$1^\circ.\ \frac{ddv - v\,d\Phi^2}{d\theta^2} = -\frac{m}{vv} + \frac{1}{2}v \text{ et}$$
$$2^\circ.\ \frac{2\,dv\,d\Phi + v\,dd\Phi}{d\theta^2} = 0.$$

 §. 33.

§. 33. His obferuatis, cum fit $d\zeta = i\,d\theta$, per differentiationem nancifcemur

$$\frac{dv}{d\theta} = -i\,a\,\gamma \text{ fin. } \zeta \text{ et } \frac{ddv}{d\theta^2} = -i\,i\,a\,\gamma \text{ cof. } \zeta;$$

tum vero $\frac{dd\Phi}{d\theta^2} = -i\,n\,\delta \text{ fin. } \zeta$. Praeterea vero habebimus

$$\frac{1}{vv} = \frac{1}{aa}(1 + \gamma \text{ cof. } \zeta) = \frac{1}{aa}(1 - 2\gamma \text{ cof. } \zeta).$$

Hinc igitur pofterior aequatio induet hanc formam:

$$-2\,i\,n\,a\,\gamma \text{ fin. } \zeta - i\,a\,n\,\delta \text{ fin. } \zeta = 0,$$

vnde oritur $\gamma = -\frac{1}{2}\delta$. Prior autem aequatio facta fubftitutione induet hanc formam:

$$-i\,i\,a\,\gamma \text{ cof. } \zeta - a\,n\,n - a\,n\,n(2\delta + \gamma)\text{cof. } \zeta$$
$$= -\frac{m}{aa} + \frac{2m\gamma}{aa}\text{cof. } \zeta + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\,\gamma \text{ cof. } \zeta;$$

hinc termini abfoluti praebent, vt iam fupra inuenimus,

$$\frac{m}{aa} = a(nn + \tfrac{1}{2}),$$

reliqui vero per a cof. ζ diuifi dant

$$-ii\gamma - nn(2\delta + \gamma) = \frac{2m\gamma}{a^3} + \tfrac{1}{2}\gamma = (2nn + \tfrac{3}{2})\gamma.$$

Ante autem inuenimus $\delta = -2\gamma$, vnde fit

$$-ii + 3nn = 2nn + \tfrac{3}{2}, \text{ ideoque } ii = nn - \tfrac{3}{2}$$

fiue $i = \sqrt{(nn - \frac{3}{2})}$. Ipfa autem quantitas γ hinc non definitur, fed arbitrio noftro relinquitur; tam paruus autem valor ipfi tribui debet, vt hypothefis confiftere poffit.

§. 34. Hic quantitas ifta γ idem denotat, quod vulgo excentricitas vocari folet, at vero angulus ζ eft anomalia media et tempori θ ita proportionalis, vt fit

$$\frac{d\zeta}{d\theta} = i = \sqrt{(nn - \tfrac{3}{2})};$$

vbi notetur, fi effet $i = n$, tum anomaliam $\zeta = n\,\theta$ ipfi

motui

motui medio fore aequalem, ideoque lineam abſidum quieſcere. Quia autem hinc valor ipſius i tantillo fit minor, ſcilicet $i = n - \frac{3}{4n}$, motus anomaliae aliquanto tardior erit, ideoque linea abſidum aliquantillum progreditur; tum vero formulae motum determinantes erunt:

$$v = a(1 + \alpha \operatorname{cof.} 2\eta + \gamma \operatorname{cof.} \zeta) \text{ et}$$
$$\frac{d\Phi}{d\theta} = n(1 + \beta \operatorname{cof.} 2\eta + \delta \operatorname{cof.} \zeta).$$

Ex poſteriore colligitur

$$\Phi = n\theta + \frac{\beta n}{2(n-1)} \operatorname{fin.} 2\eta - \frac{2n\gamma \operatorname{fin.} \zeta}{i};$$

vbi meminiſſe conuenit eſſe, vti ſupra inuenimus

$$a = \sqrt{\frac{2m}{2nn+1}};\ \alpha = -\frac{3(2n-1)}{2(n-1)^2(3n-5)} \text{ et}$$
$$\beta = \frac{3(11nn - 12n + 5)}{4n(n-1)^2(3n-5)}$$

quibus ergo motus talis Lunae accurate exprimitur, ſi modo fuerit $n > 50$, ſiue $a < 25$ ſemidiametrorum terreſtrium, ipſa autem excentricitas γ tam parua, vt inaequalitas inde in motu orta, ſcilicet $\frac{2n\gamma}{i}$, in angulum conuerſa, non vltra aliquot minuta prima aſcendat; quod ob $i = n$ proxime euenit, ſi γ non ſuperet 0, 00029, qui eſt valor vnius minuti primi. Ex his enim formulis ad quoduis tempus tam diſtantiam talis Lunae a terra, quam eius veram longitudinem aſſignare licebit. Quod autem ad ipſum motum abſidum attinet, quoniam tempore vnius anni n reuolutiones peraguntur a termino fixo, at vero, reuolutiones a linea abſidum computando, pauciores reuolutiones, ſcilicet $i = n - \frac{3}{4n}$ abſoluuntur, linea abſidum interea proceſſiſſe cenſenda eſt per $\frac{3}{4n} \cdot 360° = \frac{270°}{n}$. Vnde ſi $n = 50$, motus annuus apogaei erit $\frac{27°}{5} = 5°, 24'$; quo maior autem fuerit numerus n, eo tardior erit iſte motus.

Tab. X. Fig. 6. §. 35. Vt iſte motus lineae abſidum clarius percipiatur, ſit $T\Pi$ recta ad apogaeum Π ducta, voceturque angulus $AT\Pi = \pi$, Luna autem verſetur in L, ita vt ſit angulus $ATL = \phi$ et anomalia $\Pi TL = \zeta$, eritque $\phi = \pi + \zeta$. Cum iam ſecundum motum medium ſit $d\phi = n\,d\theta$ et $d\zeta = i\,d\theta$, erit $d\pi = (n-1)\,d\theta$, vbi $\frac{d\pi}{d\theta}$ denotat celeritatem lineae abſidum, vnde, tempore per angulum θ expreſſo, linea abſidum promouebitur per angulum $(n-1)\theta$, ideoque tempore vnius anni, quo ſit $\theta = 360°$, linea abſidum progredietur per angulum $(n-1)\,360°$. Ex quo patet, ſi eſſet $i = n$, tum lineam abſidum perfecte quieſcere. In caſu vero oblato vidimus eſſe $i = \sqrt{(nn - \frac{3}{2})} = n - \frac{3}{4n}$; vnde ſequitur, interuallo vnius anni apogaeum Lunae promoueri per angulum $\frac{270°}{n}$, ſicque quo maior fuerit numerus n, hoc eſt, quo minor fuerit diſtantia a, eo tardiorem fore motum apogaei; contra vero eo celeriorem, quo minor fuerit n. Hoc autem tantum intelligi debet, quando $n > 50$ et $a < 25$ ſemidiametrorum terreſtrium; pro maioribus diſtantiis autem, vbi motus magis erit perturbatus, promotio lineae abſidum aliam ſequetur rationem, namque pro Luna vera eſt propemodum $n = 13$, vnde pro motu annuo apogaei iſta formula tantum praeberet $\frac{10}{13}.20°$, qui tamen reuera propemodum duplo eſt maior.

§. 36. In caſibus igitur hactenus tractatis, quibus $n > 50$ et excentricitas γ tam exigua vti ſupponimus, determinatio loci talis Lunae duas tantum correctiones poſtulat, quarum altera ab angulo 2η pendet, quae variatio vocatur, altera vero ab angulo ζ, quo anomalia deſignatur. Quando autem excentricitas γ notabiliter maior eſt quam

o,

0, 00029, hoc eſt quam $\frac{3}{10000}$, tum inſuper in calculum introduci neceſſe eſt terminos, qui oriuntur ex combinatione binorum terminorum, qui iam angulos 2η et ζ continent, vnde naſcuntur noui anguli, ſcilicet 2ζ, atque adeo porro 3ζ, 4ζ etc. ac praeterea etiam anguli $2\eta \pm \zeta$; imo etiam porro $2\eta \pm 2\zeta$, $2\eta \pm 3\zeta$ etc. Ex quo intelligitur, quo maior fuerit excentricitas γ, eo pluribus opus eſſe correctionibus ad locum talis Lunae determinandum.

§. 37. Haec ita ſe habent, quando numerus reuolutionum quotannis peractarum non notabiliter minor eſt quam 50, ſiue diſtantia media non multum ſuperat 25 ſemidiametros terreſtres. Conſideremus nunc etiam caſus, quibus diſtantia a multum ſuperat hunc limitem. Ac primo quidem omnem excentricitatem remoueamus, ita vt omnes inaequalitates a ſolo angulo η pendeant, et quoniam tum binos pluresue huiusmodi angulos inuicem combinari oportet, praeter angulum 2η etiam eius multipla in computum ingredientur, ſcilicet 4η, 6η etc.; tum vero, aucta diſtantia a vel v, ſeries pro $\frac{1}{u^3}$ inuenta vsque ad tertium terminum extendi debebit, vnde in noſtras aequationes etiam anguli η et 3η ingredientur, a quibus eae correctiones pendent, quae parallacticae vocari ſolent, quoniam a vera diſtantia Solis a Terra pendent.

§. 38. Quodſi iam praeterea excentricitas quam minima accedat, cui reſpondeat anomalia ζ, praeter angulos ante memoratos inſuper introducentur anguli $2\eta \pm \zeta$; $4\eta \pm \zeta$ ac fortaſſe etiam $6\eta \pm \zeta$; tum vero etiam ex parallacticis natae: $\eta \pm \zeta$ et $3\eta \pm \zeta$. Sin autem excentricitas

citas maior euadat, vt etiam angulorum 2ζ, 3ζ, 4ζ etc. ratio haberi debeat, per combinationem insuper accedent anguli $2\eta \pm 2\zeta$; $4\eta \pm 2\zeta$; $6\eta \pm 2\zeta$; etc. itemque porro anguli $2\eta \pm 3\zeta$; $4\eta \pm 3\zeta$; etc. quin etiam $\eta \pm 2\zeta$; $3\eta \pm 2\zeta$. Vnde patet, quo maior fuerit distantia Lunae a Terra, simulque excentricitas, numerum angulorum, a quibus omnes correctiones pendent, continuo magis increscere, atque adeo tandem tam magnum euadere posse, vt ob ipsam multitudinem determinatio fiat incerta, praeterquam quod labor, omnes istas correctiones per calculum definiendi, mox vires Analyseos esset superaturus.

§. 39. Haec clariora reddentur, si tabulas pro motu verae Lunae determinando contemplemur, quae primo manifesto inuoluunt angulos 2η, 4η, item 3η, ex quibus coniunctis variatio Lunae emergit; deinde secundo angulos ζ, 2ζ, 3ζ et 4ζ, qui coniunctim exhibent aequationem centri; tertio vero insuper accedunt anguli per combinationem orti, scilicet:

$2\eta \pm \zeta$; $4\eta \pm \zeta$; $2\eta \pm 2\zeta$; $4\eta \pm 2\zeta$; $2\eta \pm 3\zeta$; tum vero etiam $\eta \pm \zeta$; $3\eta \pm \zeta$. Hae scilicet correctiones solae sufficerent, si terra circa Solem vniformiter in circulo reuolueretur, simulque tota Lunae orbita in eclipticam incideret; verum ob motum Solis inaequabilem, anomalia etiam Solis et, ob inclinationem orbitae Lunaris, etiam argumentum Latitudinis in computum ingrediuntur, quos duos nouos angulos cum singulis praecedentium combinari oportet, vnde tantus correctionum numerus originem traxit.

§. 40. His perpensis abunde intelligitur, si daretur eiusmodi Luna, quae in multo maiori distantia circa ter-

terram reuolueretur, tum numerum omnium correctionum tantopere multiplicatum iri, vt motus plane non amplius per huiusmodi tabulas repraesentari posset, ideoque nobis etiamnunc foret inperscrutabilis; quamobrem summopere necesse erit, in alium modum maxime diuersum, huiusmodi Lunae motum repraesentandi, inquirere, cuius quidem adhuc ne vel minimam notionem nobis formare valemus. Hae autem difficultates eo magis increscent, quo propius orbita talis Lunae ad limitem sphaerae lunaris supra fixum, scilicet $a = \frac{1}{100}$ accesserit. Ac si talis Luna existeret, fateri cogeremur, nos nullam prorsus ideam eius motus ne mente quidem concipere posse, talemque motum prorsus fore inextricabilem, nisi forte nostra scientia analytica insignibus incrementis fuerit locupletata.

§. 41. Cum igitur, quo propius distantia talis Lunae ad limitem supra definitum $a = \frac{1}{100}$ appropinquauerit, eius motus continuo magis fiat irregularis, atque adeo vires nostri ingenii superet, eo magis est mirandum, quod in ipso limite $a = \frac{1}{100}$ contingere posset, vt Luna motu adeo vniformi in circulo circumferretur. Verum istum casum comparari conueniet cum eiusmodi statu aequilibrii, qui labilis seu caducus appellari solet. Veluti quando acus cuspide insistit: simul ac enim quam minime ob hoc statu fuerit aberratus, tota machina in ruinam delabitur. Simili modo si motus huiusmodi Lunae quam minime a motu illo regulari deficiat, subito maxime euadet irregularis, neque vllis regulis vel tabulis comprehendi poterit.

DE