



1783

De statu aequilibræ maris a viribus solis et lunæ sollicitati.

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De statu aequilibræ maris a viribus solis et lunæ sollicitati." (1783). *Euler Archive - All Works*. 546.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/546>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

D E

STATV AEQVILIBRII MARIS
A VIRIBVS SOLIS ET LVNAE
SOLLICITATI.

Auctore

L. EULER O.

§. I.

Cum olim quaestio de fluxu et refluxu maris summo studio sit pertractata, atque adeo tres dissertationes ab Academia Regia Scientiarum Parisina praemio sint condecoratae, hoc argumentum iam penitus exhaustum videbitur, ita ut nihil amplius desiderari queat. Quoniam vero illo tempore theoria de aequilibrio et motu fluidorum adhuc parum erat exulta, plurima ibi occurrunt, quae vel nimis operose et per plures ambages ex primis principiis sunt deducta, vel etiam hypothesebus precario assumtis et a veritate alienis sunt superstructa. Varias opiniones a veritate abhorrentes inualuerunt, cuiusmodi sunt, quod quantitas aestus marini potissimum ab interna Terrae structura, quae nobis penitus est incognita, atque adeo etiam a grauitate specifica aquae pendeat, ita ut, si ea effect

effet vel maior vel minor, etiam aestus marini inde prodirent vel minores vel maiores, cum tamen secundum vera principia huius Theoriae postmodum stabilita hae circumstantiae nihil ad scopum conferant.

§. 2. Quanquam autem hic praecipua quaestio circa motum maris versabatur, tamen omnes, qui eius enodationem illo tempore susceperunt, vnanimi consensu agnouerunt, nihil in hac re determinari posse, nisi status aequilibrui, in quo oceanus, a viribus tam Solis quam Lunae agitatus, aequiescere queat, accuratae definiatur; vnde etiam istum aequilibrui statum ex principiis tum temporis cognitis determinare sunt conati, dum ex viribus, quibus singula puncta in superficie maris sollicitantur, eam curuam inuestigarunt, quae ad omnes earum virium directiones medias esset normalis, quod principium vtique in natura rei est fundatum, sed difficillimas euolutiones analyticas postulat, quas vix, ac ne vix quidem, expedire licuit. Tum vero etiam ad canales vsque ad centrum Terrae excauatos confugerunt et in eam figuram maris inquisuerunt, vt omnes iste columnae fierent aequiponderantes, quae inuestigatio vtique exactam cognitionem structurae internae globi terraquei requirebat, quam quisque pro arbitrio ita finxerat, prouti scopo proposito maxime conuenire videbatur, cum tamen nuncquidem actum sit, inde vix quicquam ad hunc scopum conferri.

§. 3. Cum igitur post illud tempus theoriam de aequilibrio fluidorum ita mihi excolere et in lucem constituere contigerit, vt nihil insuper desiderari queat, his veris principiis insistens istud argumentum denno sum susceptu-

cepturus, quoniam hinc ad accuratam cognitionem status aequilibrii maris a viribus quibuscunque sollicitati perueniemus, qua omnes illae opiniones peruersae penitus remoueantur. Praeterea vero per haec noua principia tota ista inuestigatio a maximis illis difficultatibus, quibus antepremebatur, penitus liberabitur; atque hic imprimis summus vsus principii minimae actionis, quod illustrissimo Praefidi de Maupertuis acceptum referre debemus, clarissime elucebit, cum eo vtentes plurimas easque difficillimas integrationes euitare queamus. Ab isto igitur principio inchoemus.

Principium Vniuersale Aequilibrii Fluidorum.

Tab. V.
Fig. 1.

§. 4. Si singulae fluidi particulae Z ad quotcunque virium centra fixa C, C', C'' vrgeantur, viribus, quae sint cuicumque functioni distantiarum proportionales, tum superficies fluidi $A Z B$ erit in aequilibrio, si summa actionum, quas vires in singula puncta Z exerunt, vbique fuerit eadem. Hinc ergo si vocentur distantiae

$$CZ = z, C'Z = z', C''Z = z'' \text{ etc.,}$$

ipsae autem vires ad haec centra tendentes sint Z, Z', Z'' , etc., tum quia actiones harum virium per istas formulas exprimuntur: $\int Z dz, \int Z' dz', \int Z'' dz''$, pro statu aequilibrii statim habemus istam aequationem:

$$C = \int Z dz + \int Z' dz' + \int Z'' dz'',$$

vbi C denotat quantitatem constantem ex circumstantiis definiendam.

Status

Status quaestionis.

§. 5. Consideremus igitur totum globum terraequeum, siue circumquaque aqua circumfusum, siue ex aliqua tantum parte, cuius figura foret perfecte sphaerica, si nullae vires externae adessent; eius centrum sit in C, radius vero CA unitate designetur. Hic enim a motu vertiginis Terrae animum abstrahimus, ita ut totus globus in perfecta quiete versetur, et singulae eius particulae a sola grauitate versus centrum C vrgeantur, viribus utcunque a distantia pendentibus. In ipsa autem superficie vis grauitatis unitate exprimat. Quamcunque enim legem grauitas ad centrum accedendo tenuerit, si mutationes, quae eius figurae a viribus externis induci possunt, respectu totius magnitudinis Terrae fuerint quam minimae, prouti eas fore nouimus prope superficiem, vis grauitatis nunquam ab unitate discrepare censei potest. Tum vero facile intelligitur, quamcunque mutationem vires externae superficiei aquae induxerint in hypothese perfecta quietis, tum etiam admissio motu vertiginis eandem mutationem verae figurae Terrae, quae tum erit sphaeroidica, accidere debere, quandoquidem etiam hoc casu differentia a figura sphaerica est quam minima. Tota enim investigatio in eo versatur, ut, quantum superficies aquae a viribus externis ultra statum naturalem siue attollatur siue deprimatur, inquiri debeat, ac tum perinde erit, siue figura naturalis fuerit sphaerica, siue paulisper ab ea recedat. His igitur constitutis quaestio eo redit; ut dum vel Sol vel Luna in quocunque coeli loco versentur, ibique tanquam fixi concipiantur, pro singulis punctis in superficie maris assumptis quantitas actionis a viribus horum corporum nata rite defini-

definiatur. Vires autem tam Solis quam Lunae quadrato distantiarum reciproce proportionales assumemus.

De quantitate actionis a viribus Solis et Lunae orta.

§. 6. Quoniam pro statu aequilibrii maris indagando ad quoduis tempus tam Sol quam Luna in eodem coeli loco permanere concipi debent, siquidem pro finibus momentis status aequilibrii variatur, ponamus distantiam Solis a centro Terrae perpetuo = a , distantiam vero Lunae ab eodem centro = b , quae igitur pro diverso luminarium situ diversos valores recipere possunt, inter quos medium sumendo hae distantiae per radium Terrae unitate designatum ita definiuntur, ut sit $a = 24000$ et $b = 60\frac{1}{4}$ circiter. Praeterea vero vis Solis absoluta tanta sit, ut in distantia a centro Solis = a aequetur vi gravitatis = r ; pro Luna autem sit ista distantia, in qua eius vis gravitati aequaretur = β , unde, si distantia a Sole fuerit = z , vis Solis erit $\frac{a^2}{z^2}$; si autem z sit distantia a Luna, vis ibi ad Lunam tendens erit = $\frac{\beta^2}{z^2}$, ita ut hoc loco quantitates aa et $\beta\beta$ idem denotent, quod vulgo per massam Solis vel Lunae indicari solet. Colligitur autem ex nouissimis parallaxis solaris determinationibus, fore $aa = 355426$, unde fit $a = 596$, ita ut in distantia Solis tot semidiametris Terrae aequali vis Solis aequetur ipsi vi gravitatis in superficie Terrae. Pro Luna autem quantitas $\beta\beta$ a *Newtono* aestimata est $\frac{1}{25}$, *Celeb.* autem *Bernoulli* ostendit, eam esse notabiliter minorem, ita ut prope modum aestimari possit $\beta = \frac{1}{4}$, unde fieret $\beta\beta = \frac{1}{16}$.

§. 7.

§. 7. His igitur positis, si distantia siue Solis siue Lunae a puncto quocunque Z fuerit $=z$, erit vis hoc punctum sollicitans, scilicet $Z = \frac{\alpha\alpha}{z^2}$, pro Sole, et $Z = \frac{\beta\beta}{z^2}$, pro Luna. Hinc ergo quantitas actionis pro Sole erit $\int Z dz = -\frac{\alpha\alpha}{z}$ et pro Luna $= -\frac{\beta\beta}{z}$. Sit igitur C centrum Terrae et S centrum Solis, ac ponatur distantia $CS = a$; tum vero consideretur in superficie maris, postquam se iam ad aequilibrium composuerit, punctum quodcunque Z , cuius distantia a centro Terrae, quae iam erit aliquantillum siue maior siue minor unitate, sit $CZ = r$, angulus vero SCZ vocetur $=\Phi$, eritque distantia

Tab. V.
Fig. 3.

$$ZS = z = \sqrt{(aa - 2ar \cos. \Phi + rr)},$$

sicque quantitas actionis erit $= \frac{-\alpha\alpha}{\sqrt{(aa - 2ar \cos. \Phi + rr)}}$. Simili modo pro Luna, cuius distantiam a centro Terrae ponimus $=b$, si eius elongationem ab eodem puncto Z statuamus $=\Psi$, erit actio Lunae in punctum Z

$$= \frac{-\beta\beta}{\sqrt{(bb - 2br \cos. \Psi + rr)}}.$$

§. 8. Hic autem probe perpendendum est, Solem et Lunam eatenus tantum in punctum Z agere, quatenus actio discrepat ab ea, quae in centrum Terrae exercitur. Cum igitur hoc centrum in S in directione CS sollicitetur vi $= \frac{\alpha\alpha}{z^2}$, punctum Z a pari vi in directione contraria ZX vrgeri censendum est, existente ZX parallela ipsi CS ; ad eam igitur ex C ducatur perpendicularis CX , voceturque interuallum $ZX = x$. Haec igitur vis ad punctum fixum, in recta ZX infinite remotum, trahere censenda est, ita ut distantia, quam in genere posuimus $=z$, hic sit $x + \infty$. Quia igitur ipsa vis, quam

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. IV. P. I.

S posui-

posuimus Z, hic est constans $= \frac{\alpha\alpha}{aa}$, erit eius actio in punctum Z

$$\int Z dz = \int \frac{\alpha\alpha}{aa} dx = \frac{\alpha\alpha}{aa} x.$$

Cum igitur ob angulum $SCZ = \Phi$ fit $ZX = x = r \cos. \Phi$, ista actio erit $\frac{\alpha\alpha r \cos. \Phi}{aa}$, unde actio tota a Sole oriunda in punctum Z erit:

$$= \frac{\alpha\alpha}{\sqrt{(aa - 2ar \cos. \Phi + rr)}} + \frac{\alpha\alpha r \cos. \Phi}{aa},$$

similique modo tota actio a Luna in punctum Z exerta:

$$= \frac{\beta\beta}{\sqrt{(bb - 2br \cos. \Psi + rr)}} + \frac{\beta\beta r \cos. \Psi}{bb}.$$

Aequatio

pro statu aequilibrii maris a viribus Solis et Lunae sollicitati.

Tab. V.
Fig. 4.

§. 9. Hic igitur ante omnia vis grauitatis, qua punctum maris quodcunque Z ad ipsum centrum Terrae C vrgetur, considerari debet, quam, quia nullam mutationem sensibilem subire potest, ob variatam distantiam $CZ = r$, unitate designamus, ita vt hoc casu fit $z = r$ et $Z = 1$. Hinc ergo actio grauitatis in punctum maris Z erit $= r$. Quam ob rem si curva AZB denotet superficiem maris iam ad aequilibrium reductam; tum vero hoc tempore Sol et Luna versentur in punctis S et L, ita vt distantiae sint $CS = a$ et $CL = b$, anguli vero $SCZ = \Phi$ et $LCZ = \Psi$, summa omnium actionum, quibus punctum Z vrgetur, erit:

$$= r - \frac{\alpha\alpha}{\sqrt{(aa - 2ar \cos. \Phi + rr)}} + \frac{\alpha\alpha r \cos. \Phi}{aa} - \frac{\beta\beta}{\sqrt{(bb - 2br \cos. \Psi + rr)}} + \frac{\beta\beta r \cos. \Psi}{bb}$$

quae

quae ergo pro statu aequilibrii debet aequari quantitati constanti, quam designemus littera C, atque hoc modo pro figura, quam mare accipiet, statim nanciscimur istam aequationem finitam atque adeo algebraicam:

$$C = r - \frac{\alpha\alpha}{\sqrt{(aa - 2ar \cos. \Phi + rr)}} + \frac{\alpha\alpha r \cos. \Phi}{aa} - \frac{\beta\beta}{\sqrt{(bb - 2br \cos. \Psi + rr)}} + \frac{\beta\beta r \cos. \Psi}{bb}$$

Hinc igitur praestantia huius methodi, principio minimae actionis innixae, clarissime elucet, cum nobis statim aequationem algebraicam pro statu aequilibrii maris sit largita, dum olim ista determinatio per calculos molestissimos, ex hypothesebus precario assumtis, deriuari debuerit. Hi enim calculi plerumque abstrusissimas sectionum conicarum proprietates requirebant, simulque ita erant comparati, vt nullo modo pateret, quomodo ad aequationem algebraicam perueniri posset, nisi adhibitis approximationibus. Hic autem nulla adhuc approximatione sumus vsi.

§. 10. Nunc autem facillime eas approximationes, quae ad scopum nostrum erant accommodatae, expedire poterimus. Cum enim distantiae *a* et *b* sint praegrandes ratione radii $CZ = r$, euoluamus in genere hanc formulam

irrationalem: $(aa - \Omega)^{-\frac{1}{2}}$, quae praebet sequentem seriem:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2} \frac{\Omega}{a^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\Omega^2}{a^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\Omega^3}{a^7} + \text{etc.}$$

Nunc igitur pro Sole habemus $\Omega = 2ar \cos. \Phi - rr$, unde elicimus

$$\frac{1}{\sqrt{(aa - 2ar \cos. \Phi + rr)}} = \frac{1}{a} + \frac{r \cos. \Phi}{a^2} - \frac{rr}{2a^3} (1 - 3 \cos. \Phi^2) - \frac{r^3 \cos. \Phi}{2a^4} (3 - 5 \cos. \Phi^2),$$

S 2

simili

simili autem modo erit pro Luna:

$$\frac{r}{\sqrt{(bb - 2br \cos \psi + rr)}} = \frac{r}{b} + \frac{r \cos \psi}{bb} - \frac{rr}{2b^3} (1 - 3 \cos \psi^2) - \frac{r^2 \cos \psi}{2b^4} (3 - 5 \cos \psi^2).$$

Quoniam igitur hic prima membra constantia sub constante C complecti licet, tota aequatio in sequentem formam contrahetur:

$$0 = C + r + \frac{\alpha \alpha r r}{2a^3} (1 - 3 \cos \phi^2) + \frac{\alpha \alpha r^2 \cos \phi}{2a^4} (3 - 5 \cos \phi^2) + \frac{\beta \beta r r}{2b^3} (1 - 3 \cos \psi^2) + \frac{\beta \beta r^2 \cos \psi}{2b^4} (3 - 5 \cos \psi^2).$$

Quod si ergo breuitatis gratia statuamus $\frac{\alpha \alpha}{2a^3} = A$ et $\frac{\alpha \alpha}{2a^4} = \mathcal{A}$, tum vero $\frac{\beta \beta}{2b^3} = B$ et $\frac{\beta \beta}{2b^4} = \mathcal{B}$, aequatio nostra erit:

$$0 = C + r + A r r (1 - 3 \cos \phi^2) + \mathcal{A} r^2 \cos \phi (3 - 5 \cos \phi^2) + B r r (1 - 3 \cos \psi^2) + \mathcal{B} r^2 \cos \psi (3 - 5 \cos \psi^2)$$

mox autem patebit litteras A, B, \mathcal{A} , \mathcal{B} , fractiones esse quam minimas.

§. II. Hactenus radium Terrae in statu naturali vnitate expressimus. Quoniam vero excessum vel defectum quantitatis r supra vel infra hanc vnitatem in mensuris absolutis, scilicet pedibus, desideramus, ponamus radium Terrae naturalem $= k$; ita vt fit vti supra ostendimus $a = 596 k$ et $\beta = \frac{k}{3}$; tum vero pro distantiiis mediis Solis et Lunae $a = 24000 k$ et $b = 60 k$, tantum opus est, vt hac littera k omnes termini aequationis inuentae ad eundem dimensionum numerum reducantur; vnde cum in termino principali, qui est r , vnica sit dimensio, etiam in reliquis terminis vnica dimensio inesse debet; quare quia litterae α , β , a et b iam vniam dimensionem continent, aequatio nostra sequenti modo exhiberi debet:

0 =

$$0 = C + r + \frac{\alpha \alpha r r}{2 a^3} (1 - 3 \cos. \Phi^2) + \frac{\alpha \alpha r^3 \cos. \Phi}{2 a^4} (3 - 5 \cos. \Phi^2) \\ + \frac{\beta \beta r r}{2 b^3} (1 - 3 \cos. \Psi^2) + \frac{\beta \beta r^3 \cos. \Psi}{2 b^4} (3 - 5 \cos. \Psi^2)$$

quae ergo a praecedente non differt, et hoc nobis praestat commodum, ut nunc radium Terrae k tuto per quamcunque mensuram absolutam exprimere possimus, veluti in pedibus. Ex mensuris autem actu institutis iste radius terrae k deprehensus est continere 19601352 pedes parisinos.

§. 12. Quoniam igitur iam certi sumus distantiam r non ultra aliquot pedes a radio naturali k differre posse, statuamus $r = k + v$, ita ut v sit quantitas quam minima prae k , ideoque

$$r r = k k + 2 k v \text{ et } r^3 = k^3 + 3 k k v,$$

quibus valoribus introductis aequatio nostra pro quantitate v determinanda ita se habebit:

$$0 = C + k + \frac{\alpha \alpha k k}{2 a^3} (1 - 3 \cos. \Phi^2) + \frac{\alpha \alpha k^3 \cos. \Phi}{2 a^4} (9 - \cos. \Phi^2) \\ + \frac{\beta \beta k k}{2 b^3} (1 - 3 \cos. \Psi^2) + \frac{\beta \beta k^3 \cos. \Psi}{2 b^4} (3 - 5 \cos. \Psi^2) \\ + v (1 + \frac{\alpha \alpha k}{a^3} (1 - 3 \cos. \Phi^2) + \frac{\alpha \alpha k k \cos. \Phi}{2 a^4} (9 - \cos. \Phi^2)) \\ + \frac{\beta \beta k}{b^3} v (1 - 3 \cos. \Psi^2) + \frac{\beta \beta k k \cos. \Psi}{2 b^4} (3 - 5 \cos. \Psi^2),$$

vbi ergo $C + k$ quantitatem minimam exprimere debet. Quod si ergo loco $C + k$ scribamus $-c$ et priores terminos ad alteram partem aequationis transferamus, aequatio nostra hanc induet formam:

$$v (1 + \frac{\alpha \alpha k}{a^3} (1 - 3 \cos. \Phi^2) + \frac{\alpha \alpha k k \cos. \Phi}{2 a^4} (9 - \cos. \Phi^2)) \\ + \frac{\beta \beta k}{b^3} (1 - 3 \cos. \Psi^2) + \frac{\beta \beta k k \cos. \Psi}{2 b^4} (3 - 5 \cos. \Psi^2) \\ = c - \frac{\alpha \alpha k k}{2 a^3} (1 - 3 \cos. \Phi^2) - \frac{\alpha \alpha k^3 \cos. \Phi}{2 a^4} (9 - \cos. \Phi^2) \\ - \frac{\beta \beta k k}{2 b^3} (1 - 3 \cos. \Psi^2) - \frac{\beta \beta k^3 \cos. \Psi}{2 b^4} (3 - 5 \cos. \Psi^2),$$

vbi c est constans per integrationem ingressa, quam quovis casu ita determinari oportet, vt totum mare in statu mutato adhuc eandem aquae quantitatem contineat atque in statu naturali.

Evolutio numerica Aequationis inuentae per Pedes Parisinos.

§. 13. Primo igitur littera c certum numerum pedum designabit, ex quantitate omnis aquae, quam mare continet, definiendum; tum vero, vt supra vidimus, est $\alpha = 596 k$, $\beta = \frac{k}{v}$, pro distantis autem mediis Solis et Lunae sumamus $a = 24000 k$ et $b = 60 k$. Hinc ergo pro aequationis nostrae parte priore habebimus vt sequitur:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha \alpha k}{a^3} &= \frac{596^2}{24000^3} = 0,000000257 \\ \frac{\alpha \alpha k k}{2 a^4} &= \frac{596^2}{2 \cdot 24000^4} = 0,000000000 \\ \frac{\beta \beta k}{b^3} &= \frac{1}{64 \cdot 60^3} = 0,000000723 \\ \frac{\beta \beta k k}{2 b^4} &= \frac{1}{128 \cdot 60^4} = 0,000000006 \end{aligned}$$

vnde patet, pro prima parte nostrae aequationis sine vilo errore scribi posse v . Pro altera autem aequationis parte habebimus:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha \alpha k k}{2 a^3} &= \frac{596^2 \cdot k}{2 \cdot 24000^3} = 0,25183 \\ \frac{\alpha \alpha k^3}{6 a^4} &= \frac{596^2 \cdot k}{6 \cdot 24000^4} = 0,00000 \\ \frac{\beta \beta k k}{2 b^3} &= \frac{k}{2 \cdot 64 \cdot 60^3} = 0,70896 \\ \frac{\beta \beta k^3}{2 b^4} &= \frac{k}{6 \cdot 64 \cdot 60^4} = 0,00399. \end{aligned}$$

Hinc

Hinc igitur aequatio nostra hanc induet formam:

$$v = c - 0,25183(1 - 3 \cos. \Phi^2) - 0,70896(1 - 3 \cos. \Psi^2) - 0,00000 \cos. \Phi(3 - 5 \cos. \Phi^2) - 0,01197 \cos. \Psi(3 - 5 \cos. \Psi^2)$$

vnde valor ipsius v in pedibus Parisinis elicietur.

§. 14. Ponamus breuitatis gratia istos valores numericos modo inuentos, pro Sole: $0,25183 = m$, pro Luna autem: $0,70896 = n$ et $v = 0,01197$, vt fit:

$$v = c + m(3 \cos. \Phi^2 - 1) + n(3 \cos. \Psi^2 - 1) + v \cos. \Psi(5 \cos. \Psi^2 - 3).$$

Vbi notetur, valorem ipsius m , ad Solem pertinentem, satis esse iustum, dummodo ad distantiam mediam Solis et Terrae referatur, at vero valores n et v quodammodo adhuc esse incertos, quoniam a massa Lunae pendent, pro qua assumimus litteram $\beta = \frac{1}{3}k$, quemadmodum praecessio aequinoxiorum postulare videtur; fieri igitur posset vt aliquanto maior vel minor accipi deberet. Praeterea vero etiam hi valores ad distantiam mediam Lunae a Terra sunt accomodati, vnde eos, si Luminaria fuerint in Apogeo, paulisper diminui, in Perigeo autem augeri oportet. Quare cum excentricitas Solis sit quasi $\frac{1}{60}$, si Sol fuerit in Apogeo, littera m diminui debet in ratione triplicata distantiae, siue vt $1 : (1 + \frac{1}{60})^3$, quae ratio proxime est vt $1 : 1 \frac{1}{20}$, vnde pro Apogeo Solis fit $m = 0,23924$, pro Perigeo autem tanto maior, id est $m = 0,26442$. Deinde quia Lunae excentricitas est quasi $\frac{1}{18}$, pro eius Apogeo valor litterae n diminui debet sua parte sexta, ita vt fit $n = 0,59080$, pro Perigeo vero tantundem augeri, fietque $n = 0,82712$. Littera denique v , quae biquadrato

drato distantiae reciproce est proportionalis, pro Apogeo fiet $v = 0,00931$, pro Perigeo vero $v = 0,01463$. Hoc igitur modo harum litterarum valores minimi, medii et maximi ita se habebunt:

Valor	min.	med.	max.
<i>m</i>	0,23924	0,25183	0,26442
<i>n</i>	0,59080	0,70896	0,82712
<i>v</i>	0,00931	0,01197	0,01463

Sufficiet autem hos valores nosse, quoniam ridiculum foret, in hoc negotio minutiis inhaerere.

Applicatio Formulae inuentae ad superficiem Sphaericam.

Tab. V.
Fig. 5.

§. 15. Repraesentet iam circulus ABCD globum terraqueum, in cuius superficie notentur puncta S et L, quibus hoc tempore Sol et Luna verticaliter immineant, ita vt Sol versetur in zenith loci S, Luna vero in zenith loci L, et quaeramus statum maris, quem pro hoc luminarium situ esset accepturum. Consideremus igitur in maris superficie quodcunque punctum Z, quod supra libellam naturalem ab actione luminarium attollatur per intervallum $= v$, in pedibus Parisinis determinandum. Hinc ergo ad puncta S et L ducantur arcus circulorum maximorum ZS et ZL, qui vocentur $ZS = \phi$ et $ZL = \psi$, ac manifestum est angulum ϕ exprimere distantiam Solis a puncto zenith loci Z, similique modo angulus ψ distantiam Lunae ab eodem zenith, quibus positis spatium elevationis v supra libellam definietur hac aequatione:

$$v =$$

$$v = c + m(3 \cos. \Phi^2 - 1) + n(3 \cos. \Psi^2 - 1) + v \cos. \Psi(5 \cos. \Psi^2 - 3),$$

vbi quantitas constans c quouis casu ita debet determinari, vt facta mutatione status etiam nunc eadem copia aquae in mari proposito reperiatur.

§. 16. Ad hanc igitur constantem c inueniendam, Tab. V. tota figura eius maris, cuius status quaeritur, probe est Fig. 5. perpendenda, nisi quaestio instituatur de vniuerso oceano totam Terram ambiente. Sit igitur $abcd$ mare illud vnde quaque clausum et terminatum; cuius status aequilibrum pro descripto luminarium situ desideretur; eius quoduis elementum circa punctum Z situm designetur per dS , cui ergo insistit columna aquea altitudinis $= v$, ita vt eius volumen sit $v dS$. Haec igitur formula differentialis intendatur, eiusque integrale per totum spatium $abcd$ extendatur, vt obtineatur tota massa aquea huic spatio insistentis; quae cum esse debeat nihilo aequalis, ex aequatione $\int v dS = 0$ colligetur valor constantis c . Perspicuum autem est, hoc fieri non posse, nisi per totum spatium $abcd$ valores negatiui ipsius v valoribus positiuis aequiualeant. Ex quo facile intelligitur, valorem istius constantis c non solum a figura maris propositi $abcd$, sed etiam a positione luminarium S et L potissimum pendere, ita vt pro quouis alio situ ista inuestigatio de nouo institui debeat. Deinceps autem videbimus, quomodo hanc rationem expedire conueniat.

§. 17. Hic autem assumamus, istius litterae c valorem iam rite esse assignatum, et spatium $abcd$ per totam

T tam

tam Terrae superficiem esse extensum, vt, quantum aqua in singulis Terrae locis siue supra libellam attolli siue infra eam deprimi debeat, definire queamus. Ac primo quidem facile patet, aquam maxime eleuari debere in loco quodam inter puncta S et L sito, qui sit in E, quandoquidem nouimus, ab vtriusque luminaris actione seorsim considerata aquam maxime attolli in eo loco, cui lumine verticaliter imminet. Ponamus igitur distantiam luminarium $SL = \zeta$, ac translato puncto indefinito Z in E habebimus arcum $SE = \Phi$, arcum vero $LE = \zeta - \Phi = \psi$, ita vt sit $d\psi = -d\Phi$. Quare pro maximo valore ipsius ψ inueniendo, eius differentiale nihilo aequemus, at ob $d\psi = -d\Phi$ prodibit ista aequatio:

$$-6m \sin. \Phi \cos. \Phi + 6n \sin. \psi \cos. \psi + 15 \nu \sin. \psi \cos. \psi - 3 \nu \sin. \psi = 0,$$

vbi cum ν sit valde paruum prae m et n , erit proxime:

$$-m \sin. \Phi \cos. \Phi + n \sin. \psi \cos. \psi = 0, \text{ siue}$$

$$m \sin. 2\Phi = n \sin. 2\psi = n \sin. (2\zeta - 2\Phi),$$

sicque punctum E ibi reperietur, vbi erit

$$m \sin. 2SE = n \sin. 2LE.$$

§. 18. Cum igitur sit

$$\sin. (2\zeta - 2\Phi) = \sin. 2\zeta \cos. 2\Phi - \cos. 2\zeta \sin. 2\Phi,$$

hinc colligitur fore $\text{tang. } 2\Phi = \frac{n \sin. 2\zeta}{m + n \cos. 2\zeta}$. Quaeratur ergo angulus θ , cuius tangens sit $\frac{n \sin. 2\zeta}{m + n \cos. 2\zeta}$, et cum eadem quoque sit tangens anguli $\theta + 180^\circ$, hinc nanciscemur duos valores pro angulo Φ , quorum alter erit $\Phi = \frac{1}{2}\theta$, alter vero $\Phi = \frac{1}{2}\theta + 90^\circ$. Prior igitur manifesto dat locum

cum E, ubi aqua maxime eleuabitur, posterior vero eum locum, ubi maxime deprimetur, qui ergo a loco E intervallo quadrantis erit remotus in arcu SL producto. Simul vero etiam patet, in locis diametraliter oppositis aquam fore vel maxime eleuatam vel depressam.

§. 19. Haec autem, quoniam ad distantiam quamcunque inter luminaria spectant, nimis sunt generalia, quam ut inde conclusiones concinnas deriuare queamus. Infra autem has determinationes ad casus particulares accommodabimus. Nunc autem rem in genere considerantes videamus statum aquae tam in ipso loco S quam in loco L. Pro priore igitur, translato puncto Z in S, erit $\Phi = 0$ et $\psi = \zeta$, unde fit

$$v = c + 2m + n(3 \cos. \zeta^2 - 1) + \nu \cos. \zeta (5 \cos. \zeta^2 - 3)$$

at vero translato Z in L erit $\Phi = \zeta$ et $\psi = 0$, hincque

$$v = c + m(3 \cos. \zeta^2 - 1) + 2n + 2\nu.$$

Sin autem punctum Z ita capiatur, ut ambo arcus SZ et LZ fiant quadrantes, tum ob $\Phi = 90^\circ$ et $\psi = 90^\circ$ erit $v = c - m - n$, ubi ergo aqua semper erit maxime depressa.

Applicatio ad hypothesin, qua tota Terra aqua circumdata ponitur.

§. 20. Contemplemur nunc casum, quo tota Terra esset fluida, vel saltem continuo maris tractu cincta, et quaeramus valorem quantitatis constantis c pro quouis situ amborum luminarium, ut inde vera eleuatio maris super libellam naturalem in omnibus locis assignari queat.

T 2

Ad

Ad hoc igitur necesse est, vt formula integralis $\int v dS$ per totam Terrae superficiem extendatur et valor resultans nihilo aequetur; sic enim peruenietur ad aequationem, ex qua quantitas c facile determinari poterit. Vbi notetur, differentiale dS exprimere elementum quodcunque superficiei sphaericae.

§. 21. Cum igitur valor quantitatis v ex quatuor partibus sit compositus, quarum prima est ipsa constans c , quae quaeritur; secunda, actio a Sole orta $m(3 \cos. \Phi^2 - 1)$; tertia, actio principalis a Luna orta $n(3 \cos. \Psi^2 - 1)$; quarta denique, correctio istius actionis $= v \cos. \Psi (5 \cos. \Psi^2 - 3)$; singulas istas partes in elementum superficiei dS ducamus et integralia per totam superficiem Terrae extendamus, quo facto aggregatum omnium nihilo aequari debet. Prima igitur pars, seu constans c statim praebet $\int c dS = cS$, vbi loco S totam superficiem Terrae assumi oportet. Hic iterum radium Terrae vnitatem designemus, quandoquidem non quantitas absoluta spectatur, ac posita ratione diametri ad peripheriam vt $1 : \pi$, notum est, totam superficiem Sphaerae esse $= 4\pi$, vnde integrale ex prima parte ortum erit $= 4\pi c$.

Tab. V.
Fig. 6.

§. 22. Pro secunda parte $m(3 \cos. \Phi^2 - 1)$ circa punctum S in superficie sphaerica describamus circulum, intervallo $SZ = \Phi$, eritque $\sin. \Phi$ radius huius circuli in plano considerati, eiusque propterea peripheria $= 2\pi \sin. \Phi$. Iam tribuamus arcui $SZ = \Phi$ incrementum infinite paruum $Zz = d\Phi$, quod in peripheriam $2\pi \sin. \Phi$ ductum dabit incrementum areae istius areae circularis in superficie sphaerica, quod ergo erit $= 2\pi d\Phi \sin. \Phi$; quamobrem istud

istud incrementum per secundam partem $m(3 \cos. \Phi^2 - 1)$ multiplicetur, et integrari debet ista formula:

$$2 m \pi d \Phi \sin. \Phi (3 \cos. \Phi^2 - 1).$$

Hunc in finem ponamus

$$\cos. \Phi = x, \text{ eritque } d \Phi \sin. \Phi = -d x,$$

et formula integranda euadet $= -2 m \pi d x (3 x x - 1)$, cuius ergo integrale fit

$$2 m \pi (x - x^3) + C = 2 m \pi (\cos. \Phi - \cos. \Phi^3) + C,$$

quae constans C autem euanescit, quia integrale inuentum sponte fit $= 0$, sumto arcu $\Phi = 0$, ita vt integrale ex hac parte ortum sit $2 m \pi \cos. \Phi \sin. \Phi^2$, cuius valor vt per totam superficiem sphaericam extendatur, arcus indefinitus Φ sumi debet semicirculo aequalis; vnde, cum fiat $\sin. \Phi = 0$, euidens est, integrale ex secunda parte ipsius v natum sponte fieri $= 0$, atque hinc simul manifestum est, etiam integrale ex tertia parte oriundum ad nihilum reduci.

§. 23. Pro parte quarta ipsius v in figura loco S sumatur punctum L, voceturque arcus $LZ = SZ = \psi$, et quia elementum spatii circularis nunc erit $2 \pi d \psi \sin. \psi$, formula differentialis ex quarta parte nata erit

$$2 v \pi d \psi \sin. \psi \cos. \psi (5 \cos. \psi^2 - 3).$$

Faciamus hic iterum $\cos. \psi = x$, vt habeamus hanc formulam: $-2 v \pi x d x (5 x x - 3)$, cuius integrale est

$$-2 v \pi (\frac{5}{2} x^2 - \frac{3}{2} x x) = 2 v \pi (\frac{5}{2} \cos. \psi^2 - \frac{3}{2} \cos. \psi^2) + C.$$

Erit autem $C = \frac{1}{2} v \pi$. Extendatur nunc hoc integrale per totum Sphaeram, ponendo $\psi = 180$, atque etiam haec quarta pars euadet $= 0$.

§. 24. Hinc igitur patet, si tota terra continuo oceano esset obducta, tum semper fore constantem $c = 0$, in quocunque loco coeli ambo luminaria versentur, ita vt pro hac hypothese semper valeat ista aequatio:

$$v = m (3 \cos. \Phi^2 - 1) + n (3 \cos. \Psi^2 - 1) + v \cos. \Psi (5 \cos. \Psi^2 - 3),$$

vnde pro singulis Terrae locis eleuatio aquae supra libellam in pedibus parisinis definiri poterit. Scilicet si valor ipsius v prodeat positius, eleuatio supra libellam naturalem indicabitur; vbi autem obtinuerit valorem negatiuum, ibi depressio infra libellam indicabitur. Haec autem omnia intelligenda sunt de statu aequilibrii, quem actio luminarium Terrae esset inductura, si tam Terra quam ipsa luminaria perpetuo in eodem loco quiescerent. In hac igitur hypothese sequens Problema resolui poterit.

Problema.

§. 25. In hypothese Terrae quiescentis et oceano continuo circumdatae, si dentur in coelo loca Solis et Lunae, vbi per aliquot tempus commorari concipi debent, vt totus Oceanus se ad statum aequilibrii componere possit, in omnibus Terrae locis siue eleuationem siue depressionem aquae supra vel infra libellam naturalem determinare.

Solutio.

Tab. V.
Fig. 7.

Referat circulus AEBF superficiem Terrae, vbi A et B sint Poli borealis et australis, semicirculus vero AEB repraesentet primum meridianum, tum vero puncta S et L ea sint loca, quibus Sol et Luna verticaliter immineant, pro

pro quibus ductis meridianis AS et AL , sint longitudines $EAS = \zeta$ et $EAL = \eta$, distantiae vero a polo boreali A vocentur $AS = f$ et $AL = g$. Iam proponatur Terrae locus quicumque Z , cuius longitudo sit $EAZ = \omega$, et distantia a Polo $AZ = z$. Quo igitur pro hoc loco quantitas v possit definiri, eius distantiae a punctis S et L , scilicet arcus $ZS = \Phi$ et $ZL = \Psi$ quaeri debent. Pro priore $ZS = \Phi$ ex triangulo sphaerico ZAS , in quo habentur latera $AZ = z$ et $AS = f$, cum angulo intercepto $ZAS = \zeta - \omega$, deducitur:

$$\text{cof. } SZ = \text{cof. } \Phi = \text{cof. } f \text{ cof. } z + \text{fin. } f \text{ fin. } z \text{ cof. } (\zeta - \omega).$$

Simili modo ex triangulo ZAL , in quo habentur latera $ZA = z$ et $AL = g$, cum angulo intercepto $ZAL = \eta - \omega$, colligitur

$$\text{cof. } LZ = \text{cof. } \Psi = \text{cof. } g \text{ cof. } z + \text{fin. } g \text{ fin. } z \text{ cof. } (\eta - \omega).$$

His igitur duobus angulis Φ et Ψ inuentis, erit eleuatio aquae in loco Z supra libellam naturalem:

$$v = m(3 \text{ cof. } \Phi^2 - 1) + n(3 \text{ cof. } \Psi^2 - 1) + \nu \text{ cof. } \Psi(5 \text{ cof. } \Psi^2 - 3),$$

vbi litterarum m , n et ν valores pro ratione distantiae tam Solis quam Lunae ex §. 14 sunt desumendi.

Corollarium 1.

§. 26. Quod si ergo locus Z in ipso polo boreali A accipiatur, vt sit $z = 0$, statim habebitur $\Phi = f$ et $\Psi = g$, vnde pro hoc loco erit

$$v = m(3 \text{ cof. } f^2 - 1) + n(3 \text{ cof. } g^2 - 1) + \nu \text{ cof. } g(5 \text{ cof. } g^2 - 3).$$

Sin autem punctum Z in polo australi B accipiatur, fiet

$$\Phi =$$

$\Phi = 180^\circ - f$ et $\Psi = 180^\circ - g$,
 et pro hoc loco erit

$$v = m(3 \operatorname{cof}. f^2 - 1) + n(3 \operatorname{cof}. g^2 - 1) - \nu \operatorname{cof}. g(5 \operatorname{cof}. g^2 - 3),$$

vbi vltimum membrum contrario signo est affectum.

Corollarium 2.

§. 27. Si punctum Z in aequatore accipiatur, vt fit $z = 90^\circ$, manente longitudine indefinita $E A Z = \omega$, reperiatur

$$\operatorname{cof}. \Phi = \operatorname{fin}. f \operatorname{cof}. (\zeta - \omega) \text{ et } \operatorname{cof}. \Psi = \operatorname{fin}. g \operatorname{cof}. (\eta - \omega),$$

vnde eleuatio aquae erit,

$$v = m(3 \operatorname{fin}. f^2 \operatorname{cof}. (\zeta - \omega)^2 - 1) + n(3 \operatorname{fin}. g^2 \operatorname{cof}. (\eta - \omega)^2 - 1) + \nu \operatorname{fin}. g \operatorname{cof}. (\eta - \omega) (5 \operatorname{fin}. g^2 \operatorname{cof}. (\eta - \omega)^2 - 3).$$

Corollarium 3.

§. 28. Si Sol et Luna fuerint in coniunctione, vt fit $\eta = \zeta$ et $g = f$, erit

$$\operatorname{cof}. \Phi = \operatorname{cof}. \Psi = \operatorname{cof}. f \operatorname{cof}. z + \operatorname{fin}. f \operatorname{fin}. z \operatorname{cof}. (z - \omega),$$

quibus inuentis eleuatio in loco z reperiatur:

$$v = (m + n) (3 \operatorname{cof}. \Phi^2 - 1) + \nu \operatorname{cof}. \Phi (5 \operatorname{cof}. \Phi^2 - 3).$$

Sin autem Sol et Luna fuerint in oppositione, erit $\eta - \zeta = 180^\circ$ et $g = 180^\circ - f$, vnde cum fit

$$\operatorname{fin}. \eta = -\operatorname{fin}. \zeta, \operatorname{cof}. \eta = -\operatorname{cof}. \zeta,$$

$$\operatorname{fin}. g = \operatorname{fin}. f, \text{ et } \operatorname{cof}. g = -\operatorname{cof}. f,$$

sequitur fore

$$\operatorname{cof}. \Phi = \operatorname{cof}. f \operatorname{cof}. z + \operatorname{fin}. f \operatorname{fin}. z \operatorname{cof}. (\zeta - \omega) \text{ et}$$

$$\operatorname{cof}. \Psi = -\operatorname{cof}. f \operatorname{cof}. z - \operatorname{fin}. f \operatorname{fin}. z \operatorname{cof}. (\zeta - \omega).$$

Sicque

Sicque patet fore $\cos \psi = -\cos \Phi$, ex quibus eleuatio aquae in z colligitur:

$$v = (m + n)(3 \cos \Phi^2 - 1) - \nu \cos \Phi (5 \cos \Phi^2 - 3).$$

Scholion.

§. 29. In hac hypothefi commode accidit, vt pro omnibus locis Solis et Lunae quantitas constans c eundem valorem nanciscatur. Sin autem mare vndique claufum proponatur, quod tantum modicam portionem superficiei Terrae occuparet, tum pro quouis fitu luminarium valor istius quantitatis constantis c feorsim computari deberet, quod vtique calculum non parum moleftum postularet. Plerumque autem sufficere poterit differentiam tantum inter eleuationem aquae in variis locis talis maris determinasse, ita vt tum non opus fit veram quantitatem litterae c definire. Ceterum quoniam hoc loco mihi tantum fuit propositum, pro quouis fitu Solis ac Lunae, statum aequilibrii, in quo maria acquiescere queant, ex veris principiis determinare, hoc argumentum vltius non prosequor, neque quicquam de Phaenomenis fluxus et refluxus maris hic attingam, quippe quae iam dudum satis dilucide sunt tractata.