1783

Problematis cuiusdam Pappi Alexandrini constructio

Leonhard Euler

PROBLEMATIS CVIVSDAM PAPPI ALEXANDRINI CONSTRVCTIO.

Auctore

L. EVLERO.

Theorema.

Si a terminis rectae cuiuscunque A B ad circuli cuiuscunque punctum quoduis P ducantur rectae A P et B P, circulum secantes in A et B, tum vero puncta F et G ita capiantur, vt sit Tab. I. Fig. 1.

$AF = \frac{AP.Aa}{AB}$ et $BG = \frac{BP.Bb}{AB}$,

tum semper erit

$FP.Ff = GP.Gg = AF.BG.$

Demonstratio.

Repraesentetur positio rectae A B cum punctis F et G respectu centri illius circuli O, ac ponatur $AO = a$, $BO = b$, radius circuli $Om = On = r$ et $AB = c$; tum vero sit $FO = f$, $GO = g$, eritque $AP.Aa = An.Am$. Est vero $An = a + r$ et $Am = a - r$, ideoque

$AP.Aa = aa - rr.$

Simili

Simili modo erit

$$BP . Bb = B\nu . B\mu = (b + r)(b - r),$$

siue

$$BP . Bb = bb - rr.$$

Eodem modo colligitur fore

$$FP . Ff = ff - rr \text{ et } GP . Gg = gg - rr.$$

Sumtis igitur

$$AF = \frac{aa - rr}{c} \text{ et } BG = \frac{bb - rr}{c},$$

demonstrandum est fore

$$ff - rr = gg - rr = \frac{(aa - rr)(bb - rr)}{cc},$$

quem in finem sequens Lemma in subsidium erit vocandum.

Lemma.

Tab. I. Fig. 2. Si ex trianguli AOB puncto O ad lateris oppositi AB punctum datum F ducatur recta OF, erit

$$FO^2 = \frac{AO^2 . BF + BO^2 . AF}{AB} - AF . BF.$$

Demonstratio.

Demisso ex E in AB perpendiculo OΠ erit

$$AO^2 = A\Pi^2 + \Pi O^2 = (AF + F\Pi)^2 + FO^2 - F\Pi^2,$$

siue

$$AO^2 = AF^2 + FO^2 + 2 AF . F\Pi;$$

eodemque modo erit

$$BO^2 = BF^2 + FO^2 - 2 BF . F\Pi.$$

Si prior harum aequationum ducta in BF ad alteram in AF ductam addatur, prodibit

AO².

$$AO^2.BF + BO^2.AF = BF(AF^2 + FO^2) + AF(BF^2 + FO^2)$$

siue

$$AO^2.BF + BO^2.AF = FO^2.AB + BF.AF.AB,$$

vnde

$$FO^2 = \frac{AO^2.BF + BO^2.AF}{AB} - AF.BF. \quad Q. E. D.$$

Continuatio prioris demonstrationis.

Ponatur $AF = \frac{aa - rr}{c} = \alpha$, $BG = \frac{bb - rr}{c} = \beta$, Tab. I. Fig. 1.
eritque

$$aa = \alpha c + rr \text{ et } bb = \beta c + rr.$$

Iam ex Lemmate erit

$$cff = aa(c - \alpha) + bb\alpha - \alpha c(c - \alpha),$$

et si loco aa et bb substituantur valores modo dati, habebitur

$$cff = crr + \alpha\beta c, \text{ siue } ff - rr = \alpha\beta.$$

Cum porro sit

$$GO^2 = \frac{BO^2.AF + AO^2.BF}{AB} - AF.BF,$$

eodem modo demonstratur fore

$$cgg = crr + \alpha\beta c, \text{ sive } gg - rr = \alpha\beta$$

hincque

$$ff - rr = gg - rr = \frac{(aa - rr)(bb - rr)}{cc}. \quad Q. E. D.$$

Hinc sequens formari potest

Theorema.

Si ex trianguli ABC puncto O ad basin AB duae ducantur rectae inter se aequales OF et OG, erit $AO^2 - AB.AF = BO^2 - AB.BG$. Fig. 2.

Demonstratio.

Demisso ex vertice O perpendiculo O Π, erit

$F\Pi = G\Pi = \frac{1}{2} FG$.

Cum igitur sit

$AO^2 = AF^2 + FO^2 + 2\, AF.F\Pi$, siue

$AO^2 = AF^2 + FO^2 + AF.FG$, erit

$AO^2 = FO^2 + AF.AG$.

Simili modo erit $BO^2 = FO^2 + BF.BG$. Ex priore fit

$FO^2 = AO^2 - AF.AG$, vnde

$FO^2 - AF.BG = AO^2 - AB.AF$.

Ex altera fit

$FO^2 = BO^2 - BE.BG$, consequenter

$FO^2 - AF.BG = BO^2 - AB.BG$,

vnde sequitur

$AO^2 - AB.AF = BO^2 - AB.BG$. Q. E. D.

Corollarium.

Quotius igitur fuerit

$AO^2 - AB.AF = BO^2 - AB.BG = \Delta$,

binae rectae FO et GO erunt inter se aequales, simulque erit $FO^2 - AF.BG = \Delta$. Quod si ergo capiatur

$AF = \frac{AO^2 - \Delta}{AB}$ et $BG = \frac{BO^2 - \Delta}{AB}$

erit $FO = GO$. At in praecedente Theoremate erat

$AF = \frac{aa - rr}{c}$ et $BG = \frac{bb - rr}{c}$, vnde

$\Delta = rr$, $AF = \frac{AO^2 - rr}{AB}$, $BG = \frac{BO^2 - rr}{AB}$ et

$FO^2 - rr = AF.BG$.

Proble-

Problema.

Circulo dato, centro O descripto, triangulum $a b c$ inscribere, cuius tria latera $a b$, $a c$, $b c$, producta, per data tria puncta C, B, A, transeant. Tab. I. Fig. 3.

Constructio.

Sint A, B, C, tria puncta data, quorum distantiae a centro circuli O sint $AO = a$, $BO = b$, $CO = c$, radio circuli existente $= 1$. Iam ex puncto B capiatur interuallum $BF = \frac{bb - 1}{AB}$ eritque $FO^2 - 1 = \frac{BF(aa - 1)}{AB}$. Tum iuncta recta FC, super ea capiatur interuallum

$$FK = \frac{FO^2 - 1}{FC} = \frac{BF(aa - 1)}{AB.FC}, \text{ eritque}$$

$$KO^2 - 1 = \frac{FK(cc - 1)}{FC}.$$

Iam ex centro O talis ducatur radius Om, vt sit cosinus anguli $KOm = \frac{\cos. BFC}{KO}$. Tum bisecetur angulus BFC recta FS, cui ex puncto m parallela agatur recta mb, eritque b unus angulorum trianguli quaesiti, ad quem si ex puncto A ducatur recta AB, ea producta circulum in C secabit. Ex hoc puncto C ad B ducatur recta CB circulum secans in a; tum vero latus ba productum per tertium punctum datum C transibit, eritque abc triangulum quaesitum.

Corollarium 1.

Sint duo punctorum datorum A et C infinite distantia in rectis ABA, CBC se mutuo in B decussantibus. Ex B ducatur recta Bca, resecans a circulo arcum ca; cui in peripheria insistant anguli, angulo CBA Fig. 4.

aequa-

aequales, tum ductis ex a rectis ab ipſi CBC, et bc ipſi ABA parallelis, erit abc triangulum quaeſitum.

Corollarium 2.

Tab. I. Fig. 5. Cadant omnia tria puncta data ad diſtantias infinitas in rectis OA, OB, OC; tum rectae OA parallela agatur recta bc ad diſtantiam a centro OX = coſ. BOC; tum ductis rectis ba ipſi OC et ca ipſi OB parallelis habebitur triangulum quaeſitum.

Scholion 1.

Ceterum hic probe notandum eſt, conſtructionem ſupra datam duas ſolutiones ſuppeditare, prout angulus KOm dextrorſum ſiue ſiniſtrorſum accipitur. Praeterea vero, cum tria puncta A, B, C, inter ſe ſint permutabilia, ſex diuerſis modis conſtructio hic data inſtitui poteſt, qui ergo omnes easdem binas ſolutiones praebere debent, cuius rei tamen nulla ratio patet.

Scholion 2.

Fig. 6. Hoc Problema etiam pro ſphaera reſolui poteſt, ita vt circulo minori in ſphaera deſcripto triangulum ſphaericum abc inſcribi debeat, ita comparatum, vt eius latera producta ab, ac, bc, tranſeant per data tria puncta in ſphaerae ſuperficie, C, B, A. Concipiatur enim planum, ſphaeram in centro circuli O tangens, ſuper quo triangulum planum modo praeſcripto iam ſit conſtructum; eiusque translatio ad ſuperficiem ſphaerae erit facillima, cum omnes anguli circa centrum in ſuperficie tam plani quam ſphaerae ſint iidem, diſtantiae vero punctorum datorum A, B, C et angulorum trianguli a, b, c a centro O in tangentes abeant.

SOLV-