1783

Problematis cuiusdam Pappi Alexandrini constructio

Leonhard Euler

PROBLEMATIS CVIVSDAM PAPPI ALEXANDRINI CONSTRVCTIO.

Auctore

L. EVLERO.

Theorema.

Si a terminis rectae cuiuscunque A B ad circuli cuiuscunque punctum quoduis P ducantur rectae A P et B P, circulum secantes in A et B, tum vero puncta F et G ita capiantur, vt sit Tab. I. Fig. 1.

$AF = \frac{AP.Aa}{AB}$ et $BG = \frac{BP.Bb}{AB}$,

tum semper erit

$FP.Ff = GP.Gg = AF.BG.$

Demonstratio.

Repraesentetur positio rectae A B cum punctis F et G respectu centri illius circuli O, ac ponatur $AO = a$, $BO = b$, radius circuli $Om = On = r$ et $AB = c$; tum vero sit $FO = f$, $GO = g$, eritque $AP.Aa = An.Am$. Est vero $An = a + r$ et $Am = a - r$, ideoque

$AP.Aa = aa - rr.$

Simili

Similli modo erit

$$BP.Bb = B\nu.B\mu = (b+r)(b-r),$$

siue

$$BP.Bb = bb - rr.$$

Eodem modo colligitur fore

$$FP.Ff = ff - rr \text{ et } GP.Gg = gg - rr.$$

Sumtis igitur

$$AF = \frac{aa - rr}{c} \text{ et } BG = \frac{bb - rr}{c},$$

demonstrandum est fore

$$ff - rr = gg - rr = \frac{(aa - rr)(bb - rr)}{cc},$$

quem in finem sequens Lemma in subsidium erit vocandum.

Lemma.

Tab. I. Fig. 2. Si ex trianguli AOB puncto O ad lateris oppositi AB punctum datum F ducatur recta OF, erit

$$FO^2 = \frac{AO^2.BF + BO^2.AF}{AB} - AF.BF.$$

Demonstratio.

Demisso ex E in AB perpendiculo OΠ erit

$$AO^2 = A\Pi^2 + \Pi O^2 = (AF + F\Pi)^2 + FO^2 - F\Pi^2,$$

siue

$$AO^2 = AF^2 + FO^2 + 2\,AF.F\Pi;$$

eodemque modo erit

$$BO^2 = BF^2 + FO^2 - 2\,BF.F\Pi.$$

Si prior harum aequationum ducta in BF ad alteram in AF ductam addatur, prodibit

AO².

$$AO^2.BF+BO^2.AF=BF(AF^2+FO^2)+AF(BF^2+FO^2)$$

siue

$$AO^2.BF+BO^2.AF=FO^2.AB+BF.AF.AB,$$

vnde

$$FO^2=\frac{AO^2.BF+BO^2.AF}{AB}-AF.BF.\quad \text{Q. E. D.}$$

Continuatio prioris demonstrationis.

Ponatur $AF=\frac{aa-rr}{c}=\alpha$, $BG=\frac{bb-rr}{c}=\beta$, eritque Tab. I. Fig. 1.

$$aa=\alpha c+rr \text{ et } bb=\beta c+rr.$$

Iam ex Lemmate erit

$$cff=aa(c-\alpha)+bb\alpha-\alpha c(c-\alpha),$$

et si loco aa et bb substituantur valores modo dati, habebitur

$$cff=crr+\alpha\beta c,\text{ siue } ff-rr=\alpha\beta.$$

Cum porro sit

$$GO^2=\frac{BO^2.AF+AO^2.BF}{AB}-AF.BF,$$

eodem modo demonstratur fore

$$cgg=crr+\alpha\beta c,\text{ siue } gg-rr=\alpha\beta$$

hincque

$$ff-rr=gg-rr=\frac{(aa-rr)(bb-rr)}{cc}.\quad \text{Q. E. D.}$$

Hinc sequens formari potest

Theorema.

Si ex trianguli ABC puncto O ad basin AB duae ducantur rectae inter se aequales OF et OG, erit $AO^2-AB.AF=BO^2-AB.BG.$ Fig. 2.

Demonſtratio.

Demiſſo ex vertice O perpendiculo O Π, erit

$F\,\Pi = G\,\Pi = \frac{1}{2} F\,G.$

Cum igitur ſit

$A\,O^2 = A\,F^2 + F\,O^2 + 2\,A\,F.\,F\,\Pi$, ſiue

$A\,O^2 = A\,F^2 + F\,O^2 + A\,F.\,F\,G$, erit

$A\,O^2 = F\,O^2 + A\,F.\,A\,G.$

Simili modo erit $B\,O^2 = F\,O^2 + B\,F.\,B\,G$. Ex priore fit

$F\,O^2 = A\,O^2 - A\,F.\,A\,G$, vnde

$F\,O^2 - A\,F.\,B\,G = A\,O^2 - A\,B.\,A\,F.$

Ex altera fit

$F\,O^2 = B\,O^2 - B\,E.\,B\,G$, conſequenter

$F\,O^2 - A\,F.\,B\,G = B\,O^2 - A\,B.\,B\,G,$

vnde ſequitur

$A\,O^2 - A\,B.\,A\,F = B\,O^2 - A\,B.\,B\,G.$ Q. E. D.

Corollarium.

Quotius igitur fuerit

$A\,O^2 - A\,B.\,A\,F = B\,O^2 - A\,B.\,B\,G = \Delta,$

binae rectae F O et G O erunt inter ſe aequales, ſimulque erit $F\,O^2 - A\,F.\,B\,G = \Delta$. Quod ſi ergo capiatur

$A\,F = \frac{A\,O^2 - \Delta}{A\,B}$ et $B\,G = \frac{B\,O^2 - \Delta}{A\,B}$

erit $F\,O = G\,O$. At in praecedente Theoremate erat

$A\,F = \frac{aa - rr}{c}$ et $B\,G = \frac{bb - rr}{c}$, vnde

$\Delta = rr$, $A\,F = \frac{A\,O^2 - rr}{A\,B}$, $B\,G = \frac{B\,O^2 - rr}{A\,B}$ et

$F\,O^2 - rr = A\,F.\,B\,G.$

Proble-

Problema.

Circulo dato, centro O deſcripto, triangulum $a\,b\,c$ inſcribere, cuius tria latera $a\,b$, $a\,c$, $b\,c$, producta, per data tria puncta C, B, A, tranſeant. Tab. I. Fig. 3.

Conſtructio.

Sint A, B, C, tria puncta data, quorum diſtantiae a centro circuli O ſint $AO = a$, $BO = b$, $CO = c$, radio circuli exiſtente $= 1$. Iam ex puncto B capiatur interuallum $BF = \frac{bb - 1}{AB}$ eritque $FO^2 - 1 = \frac{BF(aa - 1)}{AB}$. Tum iuncta recta FC, ſuper ea capiatur interuallum

$$FK = \frac{FO^2 - 1}{FC} = \frac{BF(aa - 1)}{AB.\,FC}, \text{ eritque}$$

$$KO^2 - 1 = \frac{FK(cc - 1)}{FC}.$$

Iam ex centro O talis ducatur radius Om, vt ſit coſinus anguli $KOm = \frac{\text{coſ.}\,BFC}{KO}$. Tum biſecetur angulus BFC recta FS, cui ex puncto m parallela agatur recta $m\,b$, eritque b unus angulorum trianguli quaeſiti, ad quem ſi ex puncto A ducatur recta AB, ea producta circulum in C ſecabit. Ex hoc puncto C ad B ducatur recta CB circulum ſecans in a; tum vero latus $b\,a$ productum per tertium punctum datum C tranſibit, eritque $a\,b\,c$ triangulum quaeſitum.

Corollarium 1.

Sint duo punctorum datorum A et C infinite diſtantia in rectis ABA, CBC ſe mutuo in B decuſſantibus. Ex B ducatur recta $B\,c\,a$, reſecans a circulo arcum $c\,a$, cui in peripheria inſiſtant anguli, angulo CBA Fig. 4.

aequa-

aequales, tum ductis ex a rectis $a\,b$ ipsi C B C, et $b\,c$ ipsi A B A parallelis, erit $a\,b\,c$ triangulum quaesitum.

Corollarium 2.

Tab. I. Fig. 5. Cadant omnia tria puncta data ad distantias infinitas in rectis O A, O B, O C; tum rectae O A parallela agatur recta $b\,c$ ad distantiam a centro O X = cos. B O C; tum ductis rectis $b\,a$ ipsi O C et $c\,a$ ipsi O B parallelis habebitur triangulum quaesitum.

Scholion 1.

Ceterum hic probe notandum est, constructionem supra datam duas solutiones suppeditare, prout angulus K O m dextrorsum siue sinistrorsum accipitur. Praeterea vero, cum tria puncta A, B, C, inter se sint permutabilia, sex diuersis modis constructio hic data institui potest, qui ergo omnes easdem binas solutiones praebere debent, cuius rei tamen nulla ratio patet.

Scholion 2.

Fig. 6. Hoc Problema etiam pro sphaera resolui potest, ita vt circulo minori in sphaera descripto triangulum sphaericum $a\,b\,c$ inscribi debeat, ita comparatum, vt eius latera producta $a\,b$, $a\,c$, $b\,c$, transeant per data tria puncta in sphaerae superficie, C, B, A. Concipiatur enim planum, sphaeram in centro circuli O tangens, super quo triangulum planum modo praescripto iam sit constructum; eiusque translatio ad superficiem sphaerae erit facillima, cum omnes anguli circa centrum in superficie tam plani quam sphaerae sint iidem, distantiae vero punctorum datorum A, B, C et angulorum trianguli a, b, c a centro O in tangentes abeant.

SOLV-