



1783

De mirabilis proprietatibus numerorum pentagonalium

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De mirabilis proprietatibus numerorum pentagonalium" (1783). *Euler Archive - All Works*. 542.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/542>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE

MIRABILIBVS PROPRIETATIBVS NUMERORVM PENTAGONALIVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. I.

Ad classẽ numerorum pentagonalium non solum eos refero, qui vulgo proprie ita nominari solent & in formula $\frac{3n^2 - n}{2}$ continentur, sed etiam eos, quos ista formula: $\frac{3n^2 + n}{2}$ suppeditat; ita vt formula generalis omnium horum numerorum sit $\frac{3n^2 \mp n}{2}$, ex qua igitur nascitur sequens geminata numerorum series, si loco n successiue scribantur ordine numeri 0, 1, 2, 3, 4, etc.

n	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
Numeri	0, 1, 5, 12, 22, 35, 51
pentagon.	0, 2, 7, 15, 26, 40, 57

Quilibet scilicet numerus pro n assumtus duos producit numeros, quos hic sibi inuicem subscripsi, ita vt series superior contineat numeros pentagonales proprie ita dictos, inferior vero eos, quos hic quoque ad eandem classẽ refero, et qui oriuntur si superior series retro continue-
tur.

tur. Hic autem binos coniunctim exhibeo, qui ex eodem numero n in formula $\frac{n^2 + n}{2}$ oriuntur, quoniam in sequentibus eos horum numerorum distinguemus, qui vel ex numeris paribus vel imparibus pro n assumtis nascuntur.

§. 2. Quod si hos numeros ordine magnitudinis in unam seriem coniiciamus, orietur ista progressio:

0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, etc.

cuius ordo manifesto est interruptus, quoniam progressio differentiarum hinc fit

1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, etc.

quae mixta est ex serie numerorum naturalium et imparium. At vero ista series ad continuitatem perducipotest, si post tertium quemque terminum certa fractio interpoletur. Scilicet inter terminos 2 et 5 constituatur $\frac{10}{3}$, tum vero $\frac{28}{3}$ inter 7 et 12, porro $\frac{55}{3}$ inter 15 et 22, ita ut series completa fit

1, 2, $\frac{10}{3}$, 5, 7, $\frac{28}{3}$, 12, 15, $\frac{55}{3}$, 22, 26, etc.

sic enim series differentiarum lege continua procedet, dum erit

1, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, 2, $\frac{7}{3}$, $\frac{8}{3}$, 3, $\frac{10}{3}$, $\frac{11}{3}$, 4, etc.

Manifestum autem est, illam seriem oriri, si omnes numeri trigonales per 3 diuidantur. Hinc igitur iam pulchra se offert proprietas nostrorum numerorum pentagonalium, quod singuli ter sumti euadant numeri trigonales.

§. 3. Tales autem proprietates, quas immediate ex formulis generalibus deriuare licet, etiam in aliis numeris polygonalibus locum habere possunt, ad quas igitur
Acta Acad. Imp. Sc. Tom. IV. P. I. H tur

tur non respicio; cum mihi potius propositum fit quasdam proprietates admirabiles commemorare, quibus numeri pentagonales prae omnibus reliquis polygonalibus sunt praediti. Atque hic occurrit illa insignis horum numerorum proprietas, qua iam olim ostendi, istam numerorum pentagonalium seriem tam arte cum progressionem, quam summae diuisorum numerorum naturalium confituunt, esse connexam, ut eius ope adeo lex istius seriei maxime irregularis assignari possit, id quod breuiter repetere operae pretium erit.

§. 4. Quod si quilibet numerus N cum suis diuisoribus in vnam summam colligatur, quam summam hoc caractere: fN indicemus, ex numeris naturalibus sequens nascetur series primo intuitu maxime irregularis:

N	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
fN	1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 15, 13, 18, 12

vbi termini tam inordinate progrediuntur, dum modo crescunt modo decrescunt, ut vix quisquam eorum legem deteget, quandoquidem ista series ordinem numerorum primorum manifesto in se inuoluit.

§. 5. Interim tamen demonstraui, istam progressionem, quantumuis irregularem, ad classem serierum recurrentium esse referendam, et singulos eius terminos secundum certam legem ex praecedentibus determinari posse. Quod si enim fN denotet summam omnium diuisorum huius numeri N , ipso non excepto, inueni semper fore

$$fN = f(N-1) + f(N-2) - f(N-5) - f(N-7) + f(N-12) + f(N-15) - f(N-22) - f(N-26) + \text{etc.}$$

vbi

vbi numeri, qui successive ab N subtrahuntur, constituunt manifesto nostram seriem numerorum pentagonalium

1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, etc.

ita vt termini, ex numeris imparibus pro n assumtis oriundi habeant signum +, qui vero ex paribus nascuntur signum -. Tum vero, quouis casu has formulas eo vsque continuari oportet, quoad numeri post signum f scripti non euadant negatiui; at si occurrat formula $f(N - N)$, eius loco scribi debet ipse numerus N . Ita si sumamus $N = 12$, erit

$$f_{12} = f_{11} + f_{10} - f_7 - f_5 + f_0$$

ideoque erit:

$$f_{12} = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28.$$

At vero si sumamus $N = 13$, erit

$$f_{13} = f_{12} + f_{11} - f_8 - f_6 + f_1$$

sive erit

$$f_{13} = 28 + 12 - 15 - 12 + 1 = 14.$$

§. 6. Quoniam igitur ordo, quo summae diuisorum progrediuntur, merito maxime irregularis videtur, nemini certe in mentem venire potuit, eum per numeros pentagonales explorari potuisse, ex quo ista speculatio vtiq; maxime est admiranda. Afferam autem adhuc aliam eiusmodi proprietatem, quae quidem cum exposita arctissime est connexa, attamen ad plures non minus admirandas proprietates perducit, quae omnes pariter in natura numerorum nostrorum pentagonalium sunt fundatae.

§. 7. Fundamentum autem omnium harum mirabilium proprietatum in evolutione huius producti infiniti:

$S = (1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)$ (etc. continetur: demonstraui enim, si singuli hi factores actu in se inuicem multiplicentur, tum denique resultare istam seriem:

$S = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}$
 vbi exponentes ipsius x constituunt nostram seriem numerorum pentagonalium, ratione signorum autem $+$ et $-$ ambo alternatim geminantur, ita vt qui exponentes ex numeris paribus pro n assumtis oriuntur, eae potestates habeant signum $+$, reliqui vero ex imparibus ortis signum $-$. Haec igitur non minus admirationem nostram meretur quam proprietas ante commemorata, cum nulla certe appareat ratio, vnde vllus nexus intelligi possit inter evolutionem illius producti et nostros numeros pentagonales.

§. 8. Cum igitur series ista potestatum ipsius x aequalis sit producto illi infinito, si eam nihilo aequalem statuamus, vt habeamus hanc aequationem:

$$0 = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}$$

ea omnes easdem inuoluet radices, quas productum illud nihilo aequatum includit. Ex primo scilicet factore $1-x$ erit $x = 1$; ex secundo factore $1-xx$ erit vel $x = +1$ vel $x = -1$; ex tertio factore $1-x^3$ nascuntur hae tres radices:

$$1^{\circ}) x = 1, \quad 2^{\circ}) x = -\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad 3^{\circ}) x = -\frac{1 - \sqrt{-3}}{2};$$

ex quanto autem factore $1-x^4 = 0$ oriuntur hae quatuor radices:

1^o)

1°) $x = +1$, 2°) $x = -1$, 3°) $x = +\sqrt{-1}$ et
 4°) $x = -\sqrt{-1}$;

quintus autem factor $1 - x^5 = 0$ suppeditat has quinque radices:

1°) $x = 1$, 2°) $x = \frac{-1 - \sqrt{5} + \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}}{4}$
 3°) $x = \frac{-1 - \sqrt{5} - \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}}{4}$, 4°) $x = \frac{-1 + \sqrt{5} + \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}}{4}$
 5°) $x = \frac{-1 + \sqrt{5} - \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}}{4}$;

sextus autem factor praebet has sex radices:

1°) $x = 1$, 2°) $x = -1$, 3°) $x = \frac{+1 + \sqrt{-3}}{2}$,
 4°) $x = \frac{+1 - \sqrt{-3}}{2}$, 5°) $x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$,
 6°) $x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, etc. etc.

§. 9. Hinc igitur patet, omnes radices cuiuscunque potestatis ex vnitatē simul esse radices nostrae aequationis. Ac si rem in genere consideremus, ponendo $1 - x^n = 0$, primo patet, vnam radicem semper esse $x = 1$, ac si n fuerit numerus par, aliam radicem fore $x = -1$. Pro reliquis autem radicibus considerari debent factores trinomiales formulae $1 - x^n$, qui, vti alibi satis est expofitum, in hac forma generali continentur:

$$1 - 2x \cos \frac{2i\pi}{n} + x^2,$$

sumendo pro i successiue omnes numeros integros ipso $\frac{1}{2}n$ non maiores. Hoc autem factore nihilo aequato eruuntur istae duae radices:

$$x = \cos \frac{2i\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2i\pi}{n} \text{ et}$$

$$x = \cos \frac{2i\pi}{n} - \sqrt{-1} \sin \frac{2i\pi}{n}.$$

Hinc enim vicissim fit

$$x^n = \cos. 2i\pi \pm \sqrt{-1} \sin. 2i\pi.$$

Est autem $\cos. 2i\pi = 1$ et $\sin. 2i\pi = 0$, ideoque $x^n = 1$, unde, si pro n et i successive omnes numeri integri accipiantur, haec forma:

$$x = \cos. \frac{2i\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin. \frac{2i\pi}{n}$$

praebit omnes radices nostrae aequationis

$$0 = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{16} - \text{etc.}$$

ita ut istius aequationis omnes plane radices assignare valeamus.

§. 10. Quod si ergo omnes radices istius aequationis litteris $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, etc. indicemus, eius factores erunt $\frac{1-x}{\alpha}, \frac{1-x}{\beta}, \frac{1-x}{\gamma}, \frac{1-x}{\delta}$, etc. unde ex natura aequationum colligimus fore summam omnium harum fractionum: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \text{etc.} = 1$, summam vero productorum ex binis $= -1$, tum vero summam productorum ex ternis $= 0$, summam productorum ex quaternis $= 0$, summam productorum ex quinis $= -1$, summam productorum ex senis $= 0$, summam productorum ex septenis $= -1$, etc. Hinc autem porro concludimus fore summam quadratorum illarum fractionum, scilicet

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\delta^2} + \text{etc.} = 3,$$

summam cuborum

$$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{\delta^3} + \text{etc.} = 4,$$

summam biquadratorum

$$\frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\beta^4} + \frac{1}{\gamma^4} + \frac{1}{\delta^4} + \text{etc.} = 7,$$

et ita porro; ubi quidem nullus ordo perspicitur.

§. 11. Quod autem hic de fractionibus $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, etc. diximus, etiam de ipsius radicibus α , β , γ , etc. valet. Si enim α fuerit radix nostrae aequationis, per ea quae ostendimus haec radix continetur in hac formula:

$$\cos. \frac{2i\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin. \frac{2i\pi}{n}.$$

Hinc autem fit

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\cos. \frac{2i\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin. \frac{2i\pi}{n}} = \cos. \frac{2i\pi}{n} \mp \sqrt{-1} \sin. \frac{2i\pi}{n},$$

quae itidem est radix nostrae aequationis; vnde patet, si $\frac{1}{\alpha}$ fuerit radix nostrae aequationis, etiam α fore radicem.

§. 12. Denotet igitur α radicem quamcunque aequationis $1 - x^n = 0$, quandoquidem tum etiam erit radix nostrae aequationis

$$1 - x - x^2 + x^3 + x^4 - x^5 - x^6 + x^7 - x^8 - x^9 + \text{etc.} = 0,$$

tum igitur erit $\alpha^n = 1$. Praeterea vero etiam omnes potestates ipsius α radices simul erunt aequationis $1 - x^n = 0$. Si enim loco x scribamus $\alpha\alpha$ fiet $1 - x^n = 1 - \alpha^{2n}$. Cum autem sit $\alpha^n = 1$, patet etiam fore $\alpha^{2n} = 1$, ideoque $1 - \alpha^{2n} = 0$, quod idem manifestum est de cubo α^3 et omnibus potestatibus altioribus. Hinc igitur sequitur fore

$$\alpha^{n+1} = \alpha \text{ et } \alpha^{n+2} = \alpha\alpha \text{ et } \alpha^{n+3} = \alpha^2.$$

Sicque in genere erit $\alpha^{i+n+\lambda} = \alpha^\lambda$.

§. 13. Si igitur α denotet radicem quamcunque nostrae aequationis, ita vt sit $\alpha^n = 1$, si in ea loco x scribamus α , certe euadet haec series:

$$1 - \alpha^1 - \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 - \alpha^5 - \alpha^6 + \alpha^7 - \alpha^8 - \alpha^9 + \alpha^{10} + \alpha^{11} - \alpha^{12} - \alpha^{13} + \alpha^{14} + \alpha^{15} - \alpha^{16} - \alpha^{17} + \alpha^{18} + \text{etc.} = 0.$$

Prae-

Praeterea vero etiam ponendo $x = a$ erit

$$1 - a^2 - a^4 + a^{10} + a^{14} - a^{24} - a^{30} + a^{44} + \text{etc.} = 0,$$

et in genere si loco x scribamus a^i , denotante i numerum quemcunque integrum, etiam fiet

$$1 - a^i - a^{2i} + a^{5i} + a^{7i} - a^{12i} - a^{15i} + a^{22i} + \text{etc.} = 0.$$

Atque hoc etiam valebit, si pro i numeri negativi accipiantur, si quidem ostendimus, radices quoque esse $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^5}, \text{etc.}$

§. 14. Quoniam hic assumimus a esse radicem aequationis $1 - x^n = 0$, percurramus ordine casus, quibus est n vel 1 vel 2, vel 3, vel 4, etc. Ac primo quidem, si $n = 1$, necessario est $a = 1$, quo valore substituto nostra aequatio generalis induet hanc formam:

$$1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + \text{etc.}$$

quae series manifesto ex infinitis periodis conflatur, quarum singulae continent hos terminos: $1 - 1 - 1 + 1$, unde cuiusque periodi valor est $= 0$, ideoque etiam infinitae periodi simul summi summam habebunt $= 0$. Quoniam autem continuata concipi debet, si percursis iam infinitis periodis insuper vnus terminus accedat, summa erit $= 0$; si tres accedant, summa erit -1 et si quatuor accedant $= 0$, quo casu tota periodus est adiecta; quare, cum numerus infinitus nusquam terminetur, summa seriei infinitae medium tenebit inter 4 summas modo memoratas $1, 0, -1, 0$, quod medium reperitur, si aggregatum harum quatuor summarum per numerum, hoc est per quaternarium diuidatur; tum autem manifesto prodit 0 , quae ergo vera censenda est summa nostrae seriei.

§. 15. Simile scilicet ratiocinium hic adhiberi potest, quo vulgo ostendi solet summam seriei *Leibnitianae* $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. esse $\frac{1}{2}$; hoc autem concesso veritas praesentis asserti sponte elucet. Cum enim sit

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = \frac{1}{2}, \text{ erit}$$

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.} = -\frac{1}{2}$$

ergo combinandis his duabus seriebus erit

$$1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - \text{etc.} = 0.$$

§. 16. Consideremus nunc casum quo $n = 2$ et $\alpha a = 1$, vbi quidem est α vel $+1$ vel -1 . Retineamus autem litteram α pro vtrauis earum designanda, et cum sit

$$\alpha^3 = \alpha, \alpha^4 = 1, \alpha^5 = \alpha, \alpha^6 = 1, \text{ etc.}$$

facta substitutione nostra aequatio generalis hanc induet formam:

$$1 - \alpha - 1 + \alpha + \alpha - 1 - \alpha + 1 + 1 - \alpha - 1 + \alpha + \alpha - 1 - \alpha + 1 \text{ etc.}$$

quae series pariter per certas periodos progreditur, quae continuo replicantur, atque vnaquaeque earum constat ex his octo terminis:

$$1 - \alpha - 1 + \alpha + \alpha - 1 - \alpha + 1,$$

quorum summa est 0, sicque numerus quantumvis magnus talium integrarum periodorum certe evanescit. At si vero insuper vnus, vel duo, vel 3, vel ad eo 8 termini accedant, summae sequenti modo se habebunt:

fi insuper accedat	summa erit
vnus terminus -	1
duo - - -	1 - α
tres - - -	- α
quatuor - - -	0
quinque - - -	α
sex - - -	$\alpha - 1$
septem - - -	- 1
o \acute{c} to - - -	0

quarum o \acute{c} to summarum aggregatum est 0, vnde tuto concludimus totius huius seriei, quam inuenimus, in infinitum continuatae summam esse = 0.

§. 17. Hinc patet, summam huius seriei periodicae perinde nihilo aequari, quemcunque valorem habuerit littera α ; verus enim valor ipsius α , quo est $\alpha\alpha = 1$, iam in considerationem est ductus, dum ipsae periodi ex eo sunt natae; quamobrem haec series in duas partes disparti potest, quarum altera contineat solas vnitates, altera vero solas litteras α ; ac necesse est, vt vtriusque summa seorsim nihilo fiat aequalis, ita vt fit

$$1 - 1 - 1 + 1, + 1 - 1 - 1 + 1, + 1 - 1 - 1 + 1, \text{ etc.} = 0$$

$$-\alpha + \alpha + \alpha - \alpha, -\alpha + \alpha + \alpha - \alpha, -\alpha + \alpha + \alpha - \alpha, \text{ etc.} = 0,$$

vtriusque autem veritas ex positis principiis fit manifesta.

§. 18. Simili modo res se habebit in radicibus cubicis ipsius 1, ponendo $\alpha^3 = 1$, et quoniam periodi ad plures terminos excurrent, seriem generalem per binos terminos sibi subscriptos referamus, vt fit in genere

$$\left. \begin{aligned} 1 - a + a^5 - a^{12} + a^{22} - a^{35} \text{ etc.} \\ - a^2 + a^7 - a^{15} + a^{26} - a^{40} \text{ etc.} \end{aligned} \right\} = 0.$$

Quod si iam sumatur $a^3 = 1$, ut fit

$$a^4 = a, a^5 = a^2, a^6 = 1, a^7 = a, \text{ etc.}$$

prodibit sequens progressio periodica:

$$\begin{aligned} 1 - a + a^2 - 1 + a - a^2 + 1 & | - a + a^2 - 1 + a - a^2 + 1 \\ - a^2 + a - 1 + a^2 - a & | + 1 - a^2 + a - 1 + a^2 - a & | + 1 \end{aligned} \text{ etc.}$$

nihilo aequalis, vbi quaelibet periodus constat duodecim terminis triplicis generis, scilicet $1, a, a^2$. Ac facile apparet, terminos cuiusque generis seorsim sumtos seriem exhibere nihilo aequalem, vnitates enim constituunt hanc seriem:

$$1 - 1 - 1 + 1, + 1 - 1 - 1 + 1, + 1 - 1 - 1 + 1, \text{ etc.} = 0$$

litterae vero a et a^2 constituunt sequentes series:

$$-a + a + a - a, -a + a + a - a, -a + a + a - a, \text{ etc.} = 0$$

$$-a^2 + a^2 + a^2 - a^2, -a^2 + a^2 + a^2 - a^2, -a^2 + a^2 + a^2 - a^2, \text{ etc.} = 0.$$

Harum autem singularum summas nihilo aequales esse manifestum est.

§. 19. Consideremus porro etiam radices biquadratas vnitatis, sitque $a^4 = 1$, ac prodibit sequens series periodica:

$$1 - a + a - 1 + a^2 - a^2 + a^2 - a^2 + 1 & | - a + a - 1 + \text{ etc.}$$

$$- a^2 + a^2 - a^2 + a^2 - 1 + a - a & | + 1 - a^2 + a^2 - a^2 + \text{ etc.}$$

vbi singulae periodi constant ex sedecim terminis, qui ad quatuor genera relati praebent sequentes quatuor series, singulas nihilo aequales:

$$\begin{aligned}
 & 1 - 1 - 1 + 1, +1 - 1 - 1 + 1, +1 - 1 - 1 + 1, \text{ etc. } = 0 \\
 & -a + a + a - a, -a + a + a - a, -a + a + a - a, \text{ etc. } = 0 \\
 & -a^2 + a^2 + a^2 - a^2, -a^2 + a^2 + a^2 - a^2, -a^2 + a^2 + a^2 - a^2, \text{ etc. } = 0 \\
 & +a^3 - a^3 - a^3 + a^3, +a^3 - a^3 - a^3 + a^3, +a^3 - a^3 - a^3 + a^3, \text{ etc. } = 0
 \end{aligned}$$

§. 20. Quamquam hinc nostra conclusio pro radicibus altioribus iam satis est confirmata, tamen necesse est insuper casum, quo $a^5 = 1$, euoluere, quandoquidem hic non omnes potestates quinta inferiores occurrent. Sit igitur $a^5 = 1$ et haec series periodica prodibit:

$$\begin{aligned}
 & 1 - a + 1 - a^2 + a^2 - 1 + a - 1 + a^2 - a^2 + 1 - a + 1 \text{ etc.} \\
 & -a^2 + a^2 - 1 + a - 1 + a^2 - a^2 + 1 - a \quad | \quad +1 - a^2 + a^2
 \end{aligned}$$

vbi potestates a^3 et a^4 penitus excluduntur. Quare cum quaelibet periodus 20 constet terminis, reliquae potestates saepius occurrant necesse est; singulis autem seorsim sumtis tres sequentes series periodicae occurrunt:

$$\begin{aligned}
 & 1 + 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1, 1 + 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1, \text{ etc. } = 0 \\
 & -a + a + a - a, -a + a + a - a, -a + a + a - a, \text{ etc. } = 0 \\
 & -a^2 + a^2 - a^2 + a^2 + a^2 - a^2 + a^2 - a^2, -a^2 + a^2 - a^2 + a^2, \text{ etc. } = 0
 \end{aligned}$$

Hinc iam veritas seriei ipsarum a ex praecedentibus est manifesta; binae reliquae autem, quarum periodi octo terminis constant, si secundum principia haecenus stabilita examinentur, etiam nihilo aequales deprehendentur, quoniam non solum termini solius periodi se mutuo destruant, sed etiam termini seriei summatricis inde formatae. Ita ex serie unitatum oritur haec series summatricis:

$$1, 2, 1, 0, -1, -2, -1, 0:$$

cuius summa itidem euanescit; quod idem usu venit in serie quadratorum.

§. 21. Ex his iam abunde patet, eandem proprietatem etiam in radicibus altioribus locum esse habituram, ex quocumque etiam terminis singulae periodi fuerint compositae; quod certe eo magis est mirandum, cum ista proprietas in nullas alias series potestatum competere possit, atque penitus propria sit seriei numerorum pentagonalium.

§. 22. Vt autem rem in genere ob oculos ponamus, sit $a^n = 1$, vnde nascuntur periodi ex 4 n terminis constantes, qui erunt vel 1, vel a , vel a^2 , vel a^3 etc. Plerumque autem non omnes potestates inferiores quam a^n occurrent, vnde periodi singularum potestatum ipsius a plerumque pluribus quam 4 terminis constabunt. Semper autem non solum ipsi termini cuiusque periodi se mutuo destruunt, sed etiam termini seriei summatricis. Ita si consideremus potestates a^r , existente r numero minore quam n , ex serie nostra numerorum pentagonalium omnes excerpantur termini, qui per n diuisi hoc idem residuum r relinquunt. Ac si cuique horum terminorum suum debitum signum praefigatur, talis prodibit series:

$$+ a^r + a^r + a^r + a^r + a^r + a^r + a^r + a^r + \text{etc.}$$

quae semper ex certis periodis ratione signorum + et - constabit, idque ita, vt cuiusque periodi omnes termini simul sumti se mutuo destruunt atque idem etiam in serie summatrice eueniat.

§. 23. Verum hae proprietates hactenus commemoratae insuper innumerabiles alias non minus admirandas post se trahunt. Si enim a fuerit radix cuiusque potestatis

testatis n ex unitate, ita ut $1 - \frac{x}{a}$ fit factor formulae $1 - x^n$, evidens est, eum etiam fore factorem formularum $1 - x^{2n}$, $1 - x^{3n}$, $1 - x^{4n}$, etc. in infinitum. Quare, cum hae formulae omnes sint factores nostrae progressionis

$$1 - x - xx + x^3 + x^7 - x^{12} - \text{etc.}$$

eadem radix a in hac aequatione non tantum semel sed adeo infinities occurrit, ita ut ista aequatio infinitas habeat radices ipsi a aequales.

§. 24. Nouimus autem ex natura aequationum, si aequatio quaecunque

$$1 + Ax + Bxx + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.} = 0,$$

habeat duas radices aequales a , tum etiam a fore radicem aequationis per differentiationem natae, scilicet:

$$A + 2Bx + 3Cxx + 4Dx^3 + \text{etc.} = 0,$$

ac si habeat tres radices aequales a , tum insuper a quoque erit radix istius aequationis per differentiationem natae, postquam scilicet illam aequationem differentialem per x multiplicauerimus

$$1^2.A + 2^2.Bx + 3^2.Cxx + 4^2.Dx^3 + \text{etc.} = 0,$$

vnde si haec aequatio habuerit λ radices aequales, quae singulae sint $= a$, semper erit

$$1^\lambda.A + 2^\lambda.Ba + 3^\lambda.Caa + 4^\lambda.Da^3 + \text{etc.} = 0,$$

vnde si vniformitatis gratia hanc aequationem per a multiplicemus, erit quoque

$$1^\lambda.Aa + 2^\lambda.Ba^2 + 3^\lambda.Ca^3 + 4^\lambda.Da^4 + \text{etc.} = 0.$$

§. 25. Cum igitur posito $a^n = 1$ nostra aequatio ex numeris pentagonalibus formata

$$1 - x^2 - x^5 + x^8 + x^{11} - x^{14} - x^{17} + \text{etc.} = 0;$$

habeat infinitas radices ipsi α aequales, erit quoque α radix omnium aequationum in hac forma generali contentarum:

$$- 1^\lambda x - 2^\lambda x^2 + 5^\lambda x^5 + 7^\lambda x^7 - 12^\lambda x^{12} - \text{etc.} = 0$$

quicumque numerus integer pro λ accipiatur. Semper igitur erit.

$$- 1^\lambda \alpha - 2^\lambda \alpha^2 + 5^\lambda \alpha^5 + 7^\lambda \alpha^7 - 12^\lambda \alpha^{12} - \text{etc.} = 0.$$

§. 26. Ad hoc clarius ostendendum sumamus $\alpha = 1$, eritque semper

$$- 1^\lambda - 2^\lambda + 5^\lambda + 7^\lambda - 12^\lambda - 15^\lambda + \text{etc.} = 0,$$

ac pro casu $\lambda = 0$ veritatem istius aequationis iam probauimus. Sit igitur $\lambda = 1$ et monstrandum erit, huius seriei diuergentis infinitae:

$$- 1 - 2 + 5 + 7 - 12 - 15 + 22 + 26 - \text{etc.}$$

summam esse $= 0$. Quoniam autem haec series est interrupta, seu potius ex duabus seriebus mixta, vtramque seorsim contemplemur, ponendo

$$s = - 1 + 5 - 12 + 22 - 35 + \text{etc. et}$$

$$t = - 2 + 7 - 15 + 26 - 40 + \text{etc.}$$

atque ostendi oportet fore $s + t = 0$.

§. 27. Ex doctrina autem serierum, quae signis alternantibus procedunt, veluti $A - B + C - D + \text{etc.}$ constat, huius seriei in infinitum progredientis summam esse

$$= \frac{1}{2}A - \frac{1}{4}(B - A) + \frac{1}{8}(C - 2B + A) - \frac{1}{16}(D - 3C + 3B - A) \text{etc.}$$

quae

quae regula ita commodius per differentias exponitur, scilicet ratione signorum seposita. Ex serie numerorum A, B, C, D, E, etc. formetur series differentiarum, dum quilibet terminus illius seriei a sequente subtrahitur, quae sit a, b, c, d , etc. Eadem porro lege ex hac serie differentiarum formetur series secundarum differentiarum, quae sit a', b', c', d' , etc. ex hac porro series tertiarum differentiarum, quae sit a'', b'', c'', d'', e'' , etc. atque hoc modo ulterius donec ad differentias constantes perveniatur. Tum autem ex terminis primis omnium harum serierum summa seriei propositae ita determinatur, ut ea sit

$$\frac{1}{2}A - \frac{1}{4}a + \frac{1}{8}a' - \frac{1}{16}a'' + \frac{1}{32}a''' - \frac{1}{64}a'''' + \text{etc.}$$

§. 28. Hac regula stabilita, cum signis mutatis fit

$$-s = 1 - 5 + 12 - 22 + 35 - 51 + 70 - \text{etc. et}$$

$$-t = 2 - 7 + 15 - 26 + 40 - 57 + 77 - \text{etc.}$$

hi termini sequenti modo disponantur ac differentiae subscribantur:

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70 etc.	2, 7, 15, 26, 40, 57, 77 etc.
4, 7, 10, 13, 16, 19	5, 8, 11, 14, 17, 20
3, 3, 3, 3, 3	3, 3, 3, 3, 3
0, 0, 0, 0	0, 0, 0, 0

Hinc igitur colligitur fore

$$-s = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}, \text{ siue } s = \frac{1}{8}, \text{ porro}$$

$$-t = \frac{2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}, \text{ siue } t = -\frac{1}{8}$$

unde manifesto conficitur esse $s + t = 0$.

§. 29. Quoniam ipsae rationes, quibus hae proprietates innituntur, nullum plane dubium relinquunt: tamen haud inutile erit, istam veritatem etiam pro casu $\lambda = 2$ ostendisse, siue reuera esse

$$- 1^2 - 2^2 + 5^2 + 7^2 - 12^2 - 15^2 + 22^2 + \text{etc.} = 0.$$

Discerpatur enim haec series itidem in duas, quae sint mutatis signis:

$$s = + 1^2 - 5^2 + 12^2 - 22^2 + 35^2 - 51^2 + \text{etc.}$$

$$t = 2^2 - 7^2 + 15^2 - 26^2 + 40^2 - 57^2 + \text{etc.}$$

ac pro prioris summa inuenienda instituaturs sequens operatio:

Series	1, 25, 144, 484, 1225, 2601, 4900
Diff. I.	24, 119, 340, 741, 1376, 2299
Diff. II.	95, 221, 401, 635, 923
Diff. III.	126, 180, 234, 288
Diff. IV.	54, 54, 54
Diff. V.	0, 0

Hinc igitur erit

$$s = \frac{1}{1} - \frac{24}{4} + \frac{95}{8} - \frac{126}{16} + \frac{54}{32} = + \frac{3}{16}$$

Simili modo pro altera serie

Series	4, 49, 225, 676, 1600, 3249, 5929
Diff. I.	45, 176, 451, 924, 1649, 2680
Diff. II.	131, 275, 473, 725, 1031
Diff. III.	144, 198, 252, 306
Diff. IV.	54, 54, 54
Diff. V.	0, 0

Hinc concluditur.

$$t = \frac{4}{5} - \frac{45}{4} + \frac{151}{8} - \frac{144}{16} + \frac{54}{32} + \dots$$

Quamobrem euictum est totam summam fore $s + t = 0$.

§. 30. Consideremus nunc etiam radices quadratas, siue sit $a^2 = 1$, hincque orietur ista series:

$$-1^\lambda \cdot a - 2^\lambda + 5^\lambda \cdot a + 7^\lambda \cdot a - 12^\lambda - 15^\lambda \cdot a + 22^\lambda + 26^\lambda - \text{etc.} = 0,$$

vnde si terminos unitatem et a continentes a se inuicem separemus, binas obtinebimus series nihilo aequales, scilicet:

$$-2^\lambda - 12^\lambda + 22^\lambda + 26^\lambda - 40^\lambda - 70^\lambda + 92^\lambda + \text{etc.} = 0$$

et

$$-1^\lambda \cdot a + 5^\lambda \cdot a + 7^\lambda \cdot a - 15^\lambda \cdot a - 35^\lambda \cdot a + 51^\lambda \cdot a + 57^\lambda \cdot a - \text{etc.} = 0.$$

Quod si vero harum serierum veritatem eodem modo, quo ante sumus vfi, ostendere vellemus, vnamquamque in quatuor alias series discerpi oporteret, vt scilicet tandem ad differentias constantes perueniremus. At vero si quis hanc operam suscipere voluerit, certus esse poterit, aggregatum omnium summarum partialium fore $= 0$.

§. 31. Nunc generalissime totum negotium complectamur, sitque $a^n = 1$, et quaeramus seriem, quae contineat tantum potestates a^r . Hunc in finem ex omnibus nostris numeris pentagonalibus excerpamus eos, qui per n diuisi relinquunt idem residuum r . Sint igitur isti numeri pentagonales A, B, C, D, E, etc. omnes scilicet formae

mae $\gamma n + r$, et cuiusque signum \pm , quod ipsi convenit, sollicitè notetur. Tum autem semper erit

$$\pm A^\lambda \pm B^\lambda \pm C^\lambda \pm D^\lambda \pm \text{etc.} = 0,$$

quicumque valor integer exponenti λ tribuatur. Atque in hac forma generalissima omnes series, quas hactenus erui-
mus, et quarum summas nihilo aequari ostendimus, con-
tinentur.