1783

Cautiones necessariae in determinatione motus planetarum observandae

Leonhard Euler

CAVTIONES NECESSARIAE
IN
DETERMINATIONE MOTVS PLANETARVM OBSERVANDAE.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum in Tomo XX nouor. Comm. ostendissem, accuratam cognitionem perturbationum, quas duo planetae ob actionem mutuam sibi inferunt, sperari non posse, nisi eorum motus ad planum aliquod fixum in coelo referantur, cuius respectu positio orbitarum et inclinatio ad quoduis tempus inuestigari debeat: statim ab initio motus planetarum ad tale planum fixum in coelo sum relaturus, pro quo assumam planum illud, quod orbita terrae initio huius saeculi, seu anno 1700 in coelo obtinuit, quod ergo plano tabulae repraesentetur, in quo punctum S sit centrum solis et recta SA ad punctum aequinoctiale vernum istius epochae directa, quam ergo tanquam fixam spectare poterimus. Tum vero

vero in eodem plano ducamus rectam S B, illi normalem, quae ad punctum solstitiale aestiuum huius epochae dirigatur, ita vt ordo signorum coelestium ab A versus B progredi sit censendus. Tertio vero statuatur etiam perpendiculariter ad planum recta S C septentrionem versus spectans, ita vt hae tres rectae S A, S B et S C exhibeant ternas directrices fixas, iuxta quas motum planetarum secundum principia mechanicae sum inuestigaturus.

§. 2. Quanquam autem praecepta, quae sum traditurus, ad omnes planetas aeque pertinere debent: tamen ea hic potissimum ad ambos planetas Iouem et Saturnum accommodabo; quoniam eorum motus etiamnunc in Astronomia maxime desideratur, quandoquidem inde facillime applicatio ad binos quosuis alios planetas fieri poterit. Constituta igitur certa epocha temporis fixa, a qua motum vtriusque planetae sumus prosecuturi, elapso inde tempore $= t$, reperiatur centrum Iouis in puncto Z, Saturni vero in z, vnde primo ad planum tabulae demittantur perpendicula Z Y et $z\,y$; tum vero ex punctis Y et y ad rectam fixam S A agantur normales Y X et $y\,x$, vt locus vtriusque planetae per ternas coordinatas orthogonales determinetur, quas sequenti modo denominemus:

$$SX = X,\ XY = Y,\ YZ = Z$$

$$Sx = x,\ \ xy = y,\ \ yz = z$$

Praeterea vero breuitatis gratia ponamus distantim a Sole

$$SZ = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)} = V \text{ et } Sz = \sqrt{(xx + yy + zz)} = v$$

denique vero distantiam inter binos planetas

$$Zz = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2} = w.$$

§. 3.

§. 3. Cum iam maſſae, tam Solis quam ambo-rum planetarum, praecipue in computum duci debeant: ſit maſſa Solis $= \odot$, maſſa Iouis $= ♃$ et maſſa Saturni $= ♄$. His poſitis vires, quibus tam Sol quam planetae ſe mutuo attrahunt, ſequenti modo exhibeantur:

Pro Ioue, vis ad Solem directa ſecundum $ZS = \frac{\odot}{v^2}$,
ad Saturnum vero ſecundum $Zz = \frac{♄}{w^2}$.

Pro Saturno, vis ad Solem directa ſecundum $zS = \frac{\odot}{vv}$,
ad Iouem vero ſecundum $zZ = \frac{♃}{w^2}$.

Pro ipſo Sole, vis ad Iouem directa ſecundum $SZ = \frac{♃}{V^2}$,
ad Saturnum vero ſecundum $Sz = \frac{♄}{vv}$.

Hic enim nondum curamus menſuras abſolutas harum virium, quas deinceps demum accurate aſſignabimus.

§. 4. Quoniam autem inſtitutum noſtrum poſtulat vt centrum Solis tanquam fixum in ſuo loco ſpectemus, vires, quibus ipſe ſol ad ambos planetas ſollicitatur, ſecundum directionem contrariam in vtrumque planetam transferri oportet; vnde primo quidem Iupiter ſollicitabitur ab his quatuor viribus:

I. vi ſecundum $ZS = \frac{\odot}{V^2}$.
II. vi ſecundum $Zz = \frac{♄}{ww}$.
III. vi ſecundum $ZS = \frac{♃}{V^2}$.
IV. vi ſecundum $zS = \frac{♄}{vv}$.

Saturnus autem his quatuor viribus ſollicitabitur:

I. vi secundum $zS = \frac{\odot}{vv}$.
II. vi secundum $zZ = \frac{♃}{ww}$.
III. vi secundum $zS = \frac{♄}{vv}$.
IV. vi secundum $ZS = \frac{♃}{V^2}$.

Has iam vires secundum ternas nostras directiones fixas SA, SB, SC resolui oportet, vnde pro Ioue habebimus sequentes ternas vires:

I. vis secundum $XS = \frac{\odot X}{V^3} - \frac{♄(x-X)}{w^3} + \frac{♃X}{V^3} + \frac{♄x}{v^3}$.
II. vis secundum $YX = \frac{\odot Y}{V^3} - \frac{♄(y-Y)}{w^3} + \frac{♃Y}{V^3} + \frac{♄y}{v^3}$.
III. vis secundum $ZY = \frac{\odot Z}{V^3} - \frac{♄(z-Z)}{w^3} + \frac{♃Z}{V^3} + \frac{♄z}{v^3}$.

ternae autem vires, quibus Saturnus secundum easdem directiones vrgebitur, erunt

I. vis secundum $xS = \frac{\odot x}{v^3} + \frac{♃(x-X)}{w^3} + \frac{♄x}{v^3} + \frac{♃X}{V^3}$.
II. vis secundum $yx = \frac{\odot y}{v^3} + \frac{♃(y-Y)}{w^3} + \frac{♄y}{v^3} + \frac{♃Y}{V^3}$.
III. vis secundum $zy = \frac{\odot z}{v^3} + \frac{♃(z-Z)}{w^3} + \frac{♄z}{v^3} + \frac{♃Z}{V^3}$.

His scilicet ternis viribus motus vtriusque planetae, secundum easdem directiones SA, SB, SC resolutus, retardabitur.

§. 5. Quod si autem motus Iouis secundum has directiones resoluatur, primo eius ternae celeritates erunt: 1) Secundum $SA = \frac{dX}{dt}$. 2) sec. $SB = \frac{dY}{dt}$. 3) sec. $SC = \frac{dZ}{dt}$, hincque accelerationes secundum easdem directiones, sumto elemento temporis dt constante:

1) sec. $SA = \frac{ddX}{dt^2}$. 2) sec. $SB = \frac{ddY}{dt^2}$. 3) sec. $SC = \frac{ddZ}{dt^2}$.

Simili

Simili modo pro Saturno ternae eius celeritates erunt:

1) sec. $SA = \frac{dx}{dt}$. 2) sec. $SB = \frac{dy}{dt}$. 3) sec. $SC = \frac{dz}{dt}$,

et accelerationes:

1) sec. $SA = \frac{ddx}{dt^2}$. 2) sec. $SB = \frac{ddy}{dt^2}$. 3) sec. $SC = \frac{ddz}{dt^2}$.

His igitur accelerationibus vires ante inuentae secundum easdem directiones, mutatis signis, proportionales sunt statuendae.

§. 6. Quia circa mensuras absolutas nihil adhuc est constitutum, hanc proportionalitatem tantisper littera Γ designemus, hoc modo pro motu Iouis habebimus tres sequentes aequationes:

$$\text{I.)}\ \Gamma \frac{ddX}{dt^2} = -\frac{(\odot + ♃)X}{V^3} + \frac{♄(x - X)}{w^3} - \frac{♄ x}{v^3}.$$

$$\text{II.)}\ \Gamma \frac{ddY}{dt^2} = -\frac{(\odot + ♃)Y}{V^3} + \frac{♄(y - Y)}{w^3} - \frac{♄ y}{v^3}.$$

$$\text{III.)}\ \Gamma \frac{ddZ}{dt^2} = -\frac{(\odot + ♃)Z}{V^3} + \frac{♄(z - Z)}{w^3} - \frac{♄ z}{v^3}.$$

Parique modo Saturni motus his tribus aequationibus definietur:

$$\text{I.)}\ \Gamma \frac{ddx}{dt^2} = -\frac{(\odot + ♄)x}{v^3} - \frac{♃(x - X)}{w^3} - \frac{♃ X}{V^3}.$$

$$\text{II.)}\ \Gamma \frac{ddy}{dt^2} = -\frac{(\odot + ♄)y}{v^3} - \frac{♃(y - Y)}{w^3} - \frac{♃ Y}{V^3}.$$

$$\text{III.)}\ \Gamma \frac{ddz}{dt^2} = -\frac{(\odot + ♄)z}{v^3} - \frac{♃(z - Z)}{w^3} - \frac{♃ Z}{V^3}.$$

In his igitur sex aequationibus differentio-differentialibus omnia plane continentur, quibus non solum motus vtriusque planetae, sed etiam positio orbitarum earumque mutatio determinatur.

Reductio omnium quantitatum in has aequationes ingredientium ad mensuras absolutas.

§. 7. Quo autem ex his aequationibus quantitatem in se indefinitam Γ, quippe quae pendet a mensuris, quibus reliquas quantitates metiri lubet, ex calculo elidamus, omnes quantitates, quae in nostras aequationes sunt introductae, ad mensuras certas ac determinatas reuocari oportet. Ac primo quidem pro quantitatibus, quibus distantiae designantur, mensuram accipiamus distantiam mediam terrae a sole, quam propterea vnitate denotabimus; deinde vero pro tempore t definiendo vtamur mensura vnius diei, quippe quae ad praesens institutum magis erit adcommodata, quam si, more in problematibus mechanicis recepto, id in minutis secundis exprimere vellemus. Vt igitur nostras formulas ad istas mensuras reducamus, consideremus motum terrae medium circa solem, quae ergo descriptura esset interuallo vnius anni circa solem circulum, cuius radius $= 1$, in quo quotidie percursura esset certum ac determinatum angulum, cuius quantitatem ex tabulis solaribus depromere oportet, quem idcirco hic accuratissime definiri conuenit. Praebent autem istae tabulae pro tempore 30 dierum motum terrae medium $29^\circ.\ 34'.\ 4''.\ 54'''$, quem angulum seu arcum in partes radii, qui est $= 1$, conuerti oportet. Hunc in finem primo reducatur hic arcus ad minuta secunda, quorum numerus est 106445; quare cum semiperipheria circuli sit $= 3,14159265$, eaque contineat $180.\ 60.\ 60$ minuta secunda $= 648000''$, fiat $648000 : 3.14159265 = 106445$ ad $0,5148731$, cuius fractionis decimalis pars trigesima dabit arcum, quem terra motu medio in suo circulo percurret, qui ergo erit $0,01716243$.

§. 8.

§. 8. Nunc igitur hunc motum terrae medium per fimiles formulas analyticas ex principiis mechanicis deductas exprimamus, quas facile ex formilis pro Ioue inventis deducemus, omiffa perturbatione a Saturno orta; quoniam in hoc terrae motu nullam perturbationem agnofcimus. Hinc loco Iouis terram fubftituentes habebimus $V = 1$, et quia terra in ipfo plano fixo moueri cenfetur, erit $Z = 0$, ita vt motus terrae his duabus formulis contineatur:

$$\frac{\Gamma\, d\, d\, X}{d\, t^2} = -\odot X \text{ et } \frac{\Gamma\, d\, d\, Y}{d\, t^2} = -\odot Y.$$

Ponamus nunc terram tempore t dierum motu vniformi percurrere angulum $\Phi = 0,01716243\, t$, ficque erit

$$X = \text{cof.}\, \Phi \text{ et } Y = \text{fin.}\, \Phi,$$

vnde colligitur:

$$d\, X = -d\, \Phi \text{ fin.}\, \Phi \text{ et } d\, Y = d\, \Phi \text{ cof.}\, \Phi,$$

hincque porro, ob $d\, \Phi$ conftans, erit

$$d\, d\, X = -d\, \Phi^2 \text{ cof.}\, \Phi \text{ et } d\, d\, Y = -d\, \Phi^2 \text{ fin.}\, \Phi;$$

quibus valoribus fubftitutis habebimus:

$$\Gamma \frac{d\, \Phi^2 \text{ cof.}\, \Phi}{d\, t^2} = \odot \text{ cof.}\, \Phi, \text{ fiue } \Gamma = \frac{\odot\, d\, t^2}{d\, \Phi^2}, \text{ vbi erit}$$
$$\frac{d\, t}{d\, \Phi} = \frac{1}{0,01716243}.$$

Ponamus igitur breuitatis gratia $0,01716243 = \delta$, vt fiat

$$\frac{d\, t}{d\, \Phi} = \frac{1}{\delta} \text{ et } \Gamma = \frac{\odot}{\delta\, \delta},$$

quo valore inuento, fi omnes quantitates per menfuras modo ftabilitas exprimamus, aequationes pro motu Iouis et Saturni inuentae, fi per $\Gamma = \frac{\odot}{\delta\, \delta}$ diuidantur, fequentes induent formas:

Pro Ioue

$$\frac{ddX}{dt^2} = -\frac{\delta\delta(\odot + ♃)X}{\odot V^3} + \frac{\delta\delta ♄ (x - X)}{\odot w^3} - \frac{\delta\delta ♄ x}{\odot v^3},$$
$$\frac{ddY}{dt^2} = -\frac{\delta\delta(\odot + ♃)Y}{\odot V^3} + \frac{\delta\delta ♄ (y - Y)}{\odot w^3} - \frac{\delta\delta ♄ y}{\odot v^3},$$
$$\frac{ddZ}{dt^2} = -\frac{\delta\delta(\odot + ♃)Z}{\odot V^3} + \frac{\delta\delta ♄ (z - Z)}{\odot w^3} - \frac{\delta\delta ♄ z}{\odot v^3}.$$

Pro Saturno

$$\frac{ddx}{dt^2} = -\frac{\delta\delta(\odot + ♄)x}{\odot v^3} - \frac{\delta\delta ♃ (x - X)}{\odot w^3} - \frac{\delta\delta ♃ X}{\odot V^3},$$
$$\frac{ddy}{dt^2} = -\frac{\delta\delta(\odot + ♄)y}{\odot v^3} - \frac{\delta\delta ♃ (y - Y)}{\odot w^3} - \frac{\delta\delta ♃ Y}{\odot V^3},$$
$$\frac{ddz}{dt^2} = -\frac{\delta\delta(\odot + ♄)z}{\odot v^3} - \frac{\delta\delta ♃ (z - Z)}{\odot w^3} - \frac{\delta\delta ♃ Z}{\odot V^3}.$$

§. 9. Ponamus nunc $\delta\delta = \Delta$; ita vt ſit

$$\Delta = 0,0002945493 \text{ et } l\Delta = 6,4691580;$$

praeterea vero ſtatuamus $\frac{♃}{\odot} = M$ et $\frac{♄}{\odot} = m$, quibus valoribus introductis aequationes noſtrae ita ſe habebunt:

Pro Ioue

$$\frac{ddX}{\Delta dt^2} = -\frac{(1+M)X}{V^3} + \frac{m(x - X)}{w^3} - \frac{mx}{v^3},$$
$$\frac{ddY}{\Delta dt^2} = -\frac{(1+M)Y}{V^3} + \frac{m(y - Y)}{w^3} - \frac{my}{v^3},$$
$$\frac{ddZ}{\Delta dt^2} = -\frac{(1+M)Z}{V^3} + \frac{m(z - Z)}{w^3} - \frac{mz}{v^3}.$$

Pro Saturno

$$\frac{ddx}{\Delta dt^2} = -\frac{(1+m)x}{v^3} - \frac{M(x - X)}{w^3} - \frac{MX}{V^3},$$
$$\frac{ddy}{\Delta dt^2} = -\frac{(1+m)y}{v^3} - \frac{M(y - Y)}{w^3} - \frac{MY}{V^3},$$
$$\frac{ddz}{\Delta dt^2} = -\frac{(1+m)z}{v^3} - \frac{M(z - Z)}{w^3} - \frac{MZ}{V^3}.$$

Vbi ſecundum mentem *Newtoni* valores litterarum M et m ita ſunt aſſignati, vt ſit $M = \frac{1}{1067}$ et $m = \frac{1}{3021}$; vnde patet

tet, partes posteriores harum aequationum, quae perturbationes continent, prae prioribus esse vehementer exiguas.

§. 10. His igitur aequationibus constitutis, quae iam omnibus numeris sunt determinatae, totum negotium huc redit, vt ad quoduis tempus, ab epocha fixa elapsum, quod sit aequale t diebus, quantitates lineares X, Y, Z et x, y, z definiantur: iis enim inuentis ad tempus propositum locus vtriusque planetae respectu ternorum axium fixorum SA, SB, SC, accurate assignari poterit. Inde etiam innotescent formulae:

$$\frac{dX}{dt},\ \frac{dY}{dt},\ \frac{dZ}{dt} \text{ et } \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt},$$

quibus celeritates vtriusque planetae secundum easdem directiones ita definiuntur, vt iis spatia indicentur, quae his celeritatibus interuallo vnius diei percurri possent.

De quantitatibus constantibus, per quas integrationes instituendae determinari debent.

§. 11. Quoniam amborum planetarum motus per sex aequationes differentiales secundi gradus exprimuntur, si singulas bis integrare liceret, in aequationes integrales completas ingrederentur duodecim constantes arbitrariae, quas ergo ex statu initiali, seu motu, qui vtrique initio fuerit impressus, determinari oportebit, vnde etiam duodecim determinationes orientur. Quia enim primo locus, quem vterque planeta initio in coelo occupauit, pro cognito est habendus, ternae coordinatae datos obtinebunt valores. Deinde quia motus vtrique planetae impressus etiam vt cognitus spectatur, ternae celeritates, quae inde

secun-

secundum directiones fixas SA, SB, SC nascuntur, erunt cognitae, ita vt harum determinationum numerus quoque ad duodecim assurgat.

§. 12. Ponamus ergo initium ibi capi, vbi erat $t = 0$, ac valores nostrarum quantitatum, quae in aequationes ingrediuntur, initio, vbi $t = 0$, sequenti modo determinatos fuisse, vt tum fuisset

$$X = A, \; Y = B, \; Z = C; \; x = a, \; y = b, \; z = c;$$
$$\frac{dX}{dt} = A', \; \frac{dY}{dt} = B', \; \frac{dZ}{dt} = C'; \; \frac{dx}{dt} = a', \; \frac{dy}{dt} = b', \; \frac{dz}{dt} = c'.$$

His igitur duodecim constantibus definitis duplex integratio omnium nostrarum aequationum ad aequationes integrales determinatas perducet, quibus natura vtriusque motus pro omnibus temporibus exprimetur.

De motu regulari, quo vterque Planeta remota actione esset progressurus.

§. 13. Quoniam perturbationes, quas ambo planetae sibi mutuo inducunt, clarius et distinctius repraesentare non licet, quam si eae cum motu regulari, quo vterque planeta, si nullam pateretur perturbationem, esset progressurus, comparentur et aberratio veri motus ad quodvis tempus assignetur: hanc ob rem ante omnia actionem mutuam planetarum seponamus, et motum inuestigemus, quo tum vterque planeta ob motum initio impressum esset progressurus. Quanquam enim hoc problema iam saepissime variis modis est solutum: tamen, quia hic motum tribus coordinatis definiri assumimus, dum vulgo calculus tantum ad duas restringitur, operae vtique pretium erit, hanc analysin ad ternas coordinatas extendere, ac per statum

tum initialem determinare, vbi quidem sufficiet alterius tantum motum inuestigasse, quem in finem hic motum Saturni eligamus, quoniam eius elementa litteris minusculis indicauimus.

§. 14. Reiectis igitur in aequationibus inuentis iis membris, quae ex perturbatione mutua nascuntur, si loco $\Delta(1+m)$ scribamus breuitatis gratia n: motus Saturni regularis his tribus aequationibus exprimetur:

$$\text{I. } \frac{ddx}{dt^2} = -\frac{nx}{v^3}. \quad \text{II. } \frac{ddy}{dt^2} = -\frac{ny}{v^3}. \quad \text{III. } \frac{ddz}{dt^2} = -\frac{nz}{v^3},$$

vnde statim sequentes formemus combinationes:

$$\text{I. } \frac{yddx - xddy}{dt^2} = 0.$$

$$\text{II. } \frac{zddy - yddz}{dt^2} = 0.$$

$$\text{III. } \frac{xddz - zddx}{dt^2} = 0.$$

quae singulae sunt integrabiles, earumque integralia per statum initialem determinata sequenti modo reperientur expressa:

$$\text{I. } \frac{ydx - xdy}{dt} = ba' - ab'.$$

$$\text{II. } \frac{zdy - ydz}{dt} = cb' - bc'.$$

$$\text{III. } \frac{xdz - zdx}{dt} = ac' - ca'.$$

Sicque iam adepti sumus tres aequationes primi gradus differentiales, ex quibus insignia symptomata motus deriuare licebit, quanquam totam solutionem non exhauriunt; quia littera n, conditionem praecipuam motus inuoluens, in eas non ingreditur, id quod inde etiam patet, quod formulae differentio-differentiales, vnde sunt natae, ita sunt comparatae, vt binae tertiam iam inuoluant ideoque tantum pro duabus sint habendae.

§. 15. Has tres aequationes modo inuentas ita combinemus, vt primam per z, fecundam per x ac tertiam per y multiplicemus, tum enim earum fumma praebebit hanc aequationem;

$$0 = (b a' - a b') z + (c b' - b c') x + (a c' - c a') y,$$

in qua coordinatae x, y, z, tantum vnicam dimenfionem occupant; vnde concludimus omnia puncta z in eodem plano fore fita, cuius ergo inclinationem ad planum noftrum fixum A S B, fimulque interfectionem asfignari conueniet.

T. XVIII. Fig. 2. §. 16. Sit igitur punctum z in ifto plano quod quaerimus, exiftentibus coordinatis $Sx = x$, $xy = y$, $yz = z$, ita vt fit vti inuenimus:

$$(b a' - a b') z + (c b' - b c') x + (a c' - c a') y = 0;$$

fitque recta S☊ interfectio huius plani cum plano tabulae A S B, fecans ordinatam xy in puncto o, et quia in hac recta S☊ ordinatae z debent euanefcere, pro pofitione huius rectae hanc habebimus aequationem:

$$(c b' - b c') x + (a c' - a c') y = 0,$$

vbi iam y denotat applicatam xo, manente $Sx = x$; vnde cum fit $y = \frac{(b c' - c b') x}{a c' - c a'}$, ex hac aequatione, cum pofito $x = 0$ fiat etiam $y = 0$, intelligimus, rectam S☊ per ipfum punctum S, feu centrum folis tranfire, ita vt, quod quidem eft notiffimum, orbita planetae per folem tranfeat. Ponamus iam angulum A S ☊ $= \zeta$, qui ergo longitudinem huius lineae nodorum, a puncto aequinoctiali verno A, fecundum ordinem fignorum A B fumtam, indicabit.

§. 17.

§. 17. Cum igitur fractio $\frac{zo}{S}$ tangentem huius anguli ζ exprimat, erit tang. $\zeta = \frac{y}{x} = \frac{bc' - cb'}{ac' - ca'}$. Pro inclinatione autem inuenienda sumamus $x = 0$, et nostra aequatio euadet $(ba' - ab')z + (ac' - ca')y = 0$, vnde fit

$$z = \frac{(ca' - ac')y}{ba' - ab'}.$$

Sit igitur $Sp = y$ et $pq = z$; tum vero ex p ad lineam nodorum S☊ ducatur normalis pr, iungaturque recta qr, ac manifestum est angulum prq metiri inclinationem orbitae planetae ad planum nostrum fixum A S B, cuius ergo tangens erit $\frac{pq}{pr}$. Cum autem sit angulus

$$pS☊ = 90 - \zeta, \text{ erit } pr = y \operatorname{cos}. \zeta,$$

ideoque tangens inclinationis $= \frac{z}{y \operatorname{cos}. \zeta}$. Quod si ergo hanc inclinationem prq statuamus $= \eta$, loco z scribendo suum valorem habebimus

$$\text{tang. } \eta = \frac{(ca' - ac')}{(ba' - ab') \operatorname{cos}. \zeta}.$$

§. 18. Ex statu igitur initiali planetae, qui litteris a, b, c, et a', b', c', continetur, statim innotescit intersectio orbitae planetae cum plano nostro fixo A S B, siue angulus A S☊ $= \zeta$, simulque inclinatio orbitae ad hoc planum, seu angulus $prq = \eta$, quandoquidem inuenimus has formulas:

$$\text{tang. } \zeta = \frac{bc' - cb'}{ac' - ca'} \text{ et tang. } \eta = \frac{ca' - ac'}{(ba' - ab') \operatorname{cos}. \zeta}.$$

Quoniam supponimus planetam ab A versus B promoveri, postquam per lineam nodorum S☊ transiit, in regionem borealem ascendit, et recta S☊ ad nodum ascendentem dirigetur, siquidem formula pro tang. ζ inuenta fuerit positiua, simulque altera formula tang. η etiam positiua,

 quippe

quippe ad quem casum nostra figura est accommodata, vnde iudicium haud difficulter instituetur, si secus euenerit.

§. 19. Cum sit tang. $\zeta = \frac{b c' - c b'}{a c' - c a'}$ erit

$$\text{cos.}\ \zeta = \frac{a c' - c a'}{\sqrt{((b c' - c b')^2 + (a c' - c a')^2)}},$$

quo valore in altera formula substituto prodibit

$$\text{tang.}\ \eta = \frac{\sqrt{((b c' - c b') + (a c' - c a')^2)}}{a b' - b a'};$$

praecedens vero formula vtique est commodior, quoniam, postquam angulus ζ fuerit inuentus, inde facilius angulus η concluditur.

§. 20. Vt autem indolem ipsius orbitae inuestigemus, aequationibus differentio-differentialibus primo exhibitis erit vtendum. Primam igitur per $2\,dx$, secundam per $2\,dy$ ac tertiam per $2\,dz$ multiplicando, summa dabit hanc aequationem:

$$\frac{2\,dx\,ddx + 2\,dy\,ddy + 2\,dz\,ddz}{dt^2} = -2\,n\,\frac{(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{v^3},$$

Hinc igitur, quia

$$vv = xx + yy + zz, \text{ ideoque } x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv,$$

ob elementum dt constans elicietur integrando

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = +\frac{2\,n}{v} + C.$$

Pro constante igitur determinanda faciamus

$$x = a,\ y = b,\ z = c;\ \frac{dx}{dt} = a',\ \frac{dy}{dt} = b',\ \frac{dz}{dt} = c',$$

tum vero fiat distantia $v = d$, ita vt fit

$$d = \sqrt{(aa + bb + cc)},$$

quo facto nostra aequatio fiet

$$a'a' + b'b' + c'c' = \frac{2\,n}{d} + C, \text{ vnde fit}$$

$$C = a'a' + b'b' + c'c' - \frac{2\,n}{d}.$$

Sicque

Sicque aequatio nostra inuenta erit

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2n\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{a}\right) + a'a' + b'b' + c'c'.$$

Quod si ergo breuitatis gratia ponamus

$$a'a' + b'b' + c'c' = \delta\delta, \text{ erit}$$

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2n\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{a}\right) + \delta\delta,$$

quae aequatio alias ex principio virium vivarum deduci solet.

§. 21. Praeter tres igitur aequationes differentiales primi gradus nunc nacti sumus quartam eiusdem gradus, quae autem iunctim sumtae tantum tribus aequivalere sunt censendae, ideoque totam solutionem in se complectuntur. Sin autem ex his aequationibus primi gradus coordinatas x, y, z eliminare, eamrumque loco tantum distantiam a sole v cum anomalia vera planetae introducere vellemus, in calculos taediosissimos illaberemur. Hinc igitur denuo in nouam aequationem integralem inquiramus, ad quam sequens nos artificium perducet.

§. 22. Incipiamus ergo iterum a ternis aequationibus principalibus, ac prima ducta in x, secunda in y, ac tertia in z et in summam collecta producunt hanc aequationem:

$$\frac{x\,ddx + y\,ddy + z\,ddz}{dt^2} = -\frac{n(xx + yy + zz)}{v^3} = -\frac{n}{v}.$$

Ad hanc aequationem iam addamus modo ante inuentam et cum sit $x\,ddx + dx^2 = d.\,x\,dx$; simulque

$$y\,ddy + dy^2 = d.\,y\,dy \text{ et } z\,ddz + dz^2 = d.\,z\,dz;$$

tum vero

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv;$$

 aggre-

aggregatum harum aequationum euadet

$$\frac{d.\,v\,d\,v}{d\,t^2} = \frac{n}{v} - \frac{2\,n}{d} + \delta\,\delta,$$

vbi tantum ſumus lucrati, vt duas tantum quantitates variabiles hanc aequationem ingrediantur.

§. 23. Vt iam hanc aequationem integrabilem reddamus, multiplicemus eam per $2\,v\,d\,v$, quandoquidem hinc prodibit $\int 2\,v\,d\,v\,d.\,v\,d\,v = v\,v\,d\,v^2$, et aequatio integrata erit

$$\frac{v\,v\,d\,v^2}{d\,t^2} = 2\,n\,v - \frac{2\,n\,v\,v}{d} + \delta\,\delta\,v\,v + C,$$

quae conſtans inde debet definiri, quod initio, vbi $t = 0$ ſit $v = d$. At cum ſit

$$\frac{v\,d\,v}{d\,t} = \frac{x\,d\,x}{d\,t} + \frac{y\,d\,y}{d\,t} + \frac{z\,d\,z}{d\,t},$$ pro initio erit

$$d \times \frac{d\,v}{d\,t} = a\,a' + b\,b' + c\,c',$$

hincque

$$\frac{d\,v}{d\,t} = \frac{a\,a' + b\,b' + c\,c'}{d},$$ ideoque

$$\frac{v\,v\,d\,v^2}{d\,t^2} = (a\,a' + b\,b' + c\,c')^2.$$

His igitur valoribus ſubſtitutis aequatio ad ſtatum initialem accommodata erit

$$(a\,a' + b\,b' + c\,c')^2 = \delta\,\delta\,d\,d + C,$$

vnde prodit conſtans

$$C = (a\,a' + b\,b' + c\,c')^2 - \delta\,\delta\,d\,d,$$

conſequenter aequatio noſtra integrata ita ſe habebit:

$$\frac{v\,v\,d\,v^2}{d\,t^2} = 2\,n\,v - \frac{2\,n\,v\,v}{d} + \delta\,\delta\,v\,v + (a\,a' + b\,b' + c\,c')^2 - \delta\,\delta\,d\,d,$$

vbi eſt

$$(a\,a' + b\,b' + c\,c')^2 - \delta\,\delta\,d\,d =$$

$2\,a\,b\,a'\,b'$

$$2abab'b' + 2aca'c' + 2bcb'c' - aab'b' - aac'c' - bbc'c' - bba'a' - cca'a' - ccb'b'$$

siue

$$(aa' + bb' + cc')^2 - \delta\delta dd = -(ab' - ba')^2 - (ac' - ca')^2 - (bc' - cb')^2.$$

§. 24. Quo nunc hanc aequationem concinniorem reddamus, statuamus breuitatis gratia:

$$ba' - ab' = \gamma, \quad cb' - bc' = \alpha, \quad ac' - ca' = \beta,$$

vnde formulae supra inuentae fiunt simpliciores, quoniam pro aequatione ad planum orbitae erit $\gamma z + \alpha x + \beta y = 0$, hincque porro

$$\text{tang.}\, \zeta = -\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{et} \quad \text{tang.}\, \eta = -\frac{\beta}{\gamma \operatorname{cos}\zeta}.$$

Deinde vero aequatio modo inuenta induet hanc formam:

$$\frac{vvdv^2}{dt^2} = -\alpha\alpha - \beta\beta - \gamma\gamma + 2nv - vv\left(\frac{2n}{d} - \delta\delta\right),$$

vnde deducimus:

$$dt^2 = \frac{vvdv^2}{-\alpha\alpha - \beta\beta - \gamma\gamma + 2nv - vv\left(\frac{2n}{d} - \delta\delta\right)},$$

in qua aequatione ambae variabiles v et t sunt a se inuicem separatae. Quemadmodum autem haec aequatio ad notiones in Astronomia receptas reduci queat deinceps clarius ostendemus.

§. 25. Quo nunc ipsam orbitam huius planetae facilius definiamus, eam in plano tabulae repraesentemus, vbi S ☊ sit recta ad nodum ascendentem directa, planeta autem hoc tempore versetur in z, existente eius distantia a sole $Sz = v$; tum vero ponamus angulum ☊ $Sz = \Phi$, qui ergo praebet argumentum latitudinis planetae. Elapso autem tempusculo dt peruenerit planeta in z' et posito spatiolo $zz' = ds$, T. XVIII. Fig. 3.

ob

ob angulum $zSz' = d\Phi$ et $Sz' = v + dv$ erit

$$ds^2 = dv^2 + vv\,d\Phi^2.$$

Erit autem $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, et per priorem integrationem inuenimus

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2n\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{d}\right) + \delta\delta,$$

hinc ergo erit

$$ds^2 = 2n\,dt^2\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{d}\right) + \delta\delta\,dt^2,$$

vnde fit

$$vv\,d\Phi^2 = 2n\,dt^2\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{d}\right) + \delta\delta\,dt^2 - dv^2.$$

Subſtituatur nunc hic loco dt^2 valor inuentus, ac reperietur

$$vv\,d\Phi^2 = \frac{(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)\,dv^2}{-\alpha\alpha - \beta\beta - \gamma\gamma + 2nv - vv\left(\frac{2n}{d} - \delta\delta\right)},$$

hincque fiet

$$d\Phi = \frac{dv}{v}\sqrt{\frac{\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma}{-\alpha\alpha - \beta\beta - \gamma\gamma + 2nv - vv\left(\frac{2n}{d} - \delta\delta\right)}},$$

quae aequatio cum priore, quae dat

$$dt = \frac{v\,dv}{\sqrt{-\alpha\alpha - \beta\beta - \gamma\gamma + 2nv - vv\left(\frac{2n}{d} - \delta\delta\right)}},$$

coniuncta, tam naturam orbitae quam ipſum motum planetae complectitur.

§. 26. Conſideremus nunc formulam differentialem pro $d\Phi$ inuentam, ac ponamus breuitatis gratia

$$\frac{n}{\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma} = \mathrm{F} \text{ et } \frac{\frac{2n}{d} - \delta\delta}{\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma} = \mathrm{G},$$

vt

vt habeamus

$$d\Phi = \frac{-dv}{v\sqrt{(-1+2Fv-Gvv)}},$$

cui fignum − praefigimus, quoniam motum planetae ab aphelio fumus profecuturi, quo diftantia v crefcente angulo Φ diminuitur. Nunc quo hanc formulam planiorem reddamus, ponamus $v = \frac{1}{u}$, eritque $-\frac{dv}{v} = +\frac{du}{u}$, ideoque

$$d\Phi = \frac{du}{\sqrt{(-uu+2Fu-G)}}.$$

Sit nunc porro $u = F - r$ et prodibit

$$d\Phi = \frac{-dr}{\sqrt{(FF-G-rr)}},$$

cuius integrale manifefto eft arcus circuli, cuius cofinus $= \frac{r}{\sqrt{(FF-g)}}$. Hic igitur angulus vocetur $= \omega$, vt fiat

$$\frac{r}{\sqrt{(FF-G)}} = \text{cof.}\ \omega;$$

hincque per integrationem conftantem adiiciendo, quae fit $= \theta$, erit $\Phi = \omega + \theta$; tum vero habebitur

$$r = F - u = \text{cof.}\ \omega \sqrt{(FF-G)},$$

vnde fit

$$u = F - \text{cof.}\ \omega \sqrt{(FF-G)},$$

confequenter diftantia planetae a fole

$$v = \frac{1}{F - \text{cof.}\ \omega \sqrt{(FF-G)}}.$$

§. 27. Reftituamus nunc loco F et G valores affumtos atque habebimus

$$v = \frac{\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma}{n - \text{cof.}\ \omega \sqrt{(nn - (\frac{2n}{d} - \delta\delta)(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}}.$$

Quod fi iam tam numeratorem quam denominatorem per n diuidamus et breuitatis ergo faciamus

$$\frac{\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma}{n} = f \text{ et}$$

$$\sqrt{1 - \frac{(\frac{2n}{d} - \delta\delta)(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}{nn}} = e$$

refultabit haec formula: $v = \frac{f}{1 - e \operatorname{cof.} \omega}$, ex qua forma intelligimus, quantitatem f defignare femiparametrum orbitae a planeta defcriptae, litteram vero e eius excentricitatem; tum vero angulum ω exprimere anomaliam veram ab aphelio computatam. Ducamus igitur in figura rectam S P ad aphelium directam, vt angulus P S z exhibeat anomaliam veram ω; et cum fit angulus ☊ S $z = \Phi = \omega + \theta$, erit longitudo aphelii a nodo afcendente computata, fiue angulus ☊ S P $= \theta$.

§. 28. Reducamus nunc etiam formulam pro dt inuentam ad anomaliam ω, et ex formulis inuentis fiet

$$\frac{dt}{d\Phi} = \frac{vv}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}}.$$

Cum igitur fit $d\Phi = d\omega$ et

$$vv = \frac{ff}{(1 - e \operatorname{cof.} \omega)^2} \text{ et } \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)} = \sqrt{nf}$$

erit

$$dt = \frac{ff\,d\omega}{(1 - e \operatorname{cof.} \omega)^2 \sqrt{nf}} = f\sqrt{\frac{f}{n}} \cdot \frac{d\omega}{(1 - e \operatorname{cof.} \omega)^2},$$

ideoque integrando tempus

$$t = f\sqrt{\frac{f}{n}} \int \frac{d\omega}{(1 - e \operatorname{cof.} \omega)^2},$$

cuius integrale per methodos confuetas facile eruitur. Conftat autem, fi fuerit $e < 1$ curuam fore ellypfin, fin autem fit $e > 1$, hyperbolam; cafu vero, quo $e = 1$, parabolam.

§. 29. Perpendamus nunc accuratius, quomodo haec duo noua elementa f et e ex elementis datis deter-

determinentur; ac primo quidem constat esse

$$f = \frac{\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma}{n},$$

deinde vero

$$e = \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{2n}{d} - \delta\delta\right)(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}{nn}}.$$

Vbi si loco $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma$ scribamus nf, prodibit excentricitas ita expressa:

$$e = \sqrt{1 - \frac{f}{n}\left(\frac{2n}{d} - \delta\delta\right)} = \sqrt{1 - \frac{2f}{d} + \frac{\delta\delta f}{n}},$$

atque hinc porro colligitur distantia aphelii a sole $= \frac{f}{1 - e}$, et distantia perihelii $= \frac{f}{1 + e}$, vnde fit semiaxis transuersus $= \frac{f}{1 - ee} = \frac{nd}{2n - d\delta\delta}$, vbi est $\delta\delta = a'a' + b'b' + c'c'$. Sicque omnia, quae ad orbitae et motus determinationem pertinent, sunt assignata.

§. 30. Vt autem etiam positionem lineae apsidum determinemus, pro statu initiali quaeramus tam angulum ω quam angulum ϕ: ex his enim erit $\theta = \phi - \omega$; sicque innotescet angulus ☊ S P $= \theta$. Initio autem erat $v = d$, vnde pro statu initiali ex formula $v = \frac{f}{1 - e \cos. \omega}$ erit $\cos. \omega = \frac{d - f}{de}$, quem angulum initialem designemus per Ω, ita vt sit $\cos. \Omega = \frac{d - f}{de}$, vnde igitur iste angulus computari poterit, quo inuento, si initio ponamus fuisse $\phi = \Phi$, inde definietur angulus quaesitus $\theta = \Phi - \Omega$.

§. 31. Pro hoc autem angulo Φ inueniendo contemplemur iterum nostrum planum fixum A S B, in quo sit recta S ☊ linea nodorum, pro cuius positione vocaui- T. XVIII. Fig. 4.

 mus

mus angulum $A S ☊ = \zeta$, inuenimusque tang. $\zeta = -\frac{\alpha}{\beta}$. Fuerit nunc initio planeta in puncto h, pro quo ergo erant coordinatae $Sf = a$, $fg = b$ et $gh = c$, ipſa vero diſtantia a ſole $Sh = d$; ac manifeſtum eſt angulum $☊ S h$ eſſe ipſum angulum Φ, quem quaerimus. Pro eo igitur inueniendo ex g ad $S☊$ agatur normalis gk, et quia hk etiam ad $S☊$ erit normalis, fiet vtique cof. $\Phi = \frac{Sk}{Sh}$; Quia vero angulus $A S ☊ = fgk = \zeta$, facile reperitur diſtantia $Sk = a \operatorname{cof.} \zeta + b \operatorname{fin.} \zeta$, ſicque habebimus

$$\operatorname{cof.} \Phi = \frac{a \operatorname{cof.} \zeta + b \operatorname{fin.} \zeta}{d},$$

vnde ſi computetur angulus Φ, erit quaeſitus angulus $\vartheta = \Phi - \Omega$. Quemadmodum autem hic orbitam Saturni per ſtatum initialem determinauimus, eaedem formulae ſimili modo pro Ioue valebunt, ſi modo loco litterarum minuſcularum maiuſculae vſurpentur.

De comparatione motus planetarum veri cum motu regulari.

§. 32. Si planetae nullam actionem in ſe inuicem excercerent, eorum motus per formulas ante inuentas ex ſtatu initiali facile determinari poſſent; ac ſi eorum orbetae referantur ad planum noſtrum fixum in coelo conſtitutum, quod cum ſitu, quem ecliptica initio huius ſaeculi tenuit, conuenire aſſumimus, tabulae pro eorum motu definiendo multo forent ſimpliciores quam vulgo exhiberi ſolent. Primo enim tam linea nodorum quam inclinatio orbitae ad planum fixum nullam plane mutationem pateretur. Deinde etiam poſitio lineae apſidum perpetuo ad eadem coeli puncta dirigeretur; vnde his elementis ſemel cogni-

cognitis sufficeret ad quoduis tempus longitudinem tantum mediam planetae, seu potius argumentum latitudinis medium ex tabulis mediorum motuum definire, neque opus esset, loca aphelii et nodorum computare, sed sola aequatio centri cum reductione ad planum fixum locum planetae exacte esset ostensura.

§. 33. Hoc igitur motu regulari constituto videamus quomodo planetarum motum verum, quatenus ab actione mutua perturbatur, cum regulari comparari et quantum ab eo discrepet definiri conueniat. Quoniam autem ob actionem mutuam euenire potest: primo vt tempus periodicum quodpiam augmentum vel decrementum accipiat; secundo, vt excentricitas aliquam mutationem patiatur; tertio, vt lineae nodorum aliquis motus super plano fixo inducatur; quarto, vt etiam inclinatio laeuem quandam mutationem subeat; quinto, vt linea apsidum non in quiete permaneat, sed aliquem motum progressiuum recipiat; sexto denique, vt insuper aliae inaequalitates periodicae sese admisceant: hos effectus ex aequationibus principalibus, quas supra pro motu planetarum perturbato exhibuimus, peti oportebit.

§. 34. Quod ad duos priores effectus attinet, si scilicet tempus periodicum et excentricitas constantem quandam reciperent, forma tabularum ad motum regularem constructarum nullam plane mutationem acciperent, quandoquidem tantum opus esset tabulam mediorum motuum ad verum tempus periodicum accommodare, simulque tabulam aequationum centri ex vera excentricitate supputare. Ac si tam lineae nodorum quam apsidum ab actione mutua motus quispiam imprimeretur, qui saltem per aliquot saecula maneret constans, tum in tabulis mediorum motuum praeter loca media etiam ad quoduis tempus tam locus aphelii quam nodorum consignari deberet, vnde tabulae eandem plane formam impetrarent, qua more recepto exhiberi solent. Sin autem insuper etiam inclinatio per aliquot saecula quandam mutationem aequabilem pateretur, eam simili modo tabulis consuetis inferre liceret, dum scilicet tabula pro latitudine et reductione ad planum fixum simul ad plures inclinationes accommodaretur. Sin autem praeterea inaequalitatas sexto loco commemoratae accederent, eas in peculiaribus tabulis tabulis consuetis adiici oporteret.

§. 35. Quare si ex aequationibus principalibus omnes aberrationes a motu regulari perscrutari et cum tabulis more solito exstructis comparare velimus, probe perpendere debemus, omnes effectus perturbationis, praeter vltimum, iam in ipsas tabulas esse relatas, ita vt tantum supersit inaequalitates vltimi generis inuestigare; vnde in hac inuestigatione maxime curandum est, vt inaequalitates postremi ordinis sollicite ab iis distinguamus, quae tabulis ordinariis iam sunt insertae; quia alioquin easdem perturbationes bis in computum traheremus, quod vitium forte iis correctionibus, quibus Astronomi tabulas planetarum iam emendare sunt conati, obiici potest, dum effectus perturbationis in motu apheliorum productos denuo tabulis peculiaribus adiectis implicuerunt, cum tamen in promotione apheliorum iam fuerint in tabulas illati.

§. 36.

§. 36. His circumſtantiis probe perpenſis ſi in omnes effectus a perturbatione oriundos inquirere velimus, eos neutiquam cum tabulis aſtronomicis receptis comparari conuenit, quippe quae non contemnendam partem omnium perturbationum iam inuoluunt. Sed potius neceſſe erit ex ſtatu initiali cuiusque planetae peculiares tabulas conficere, quae eorum motum, ſi nulla plane ad eſſet perturbatio, accurate indicarent; tum enim admiſſa actione mutua ſi ex theoria perturbationum ad quoduis tempus verus planetae locus aſſignari potuerit, isque cum loco iſtarum tabularum comparetur, tum demum iudicare licebit, quinam effectus perturbationi quouis caſu ſit tribuendus. Cum autem talis inueſtigatio etiamnunc ſit difficillima, praecipue pro talibus planetis, quorum orbitae non adeo a ſe inuicem ſunt remotae, methodum hic adiungam, cuius ope, ſaltem per temporis ſpatium non nimis magnum, effectus perturbationis accurate aſſignari poterit.

De perturbatione motus planetarum per temporis interuallum non minis magnum oriunda.

§. 37. Inchoemus hanc inueſtigationem ab ipſo ſtatu initiali, quo erat $t = 0$, et quoniam poſuimus tum fuiſſe pro Ioue,

$$X = A;\ Y = B;\ Z = C;\ \frac{dX}{dt} = A';\ \frac{dY}{dt} = B';\ \frac{dZ}{dt} = C';$$

pro Saturno

$$x = a;\ y = b;\ z = c;\ \frac{dx}{dt} = a';\ \frac{dy}{dt} = b';\ \frac{dz}{dt} = c';$$

manifeſtum eſt, ſi nullae plane adeſſent vires ſollicitantes, vtriusque planetae motum futurum eſſe aequabilem et in directum procedentem. Tum igitur elapſo tempore t dierum

dierum foret

$$X = A + A' t, \quad Y = B + B' t, \quad Z = C + C' t,$$

similique modo

$$x = a + a' t, \quad y = b + b' t, \quad z = c + c' t,$$

haeque formulae ergo etiam cum vero motu vtriusque planetae conuenient, si modo tempus t accipiatur infinite paruum; vnde intelligitur, quo minus id statuatur, eo propius has formulas ad verum motum esse accessuras.

§. 38. Hinc igitur patet, pro maiusculis temporis interuallis motum accuratius per huiusmodi formulas expressum iri:

Pro Ioue

$$X = A + A' t + A'' t t + A''' t^3 + \text{etc.}$$
$$Y = B + B' t + B'' t t + B''' t^3 + \text{etc.}$$
$$Z = C + C' t + C'' t t + C''' t^3 + \text{etc.}$$

Pro Saturno

$$x = a + a' t + a'' t t + a''' t^3 + \text{etc.}$$
$$y = b + b' t + b'' t t + b''' t^3 + \text{etc.}$$
$$z = c + c' t + c'' t t + c''' t^3 + \text{etc.}$$

Quod si ergo sumamus has formulas non vltra potestatem tertiam ipsius t extendi, quoniam earum termini sequentes vehementer conuergere debent, istae formulae iam ad satis notabile tempus applicari poterunt, dabiturque talis terminus, quem si tempus t non superet, hae formulae a motu vero vtriusque planetae vix aberrare erunt censendae, siue error saltem pro insensibili haberi poterit.

§. 39.

§. 39. His autem valoribus adhibitis pro sex nostris aequationibus fundamentalibus, quas supra §. 9. exhibuimus, habebimus:

$$\frac{ddX}{dt^2} = 2A'' + 6A'''t \quad\Big|\quad \frac{ddx}{dt^2} = 2a'' + 6a'''t$$
$$\frac{ddY}{dt^2} = 2B'' + 6B'''t \quad\Big|\quad \frac{ddy}{dt^2} = 2b'' + 6b'''t$$
$$\frac{ddZ}{dt^2} = 2C'' + 6C'''t \quad\Big|\quad \frac{ddz}{dt^2} = 2c'' + 6c'''t$$

Quod si ergo hos valores pro membris sinistris nostrarum aequationum scribamus, in dextris autem, vbi nulla occurrunt differentialia, valores pro ipsis litteris X, Y, Z, et x, y, z, assumtos substituamus, inde nouos coëfficientes etiamnunc incognitos A, A, a, a, etc. inde definire licebit. At quoniam in membris sinistris tempus t non vltra primam dimensionem assurgit, etiam in dextris altiores potestates tuto negligere licebit, ita vt sufficiat ibi statuisse

$$X = A + A't,\ Y = B + B't,\ Z = C + C't,$$
$$x = a + a't,\ y = b + b't,\ z = c + c't,$$

quae formulae cum penitus sint cognitae, ex iis coëfficientes adhuc incogniti in membris sinistris occurrentes facillime poterunt definiri.

§. 40. His obseruatis euoluamus primo distantias litteris V, v et w expressas, et cum sit $V^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, erit quadratis ipsius t omissis

$$V^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2(AA' + BB' + CC')t,$$

pro qua expressione faciamus breuitatis gratia

$$A^2 + B^2 + C^2 = F^2 \text{ et } AA' + BB' + CC' = G,$$

ita vt sit $V^2 = FF + 2Gt$. Simili modo pro distantia v faciamus

$$aa + bb + cc = ff \text{ et } aa' + bb' + cc' = g,$$

vt fiat $vv = ff + 2gt$. Denique pro diſtantia w ponamus

$$(a - A)^2 + (b - B)^2 + (c - C)^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F} \text{ et}$$
$$(a - A)(a' - A') + (b - B)(b' - B') + (c - C)(c' - C') = \mathfrak{G}$$

vt fiat $w = \mathfrak{F}\mathfrak{F} + 2\mathfrak{G}t$.

§. 41. Nunc igitur cum harum diſtantiarum cubi ſoli in denominatoribus occurrant; iis euolutis et altioribus ipſius t poteſtatibus poſt primam omiſſis, habebimus vt ſequitur:

$$\frac{1}{V^3} = \frac{1}{F^3 - \frac{3Gt}{F^5}};\ \frac{1}{v^3} = \frac{1}{f^3 - \frac{3gt}{f^5}};\ \frac{1}{w^3} = \frac{1}{\mathfrak{F}^3 - \frac{3\mathfrak{G}t}{\mathfrak{F}^5}},$$

quas ergo formulas in noſtris aequationibus ſingulas cum ſuis numeratoribus coniungi oportet.

§. 42. Hinc igitur pro terminis per V^3 diuiſis, ſi quadrata temporis t pariter omittantur, reperiemus

$$\frac{X}{V^3} = \frac{A}{F^3} + \left(\frac{A'}{F^3} - \frac{3AG}{F^5}\right)t$$
$$\frac{Y}{V^3} = \frac{B}{F^3} + \left(\frac{B'}{F^3} - \frac{3BG}{F^5}\right)t$$
$$\frac{Z}{V^3} = \frac{C}{F^3} + \left(\frac{C'}{F^3} - \frac{3CG}{F^5}\right)t$$

ſimilique modo pro terminis per v^3 diuiſis

$$\frac{x}{v^3} = \frac{a}{f^3} + \left(\frac{a'}{f^3} - \frac{3ag}{f^5}\right)t$$
$$\frac{y}{v^3} = \frac{b}{f^3} + \left(\frac{b'}{f^3} - \frac{3bg}{f^5}\right)t$$
$$\frac{z}{v^3} = \frac{c}{f^3} + \left(\frac{c'}{f^3} - \frac{3cg}{f^5}\right)t$$

At vero pro terminis per w^3 diuiſis, quo ibi concinnius exprimantur, ſtatuamus breuitatis gratia:

$a - A$

$$a - A = \mathfrak{A};\; b - B = \mathfrak{B};\; c - C = \mathfrak{C};$$
$$a' - A' = \mathfrak{A}';\; b' - B' = \mathfrak{B}';\; c' - C' = \mathfrak{C}';$$

vnde hi termini fient

$$\frac{x - X}{w^3} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{F}^3} + \left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{F}^3} - \frac{3\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5}\right) t$$
$$\frac{y - Y}{w^3} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{F}^3} + \left(\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{F}^3} - \frac{3\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5}\right) t$$
$$\frac{z - Z}{w^3} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{F}^3} + \left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{F}^3} - \frac{3\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5}\right) t$$

§. 43. Quia igitur nil aliud fupereft, nifi vt ifti valores in noftris aequationibus fubftituantur et valores a tempore t immunes cum coefficientibus A'', B'', C''; a'', b'', c'' etc. illi vero qui tempus t continent cum litteris A, B, C et a, b, c comparentur, hoc facto fequentes horum coefficientium bis fignatorum incognitorum reperiemus determinationes:

$$A'' = -\frac{\Delta(1+M)A}{F^3} + \frac{\Delta m \mathfrak{A}}{\mathfrak{F}^3} - \frac{\Delta m a}{f^3},$$
$$B'' = -\frac{\Delta(1+M)B}{F^3} + \frac{\Delta m \mathfrak{B}}{\mathfrak{F}^3} - \frac{\Delta m b}{f^3},$$
$$C'' = -\frac{\Delta(1+M)C}{F^3} + \frac{\Delta m \mathfrak{C}}{\mathfrak{F}^3} - \frac{\Delta m c}{f^3},$$

porro

$$a'' = -\frac{\Delta(1+m)a}{f^3} - \frac{\Delta M \mathfrak{A}}{\mathfrak{F}^3} - \frac{\Delta M A}{F^3},$$
$$b'' = -\frac{\Delta(1+m)b}{f^3} - \frac{\Delta M \mathfrak{B}}{\mathfrak{F}^3} - \frac{\Delta M B}{F^3},$$
$$c'' = -\frac{\Delta(1+m)c}{f^3} - \frac{\Delta M \mathfrak{C}}{\mathfrak{F}^3} - \frac{\Delta M C}{F^3},$$

§. 44. Praeterea vero pro iisdem litteris ter fignatis nancifcemur fequentes valores:

$$A''' = -\Delta(1+M)\left(\frac{A'}{F^3} - \frac{3AG}{F^5}\right) + \Delta m\left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{F}^3} - \frac{3\mathfrak{A}\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5}\right) - \Delta m\left(\frac{a'}{f^3} - \frac{3ag}{f^5}\right),$$
$$B''' = -\Delta(1+M)\left(\frac{B'}{F^3} - \frac{3BG}{F^5}\right) + \Delta m\left(\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{F}^3} - \frac{3\mathfrak{B}\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5}\right) - \Delta m\left(\frac{b'}{f^3} - \frac{3bg}{f^5}\right),$$
$$C''' = -\Delta(1+M)\left(\frac{C'}{F^3} - \frac{3CG}{F^5}\right) + \Delta m\left(\frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{F}^3} - \frac{3\mathfrak{C}\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5}\right) - \Delta m\left(\frac{c'}{f^3} - \frac{3cg}{f^5}\right),$$
$$a''' = -\Delta(1+m)\left(\frac{a'}{f^3} - \frac{3ag}{f^5}\right) - \Delta M\left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{F}^3} - \frac{3\mathfrak{A}\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5}\right) - \Delta M\left(\frac{A'}{F^3} - \frac{3AG}{F^5}\right),$$
$$b''' = -\Delta(1+m)\left(\frac{b'}{f^3} - \frac{3bg}{f^5}\right) - \Delta M\left(\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{F}^3} - \frac{3\mathfrak{B}\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5}\right) - \Delta M\left(\frac{B'}{F^3} - \frac{3BG}{F^5}\right),$$
$$c''' = -\Delta(1+m)\left(\frac{c'}{f^3} - \frac{3cg}{f^5}\right) - \Delta M\left(\frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{F}^3} - \frac{3\mathfrak{C}\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5}\right) - \Delta M\left(\frac{C'}{F^3} - \frac{3CG}{F^5}\right),$$

§. 45. Inuentis igitur his coefficientibus, motum vtriusque planetae per tempus non nimis magnum t dierum ab initio elapſum ſatis exacte cognoſcemus; erit enim vti aſſumſimus:

Pro Ioue

$$X = A + A' t + A'' t t + A''' t^3.$$
$$Y = B + B' t + B'' t t + B''' t^3.$$
$$Z = C + C' t + C'' t t + C''' t^3.$$

Pro Saturno

$$x = a + a' t + a'' t t + a''' t^3.$$
$$y = b + b' t + b'' t t + b''' t^3.$$
$$z = c + c' t + c'' t t + c''' t^3.$$

ex quibus formulis, poſtquam pro quouis caſu in numeris fuerint euolutae, facile diſcernere licebit, quot dies tempori t ſine errore tribui poterunt. Cum enim hae formulae plerumque vehementer conuergant, haud difficulter iudicabitur, vtrum ſequentes terminos poſt tertiam poteſtatem ipſius t ſine errore negligere liceat nec ne.

§. 46.

§. 46. Cum autem hoc modo quantitas interualli temporis fuerit conſtituta, ſtatus planetarum pro fine huius temporis inuentus iterum tanquam ſtatus initialis ſpectari poterit, a quo ſimili modo per aequale temporis interuallum vlterius progredi licebit; et ita porro pro ſingulis interuallis cognoſcetur effectus perturbationis. Vnde ſi talia interualla per aliquot reuolutiones integras vtriusque planetae computentur, haud difficulter diiudicare licebit, quantas immutationes tam tempora periodica et excentricitates quam poſitio lineae apſidum et nodorum inde accipiant, quae ergo iam in tabulis ordinariis contineri ſunt cenſendae; reliquae vero portiones perturbationis praebebunt inaequalitates periodicas, quas peculiaribus tabulis complecti conueniet; atque hic tutiſſimus videtur modus, ad perfectam cognitionem omnium perturbationum, quas planetae ſibi mutuo inferunt, perueniendi.

§. 47. Quo vſum harum formulam exemplo illuſtremus, conſtituamus initium interualli temporis noſtri t in ipſo initio huius ſaeculi, quoniam poſitio, quam ecliptica tum tenuit, noſtrum ipſum planum fixum ſuppeditat, et tabulis Caſſinianis vtentes reperimus pro hoc tempore loca heliocentrica Iouis et Saturni vt ſequitur:

Pro Ioue.

	Anno 1700 Ianuar. 1 d.	Anno 1700 Ianuar. 2 d.
Longit. ♃ =	$9^s.\ 10^\circ.\ 26'.\ 53''$	$9^s.\ 10^\circ.\ 32'.\ 1''$
Latitudo Auſtr.	$0^\circ.\ 4'.\ 5$	$0.\ 4.\ 13$
Diſtantia a ſole	5, 1864	5, 1861

 Pro

Pro Saturno.

Anno 1700 Ianuar. 1 d.	Anno 1700 Ianuar. 2 d.
Longit. ♄ $= 11^s.\ 2°.\ 57'.\ 54''$	$11^s.\ 2°.\ 59'.\ 51''$
Latitudo Auſtr. 1. 40. 18	1. 40. 21
Diſtantia a ſole $= 9,7470$	9,7466

Haec ergo loca pro meridiano Pariſino, ipſo momento meridiei vtriusque diei ſunt intelligenda. At quoniam in his tabulis diſtantia ſecundum regulam *Kepleri* ex temporibus periodicis ſunt definitae, vbi aſſumitur planetas a ſola maſſa Solis ad Solem attrahi, cum tamen, vt vidimus, ad maſſam Solis inſuper maſſa planetae ſit addenda, ita vt vis Iouem ad Solem vrgens ſit vt $1 + M = 1 + \frac{1}{1067}$ et vis Saturnum ad Solem attrahens vt $1 + m = 1 + \frac{1}{3021}$, vncubi diſtantiarum in eadem ratione augeri debebunt, vnde diſtantiam Iouis a ſole augeri oportebit in ratione 1 ad $1 + \frac{1}{3200}$, diſtantia vero Saturni in ratione 1 ad $1 + \frac{1}{9000}$, vnde fiet pro primo Ianuarii

Diſtantia Iouis $= 5,188128$, Diſtantia Saturni $= 9,748083$

at pro ſecundo Ianuarii

Diſtantia Iouis $= 5,187829$, Diſtantia Saturni $= 9,747683$

§. 48. Ex his iam locis computemus ternas coordinatas, quae pro Ioue ex primo Ianuarii dabunt litteras A, B, C hincque etiam diſtantiam F; pro Saturno autem a, b, c et f, quas igitur hic apponamus:

$a =$

$a = 8,679506$; $b = -4,428979$; $c = -0,284367$; $f = 9,748083$
$A = 0,940210$; $B = -5,098711$; $C = -0,006146$; $F = 5,188128$

$a - A = 7,739296$; $b - B = +0,669732$; $c - C = -0,278221$;
siue $\mathfrak{A}$ siue $\mathfrak{B}$ siue $\mathfrak{C}$

Deinde hae coordinatae ab iis quae Ianuario 2 respondent subtractae relinquunt ternas celeritates, quae erunt:

$a' = 0,002282$; $b' = -0,005108$; $c' = -0,000130$; $f' = -0,000400$
$A' = 0,007556$; $B' = -0,001711$; $C' = -0,000185$; $F' = -0,000299$

$a' - A' = -0,005274$; $b' - B' = -0,003397$; $c' - C' = +0,000055$
siue $\mathfrak{A}'$ siue $\mathfrak{B}'$ siue $\mathfrak{C}'$

praeterea hic notasse iuuabit, cum sit

$$G = A A' + B B' + C C'$$

fore $G = F F'$, similique modo $g = f f'$.

§. 49. His valoribus euolutis definiamus quoque valores

$$\mathfrak{F}\mathfrak{F} = (a - A)^2 + (b - B)^2 + (c - C)^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 \text{ et}$$
$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}\mathfrak{B}' + \mathfrak{C}\mathfrak{C}',$$

ac reperiemus

$\mathfrak{A}^2 = 59,89670$	$\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = -0,04082$
$\mathfrak{B}^2 = 0,44854$	$\mathfrak{B}\mathfrak{B}' = -0,00227$
$\mathfrak{C}^2 = 0,07741$	$\mathfrak{C}\mathfrak{C}' = -0,00001$
$\mathfrak{F}^2 = 60,42265$	$\mathfrak{G} = -0,04310$
	ergo $3\mathfrak{G} = -0,12930$.

Vt nunc hinc valores supra datos euoluamus, in subsidium um apponamus logarithmos terminorum, quibus indigemus:

$$l\frac{1}{F^3} = 7,8549679;\ l\frac{1}{f^3} = 7,0332427;\ l\frac{1}{\mathfrak{g}^3} = 7,3282005.$$

Deinde cum fit $G = F F'$ et $g = f f'$, erit

$$\frac{3G}{F^5} = \frac{3F'}{F^4} \text{ et } \frac{3g}{f^5} = \frac{3f'}{f^4};$$

hinc per logarithmos:

$$l\frac{3G}{F^5} = (-)\,4,0927469;\ l\frac{3g}{f^5} = (-)\,3,1235048;$$

$$l\frac{3\mathfrak{G}}{\mathfrak{g}^5} = (-)\,4,6585993.$$

§. 50. Ex his iam valoribus computemus litteras bis fignatas, tam maiufculas quam minufculas, quem in finem euoluamus fequentes valores:

$$l\frac{A}{F^3} = 7,8281928;\ l\frac{B}{F^3} = (-)\,8,5624283;\ l\frac{C}{F^3} = (-)\,5,6435605$$

$$\frac{A}{F^3} = 0,0067328;\ \frac{B}{F^3} = -0,0365114;\ \frac{C}{F^3} = -0,0000440,$$

porro

$$l\frac{a}{f^3} = 7,9717377;\ l\frac{b}{f^3} = (-)\,7,6795464;\ l\frac{c}{f^3} = (-)\,6,4871219$$

$$\frac{a}{f^3} = 0,0093699;\ \frac{b}{f^3} = -0,0047813;\ \frac{c}{f^3} = -0,0003070$$

tandem

$$l\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{g}^3} = (+)\,8,2169019;\ l\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{g}^3} = (+)\,7,1541015;\ l\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{g}^3} = (-)\,6,7725904$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{g}^3} = 0,0164779;\ \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{g}^3} = 0,0014254;\ \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{g}^3} = -0,0005923.$$

§. 51. Hinc igitur colligere poterimus valores litterarum bis fignatarum, vbi quidem fractiones M et m cum littera Δ adhuc in calculo retineamus, ficque reperiemus:

Pro

Pro Ioue

$A'' = -\Delta(1+M).0,0067328 + \Delta m.0,0164779 - \Delta m.0,0093699$

siue $A'' = -0,0067328.\Delta(1+M) + 0,0071080.\Delta m$

$B'' = +\Delta(1+M).0,0365114 + \Delta m.0,0014254 + \Delta m.0,0047813$

siue $B'' = 0,0365114\,\Delta(1+M) + 0,0062067.\Delta m$

$C'' = +\Delta(1+M).0,0000440 - \Delta m.0,0005923 + \Delta m.0,0003070$

siue $C'' = 0,0000440.\Delta(1+M) - .0,0002853.\Delta m$

Pro Saturno

$a'' = -\Delta(1+m).0,0093699 - \Delta M.0,0164779 - \Delta M.0,0067328$

siue $a'' = -0,0093699.\Delta(1+m) - 0,0232107.\Delta M$

$b'' = \Delta(1+m).0,0047813 - \Delta M.0,0014254 + \Delta M.0,0365114$

siue $b'' = 0,0047813.\,\Delta(1+m) + 0,0350860.\Delta M$

$c'' = +\Delta(1+m).0,003070 + \Delta M.0,0005923 + \Delta M.0,0000440$

siue $c'' = 0,0003070.\,\Delta(1+m) + 0,0006363.\Delta M$

§. 52. Subſtituamus nunc pro Δ, M et m valores ſupra inuentos, ſcilicet;

$$\Delta = 0,0002945493;\ M = \tfrac{1}{1067}\ \text{et}\ m = \tfrac{1}{3021},$$

vnde fit

$$l\,\Delta(1+M) = 6,4695649;\ l\Delta(1+m) = 6,4693018;$$
$$l\,\Delta\,M = 3,4409936;\ l\,\Delta\,m = 2,9890073;$$

vnde valores ante inuentos ita per meros numeros euoluamus, vt maneant bipartiti, quandoquidem pars prior ad motum regularem pertinet, poſterior vero perturbationem complectitur. Erunt igitur

	Numeri.	Logarithmi.
$A'' =$	$-\,0,00000198499$	$4,2977577$
	$+\,0,00000000069$	$0,8407547$
$B'' =$	$+\,0,00001076448$	$5,0319932$
	$+\,0,00000000060$	$0,7818680$
$C'' =$	$+\,0,00000001297$	$2,1131254$
	$-\,0,00000000003$	$-\,1,4443091$
$a'' =$	$-\,0,00000276083$	$4,4410395$
	$-\,0,00000000641$	$1,8066818$
$b'' =$	$+\,0,00000140880$	$0,1488482$
	$+\,0,06000000968$	$1,9861275$
$c'' =$	$+\,0,00000009045$	$2,9564237$
	$+\,0,00000000017$	$0,2446555$

§. 53. Computemus denique etiam litteras ter fignatas, id quod commodiffime fiet fequenti modo

$$\frac{A'}{F^3} = \quad 0,0000541078;$$
$$-\frac{3GA}{F^5} = \underline{+\,0,0000011640}$$
$$+\,0,0000552718;$$

$$\frac{B'}{F^3} = -\,0,0000122523;$$
$$-\frac{3GB}{F^5} = \underline{-\,0,0000063126}$$
$$-\,0,0000185649;$$

$$\frac{C'}{F^3} = -\,0,0000013262.$$
$$-\frac{3GC}{F^5} = \underline{-\,0,0000000076}$$
$$-\,0,0000013338.$$

$$\frac{a'}{f^3} = +\,0,0000024635;$$
$$-\frac{3ag}{f^5} = \underline{+\,0,0000011534}$$
$$+\,0,0000036169;$$

$\frac{b'}{f^3}$

$$\frac{b'}{f^3} = -0,0000055143;$$

$$-\frac{3bg}{f^5} = \underline{-0,0000005886}$$
$$-0,0000061029;$$

$$\frac{c'}{f^3} = -0,0000001403.$$

$$-\frac{3cg}{f^5} = \underline{-0,0000000378}$$
$$-0,0000001781.$$

$$\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{F}^3} = -0,0000112299;$$

$$-\frac{3\mathfrak{A}\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5} = \underline{+0,0000352615}$$
$$+0,0000240316;$$

$$\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{F}^3} = -0,0000072327;$$

$$-\frac{3\mathfrak{B}\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5} = \underline{+0,0000041813}$$
$$-0,0000041813;$$

$$\frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{F}^3} = +0,0000001171.$$

$$-\frac{3\mathfrak{C}\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5} = \underline{-0,0000012676}$$
$$-0,0000011505.$$

§. 54. His iam formulis per numeros euolutis pro litteris nostris ter signatis §. 44 sequentes valores colligemus:

Pro Ioue.

$$A''' = -\Delta(1+M).\,0,0000552718 + \Delta m.\,0,0000240316$$
$$-\Delta m.\,0,0000036169$$

$$\text{siue } A''' = -0,0000552718\,\Delta(1+M) + 0,0000204147\,\Delta m$$

$$B''' = \Delta(1+M).\,0,0000185649 - \Delta m.\,0,0000041813$$
$$+\Delta m.\,0,0000061029$$

$$\text{siue } B''' = +0,0000185649.\Delta(1+M) + 0,0000019216\,\Delta m$$

$$C''' = \Delta(1+M)\,0,0000013338 - \Delta m.\,0,0000011505$$
$$+\Delta m.\,0,0000001781$$

$$\text{siue } C''' = 0,0000013338.\Delta(1+M) - 0,0000009724.\,\Delta m$$

 Pro

Pro Saturno.

$$a''' = -\Delta(1+m).\ 0,000006169 - \Delta M.\ 0,0000240316$$
$$- \Delta M.\ 0,0000552718$$

fiue $a''' = -0,0000036169.\Delta(1+m) - 0,0000793034.\Delta M$

$$b''' = \Delta(1+m).\ 0,0000061029 + \Delta M.\ 0,0000041813$$
$$+ \Delta M.\ 0,0000185649$$

fiue $b''' = 0.0000061029.\Delta(1+m) + 0,0000227462.\Delta M$

$$c''' = \Delta(1+m).\ 0,0000001781 + \Delta M.\ 0,0000011505$$
$$+ \Delta M.\ 0,0000013338$$

fiue $c''' = 0,0000001781.\Delta(1+m) + 0,0000024843.$

§. 55. Tandem hi valores penitus per numeros euoluantur, diftinguendis tamen binis cuiusque partibus, quippe prior refpondet motui regulari, pofterior vero perturbationi. Sicque nancifcemur

	Numeros.	logarithmos.
$A''' =$	$-0,000000001629553$	$2,2120684$
	$+0,0000000000000199$	$-2,2989503$
$B''' =$	$+0,000000000547340$	$1,7382576$
	$+0,0000000000000019$	$-3,2726703$
$C''' =$	$+0,000000000039324$	$0,5946556$
	$-0,0000000000000009$	$-4,9768523$
$a''' =$	$-0,000000000106571$	$1,0276383$
	$-0,0000000000002189$	$-1,3402854$
$b''' =$	$+0,000000000179820$	$1,2548380$
	$+0,0000000000000627$	$-2,7979204$
$c''' =$	$+0,0000000000005247$	$-1,7199657$
	$+0,0000000000000068$	$-3,8361976$

§. 56.

§. 56. Quod si hi valores ter signati cum praecedentibus bis signatis comparentur, circiter millies minores deprehenduntur; vnde concludere licet, si ad litteras quater signatas progredi vellemus, eas denuo prope modum millies minores esse prodituras. His autem valoribus inuentis pro tempore t dierum elapso coordinatae pro locis vtriusque planetae erunt:

Pro Ioue

$$X = A + A^{I} t + A^{II} tt + A^{III} t^{3}$$
$$Y = B + B^{I} t + B^{II} tt + B^{III} t^{3}$$
$$Z = C + C^{I} t + C^{II} tt + C^{III} t^{3}$$

Pro Saturno

$$x = a + a^{I} t + a^{II} tt + a^{III} t^{3}$$
$$y = b + b^{I} t + b^{II} tt + b^{III} t^{3}$$
$$z = c + c^{I} t + c^{II} tt + c^{III} t^{3}$$

§. 57. Praeterea vero etiam hinc ternae celeritates vtriusque planetae ad idem tempus assignari poterunt, quippe quae erunt:

Pro Ioue.

$$\frac{dX}{dt} = A^{I} + 2 A^{II} t + 3 A^{III} tt$$
$$\frac{dY}{dt} = B^{I} + 2 B^{II} t + 3 B^{III} tt$$
$$\frac{dZ}{dt} = C^{I} + 2 C^{II} t + 3 C^{III} tt$$

Pro Saturno.

$$\frac{dx}{dt} = a^{I} + 2 a^{II} t + 3 a^{III} tt$$
$$\frac{dy}{dt} = b^{I} + 2 b^{II} t + 3 b^{III} tt$$
$$\frac{dz}{dt} = c^{I} + 2 c^{II} t + 3 c^{III} tt$$

§. 58. Quia hae progressiones tantopere conuergunt, litterae t satis magnum valorem tribuere licebit, antequam error sensibilis metui debeat. Ad quod diiudicandum

candum obſeruaſſe iuuabit, errorem vnitatis in quinta figura decimali commiſſo vix errorem duorum minutorum ſecundorum in loco planetae producere; vnde intelligitur, pro littera t tuto decem vel 20 dies accipi poſſe, neque verendum eſſe ne in parte regulari error vnius minuti ſecundi resultet. Pro partibus autem perturbationem continentibus nullus error exſurget, etiamſi interuallum centum dierum aſſumemus ſumendo $t = 100$. Pro partibus quidem regularibus valor $t = 100$ vtique nimis foret magnus; ſed quoniam ex ſtatu initiali rite conſtituto facile tabulae pro motu regulari ſequente conſtrui poſſunt, ex iis pro initio cuiusque interualli tam locus quam motus vtriusque planetae excerpi poterit, qui etiamſi a vero parumper diſcrepet, tamen perturbationes in ſequentibus interuallis nullam inde mutationem patientur. Hoc modo omnia interualla temporis ſucceſſiua vsque ad 100 dies augere licebit, quandoquidem totum negotium huc redit, vt effectus perturbationis in ſingulis interuallis ſatis exacte definiatur.

§. 59. Quod ſi ergo hac ratione per interualla centum dierum progredi et ambos planetas in motu quaſi proſequi velimus, omnes perturbationes ex ſingulis interuallis collectae effectum totum inde oriundum declarabunt. Ac ſi hoc modo calculum vsque ad 60 annos, quo tempore Saturnus duas, Iupiter vero quinque reuolutiones abſoluit, continuare lubuerit, inde haud difficulter omnes inaequalitates ab actione mutua oriundas cognoſcere indeque tabulas ſolitas emendare licebit.

DE