1783

# De proprietatibus triangulorum mechanicis

Leonhard Euler

# DE PROPRIETATIBVS TRIANGVLORVM MECHANICIS.

Auctore

*L. EVLERO.*

Quemadmodum in Geometria sola extensio corporum cum eorum figura consideratur, ita in Mechanica potissimum materia, ex qua constant, spectatur, ex cuius quantitate eorum massa seu inertia aestimari solet, vnde plurimae aliae affectiones, quas in determinatione motus nosse oportet, deducuntur. Inter has affectiones praecipuum locum tenet centrum grauitatis, quod autem potius centrum inertiae appellare expedit, quoniam etiam in corporibus, quae non sunt grauia, perinde locum habet. Tum vero ad motum corporum determinandum, pro quouis axe, circa quem gyratur, momentum inertiae cognitum esse debet, quem in finem imprimis respectu omnium axium, qui per centrum inertiae duci possunt, momenta inertiae definiri necesse est, inter quos axes maxime eminent ii, quos principales vocaui, quippe circa quos corpora libere gyrari possunt, ita vt non opus sit eos a quapiam vi externa sustineri. Iidem vero axes principales hac insigni proprietate sunt praediti, vt eorum respectu momenta inertiae sint vel maxima vel minima, quemadmodum in Theoria mea

mea Motus corporum solidorum fusius ostendi. Haec omnia etiam ad figuras planas transferri possunt, si eas quasi ex lamina tenuissima, quae vbique ex materia homogenea constat, exsecta concipiamus. Accommodaui equidem iam in allegato tractatu haec omnia quoque ad triangula. Quoniam vero cunctas istas proprietates ex formulis generalissimis, quas pro omnibus corporibus dederam, deriuavi, atque hoc argumentum tantum quasi in transitu attigi, haud abs re fore arbitror, si istas triangulorum proprietates mechanicas ex primo fonte aliquanto vberius determinauero.

## Lemma.

§. 1. *Proposito triangulo quocunque* A B C, *eius centrum inertiae* I *reperietur, si in latere* A B *abscindatur portio* B b $= \frac{1}{3}$ A B; *tum vero ex* b *lateri* B C *ducatur parallela* b c: *huius enim punctum medium* I *erit centrum grauitatis seu inertiae trianguli.* Tab. III. Fig. 1.

## Scholion.

§. 2. Conuenit haec constructio cum ea, quae in elementis tradi solet, vbi ex angulo A duci iubetur recta A D, latus oppositum B C bisecans in D, in qua sumto interuallo I D $= \frac{1}{3}$ A D, erit I centrum grauitatis. Cum enim *b c* ducta sit lateri B C parallela, erit etiam interuallum B *b* $= \frac{1}{3}$ A B, et quia I *b* $=$ I *c*, punctum I vtique erit centrum inertiae. Praesens autem constructio ad nostrum institutum magis est accommodata.

De

## Denominationes generales.

§. 3. Vt fractiones, ex parte illa tertia abscindenda oriundae, euitentur, latera trianguli ita denotemus:

$$AB = 3c,\ AC = 3b \text{ et } BC = 3a;$$

ipsos vero angulos

$$BAC = \alpha,\ ABC = \beta \text{ et } ACB = \gamma;$$

vnde pro lubitu loco cuiusque lateris angulus ei oppositus in calculum introduci poterit. Ita si loco lateris $AC = 3b$ angulo $\beta$ vti velimus, habebimus

$$9bb = 9aa + 9cc - 18ac \operatorname{cos.}\beta, \text{ siue}$$

$$bb = aa + cc - 2ac \operatorname{cos.}\beta;$$

quibus positis erit pro centro inertiae I, interuallum $Bb = c$, et quia est $bc = \frac{2}{3}BC = 2a$, erit $bI = a$. Si praeterea etiam rectam AD desideremus, ex elementis notum est esse $4AD^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$, vnde fit

$$4AD^2 = 9(2bb + 2cc - aa), \text{ ideoque}$$

$$AD = \tfrac{3}{2}\sqrt{(2bb + 2cc - aa)}, \text{ vnde fit}$$

$$AI = \sqrt{(2bb + 2cc - aa)}.$$

Simili ergo modo foret

$$BI = \sqrt{(2aa + 2cc - bb)} \text{ et } CI = \sqrt{(2aa + 2bb - cc)}.$$

## Problema.

§. 4. *Inuenire momentum inertiae trianguli* ABC, *respectu axis plano trianguli in ipso centro inertiae* I *perpendiculariter insistentis.*

Solutio.

## Solutio.

Sumto interuallo indefinito $AX = x$, ducatur recta $XZ$ basi $BC$ parallela, eritque $XZ = \frac{ax}{c}$. Iam in hac linea capiatur interuallum indefinitum $XY = y$, et pro momento inertiae, quod quaeritur inueniendo, elementum lineare $Yy = dy$ in quadratum distantiae ab axe, quae est recta $IY$ duci debet; tum enim summa omnium talium productorum $dy.\,IY^2$, per totam trianguli aream extensa, dabit momentum inertiae quaesitum. Hunc in finem ducatur recta $IX$, et quia in triangulo $bIX$ dantur latera $Ib = a$ et $bX = 2c - x$, cum angulo intercepto $IbX = \beta$, erit Fig. 2.

$$IX^2 = aa + (2c - x)^2 - 2a(2c - x)\,\text{cos}.\,\beta.$$

Ponatur autem breuitatis gratia haec recta $IX = p$, vt sit $pp = aa + (2c - x)^2 - 2a(2c - x)\,\text{cos}.\,\beta$; tum vero sit angulus $IXY = bIX = \theta$, eritque $\text{sin}.\,\theta = \frac{(2c - x)\,\text{sin}.\,\beta}{p}$. Nunc igitur ex triangulo $IXY$ erit

$$IY^2 = pp + yy - 2py\,\text{cos}.\,\theta,$$

quod quadratum ductum in $dy$ et integratum praebet integrale $ppy + \frac{1}{3}y^3 - pyy\,\text{cos}.\,\theta$; quod sponte euanescit sumto $y = 0$. Ponatur nunc $y = XZ = \frac{ax}{c}$, et momentum ex tota linea $XZ$ ortum erit

$$\frac{appx}{c} + \frac{a^3x^3}{3c^3} - \frac{aapxx}{cc}\,\text{cos}.\,\theta.$$

In hac igitur formula tantum opus est loco literarum $p$ et $\theta$ suos valores substitui. Est vero vti vidimus

$$pp = aa + (2c - x)^2 - 2a(2c - x)\,\text{cos}.\,\beta.$$

At pro angulo $\theta$ ex puncto $X$ in $Ib$ demittatur perpendiculum

XP, eritque $p \cos. \theta = IP$. Cum igitur ſit

$$bP = bX \cos. \beta = (2c - x) \cos. \beta,$$

ob $Ib = a$ erit

$$IP = a - (2c - x) \cos. \beta = p \cos. \theta;$$

quibus valoribus ſubſtitutis prodit momentum quaeſitum:

$$\frac{a x^2}{c} + \frac{a^3 x^3}{3 c^3} - \frac{a^3 x x}{c c} - 4 a x x + 4 a c x$$
$$+ \frac{a^3 x}{c} - \frac{a a x}{c c} (2c - x)^2 \cos. \beta.$$

Augeatur nunc interuallum $AX = x$ ſuo differentiali $dx$, et linea XZ promouebitur per interuallum infinite paruum $dx \sin. \beta$, in quod igitur momentum modo inuentum ducatur et integretur, reperieturque iſta expreſſio:

$$\frac{a x^4 \sin. \beta}{4c} + \frac{a^3 x^4 \sin. \beta}{12 c^3} - \frac{a^3 x^3 \sin. \beta}{3 c c} - \tfrac{4}{3} a x^2 \sin. \beta + 2 a c x x \sin. \beta$$
$$+ \frac{a^3 x x}{2c} - \sin. \beta \cos. \beta \left(2 a a x x - \frac{4 a a x^3}{3c} + \frac{a a x^4}{4 c c}\right),$$

quamobrem hoc integrale extendatur per totum triangulum, ſtatuendo $x = 3c$, ac prodibit totum momentum inertiae quaeſitum ita expreſſum:

$$\tfrac{9}{4} a c (a a + c c) \sin. \beta - \tfrac{9}{4} a a c c \sin. \beta \cos. \beta,$$

quod reducitur ad hanc formam:

$$\tfrac{9}{4} a c \sin. \beta (a a + c c - a c \cos. \beta).$$

Inuenta hac expreſſione introducamus etiam maſſam trianguli, quippe quae in omnia momenta inertiae ingredi debet, et cum area trianguli ſit

$$= \tfrac{1}{2} AB.BC \sin. \beta = \tfrac{9}{2} a c \sin. \beta,$$

ſi maſſam deſignemus litera M, vt ſit $M = \frac{9}{2} a c \sin. \beta$, prodibit momentum inertiae reſpectu axis ad planum trianguli in puncto I normalis

$$= \tfrac{1}{2} M (a a + c c - a c \cos. \beta).$$

Corol-

## Corollarium.

§. 5. Cum sit $b\,b = a\,a + c\,c - 2\,a\,c\,\text{cof.}\,\beta$, erit $a\,c\,\text{cof.}\,\beta = \frac{a\,a + c\,c - b\,b}{2}$; quo valore fubftituto noftrum momentum inertiae prodibit $\frac{1}{4}M(a\,a + b\,b + c\,c)$, quae formula, quoniam tria latera in eam aequaliter ingrediuntur, characterem veritatis fecum gerit; vnde fi latera ipfa introducantur, erit hoc momentum inertiae $\frac{1}{36}M(AB^2 + AC^2 + BC^2)$.

## Scholion.

§. 6. Quia ifte axis perpendiculariter infiftit in ipfo centro inertiae I, euidens eft, eum fimul effe axem principalem trianguli, quandoquidem momentum inertiae eius refpectu inuentum fine dubio omnium eft maximum; fimul enim atque axis inclinatur, propius ad elementa fingula dmouetur, vnde momentum inertiae minus exfurgere debet. Praeterea vero hoc etiam inde patet, quod fi triangulum circa hunc axem gyretur, omnes vires centrifugae fe mutuo manifefto deftruant, in quo confiftit character praecipuus axium principalium; ex quo fequitur: reliquos axes principales in ipfum planum trianguli incidere debere, quandoquidem demonftraui, ternos axes principales perpetuo inter fe effe normales. Ad eos igitur inueftigandos, primum in plano trianguli axem quemcunque per centrum inertiae ductum confideremus, eiusque refpectu momentum inertiae quaeramus, quo deinceps ex hac generali determinatione axes principales elici queant.

 Proble-

## Problema 2.

§. 7. *Inuenire momentum inertiae trianguli* A B C, *respectu axis cuiuscunque in ipso plano trianguli siti et per eius centrum inertiae* I *transeuntis.*

### Solutio.

Tab. III Fig. 3. Sit recta I P Q axis propositus, qui faciat cum recta $b\,c$ angulum $b\,\mathrm{I\,P} = \Phi$, erit angulus $b\,\mathrm{P\,I} = 180^\circ - \beta - \Phi$, pro quo breuitatis gratia scribamus $\omega$. Cum igitur sit $\mathrm{I}\,b = a$, erit $b\,\mathrm{P} = \frac{a\,\text{fin.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\omega}$ et $\mathrm{I\,P} = \frac{a\,\text{fin.}\,\beta}{\text{fin.}\,\omega}$, hincque erit interuallum $\mathrm{A\,P} = 2\,c - \frac{a\,\text{fin.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\omega}$. Iam ducatur indefinite basi B C parallela X Z, cui productae axis occurrat in puncto Q; tum posita $\mathrm{A\,X} = x$ erit $\mathrm{X\,Z} = \frac{a\,x}{c}$. Ergo quia triangulum X P Q simile est triangulo $b\,\mathrm{P\,I}$, erit angulus $\mathrm{P\,X\,Q} = \beta$, angulus $\mathrm{X\,P\,Q} = 180^\circ - \beta - \Phi = \omega$, et angulus $\mathrm{X\,Q\,P} = \Phi$; vnde quia latus $\mathrm{X\,P} = 2\,c - x - \frac{a\,\text{fin.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\omega}$, erit latus

$$\mathrm{P\,Q} = \frac{(2\,c - x)\,\text{fin.}\,\beta}{\text{fin.}\,\Phi} - \frac{a\,\text{fin.}\,\beta}{\text{fin.}\,\omega} \text{ et } \mathrm{X\,Q} = \frac{(2\,c - x)\,\text{fin.}\,\omega}{\text{fin.}\,\Phi} - a,$$

pro quo breuitatis gratia scribamus $q$, vt sit

$$q = \frac{(2\,c - x)\,\text{fin.}\,\omega}{\text{fin.}\,\Phi} - a.$$

Nunc in recta X Z capiatur portio indefinita $\mathrm{X\,Y} = y$, cuius elementum sit $\mathrm{Y}\,y = d\,y$, vnde ad axem demittatur perpendiculum $\mathrm{Y\,R} = (q + y)\,\text{fin.}\,\Phi$, quae cum sit distantia puncti Y ab axe, erit elementi linearis momentum inertiae $= d\,y\,(q + y)^2\,\text{fin.}\,\Phi^2$, cuius formulae, vbi sola $y$ est variabilis, integrale erit $(q\,q\,y + q\,y\,y + \frac{1}{3}y^3)\,\text{fin.}\,\Phi^2$, quod quia sponte euanescit posito $y = 0$, statuamus $y = \frac{a\,x}{c}$,

eritque

eritque momentum ex tota linea XZ natum

$$\left(\frac{aqqx}{c} + \frac{aaqxx}{cc} + \frac{a^3x^3}{3c^3}\right)\sin.\Phi^2;$$

quae expressio, si loco $q$ valor assumtus substituatur, abit in hanc formam:

$$\frac{ax(2c-x)^2\sin.\omega^2}{c} - \frac{aax(2c-x)^2\sin.\Phi\sin.\omega}{cc} + \frac{a^3x(3cc-3cx+xx)\sin.\Phi^2}{3c^3}.$$

Augeatur nunc abscissa $AX = x$ suo differentiali $dx$, vnde recta XZ accipiet latitudinem $dx\sin.\beta$, et expressio modo inuenta per $dx\sin.\beta$ multiplicata integretur, statimque loco $x$ scribatur $3c$, sicque momentum inertiae pro toto triangulo reperietur

$$\tfrac{9}{4}ac^3\sin.\beta\sin.\omega^2 - \tfrac{9}{4}aacc\sin.\beta\sin.\Phi\sin.\omega + \tfrac{9}{4}a^3c\sin.\beta\sin.\Phi^2.$$

Cum nunc area trianguli sit $\frac{9}{2}ac\sin.\beta$, quae quasi massam trianguli refert, eius loco literam M scribamus, vt sit $\frac{9}{4}ac\sin.\beta = \frac{1}{2}M$, quo facto momentum inertiae quaesitum ita satis succincte exprimetur:

$$\tfrac{1}{2}M(cc\sin.\omega^2 - ac\sin.\Phi\sin.\omega + aa\sin.\Phi^2).$$

Vbi meminisse oportet esse $\omega = 180° - \beta - \Phi$, denotante $\Phi$ angulum, quo axis IPQ ad rectam $bc$, ideoque etiam ad latus BC inclinatur, dum $\omega$ denotat angulum, sub quo idem axis ad latus AB inclinatur.

## Corollarium 1.

§. 8. Quod si ergo per angulum B axi IPQ ducatur parallela FBG, in eamque ex reliquis angulis A et C ducantur normales AF et CG erit

$$AF = 3c\sin.\omega \text{ et } CG = 3a\sin.\Phi,$$

vnde momentum inertiae ita erit expressum:

$$\tfrac{1}{18}M(AF^2 - AF.CG + CG^2).$$

## Corollarium 2.

§. 9. Si axis I P Q ipſi lateri B C parallelus ſtatuatur, erit angulus $\Phi = 0$, hincque $\omega = 180^\circ - \beta$. Hoc ergo caſu momentum inertiae reſpectu iſtius axis erit $\frac{1}{8} M c c \text{ſin.} \beta^2$. Ad hoc intelligendum, ſi ex A in latus B C perpendiculum demitteretur, id foret $= 3 c \text{ſin.} \beta$, ideoque perpendiculum ex puncto I in B C demiſſum $= c \text{ſin.} \beta$. Demittatur ergo hoc perpendiculum I L, et reſpectu axis, lateri B C paralleli, momentum inertiae erit $\frac{1}{8} M . I L^2$; vnde ſimul momenta inertiae innoteſcunt pro axibus reliquis lateribus parallelis.

## Corollarium 3.

§. 10. Si axis ita accipiatur, vt per angulum A tranſeat, cadet punctum P in A; hincque erit

$$b P = \frac{a \text{ ſin. } \Phi}{\text{ſin. } \omega} = 2 c, \text{ ſiue } a \text{ ſin. } \Phi = 2 c \text{ ſin. } \omega;$$

quamobrem reſpectu axis I A momentum inertiae erit $\frac{1}{a} M c c \text{ſin.} \omega^2$, quod autem commodius ad latus B C, vtpote angulo A oppoſitum, reducitur, fietque hoc momentum inertiae $= \frac{1}{8} M a a \text{ſin.} \Phi$, vbi $\Phi$ denotat angulum, quem axis A I productus cum baſi B C conſtituit; vnde ſimul patet, quomodo momenta inertiae reſpectu axium I B et I C exprimentur.

## Corollarium 4.

Tab. III. Fig. 4. §. 11. Quod ſi ergo in figura ex centro inertiae I in ſingula latera demittantur perpendicula $I p$, $I q$, $I r$; tum pro axe per I ducto et lateri B C parallelo momentum inertae erit $\frac{1}{8} M . I p^2$; at pro axe lateri A B parallelo lo $= \frac{1}{2}$ M. I $r^2$, ac pro axe lateri A C parallelo erit hoc momentum inertiae $= \frac{1}{2}$ M. I $q^2$. Praeterea vero si ex $b$ in I A ducatur perpendiculum $b\,s$, momentum inertiae respectu axis I A erit $\frac{1}{3}$ M $a\,a$ sin. $\Phi^2$. Quia autem I $b = a$ et angulus A I $b = \Phi$, erit $b\,s = a$ sin. $\Phi$, ideoque pro axe I A momentum inertiae erit $\frac{1}{3}$ M. $b\,s^2$, id quod pari modo ad axes I B et I C extenditur.

## Corollarium 5.

§. 121. Consideremus etiam axes in latera perpendiculares, ac denotet I $p$ talem axem in latus B C normalem, eritque $\Phi = 90°$, hincque $\omega = 90° - \beta$, vnde momentum inertiae pro hoc axe I $p$ reperitur

$$\tfrac{1}{2} M (c\,c \cos\beta^2 - a\,c \cos\beta + a\,a),$$

vbi est vti vidimus I $p = c$ sin. $\beta$. Quare si hoc perpendiculum vocemus I $p = p$, vt sit $c$ sin. $\beta = p$, erit $c = \frac{p}{\sin\beta}$, hincque momentum inertiae erit

$$(p\,p \cot\beta^2 - a\,p \cot\beta + a\,a) \tfrac{1}{2} M;$$

quae expressio quo magis ad nostrum scopum accommodetur, ex I ducantur lateribus A B et A C parallelae I $\beta$ et I $\gamma$, erit B $\beta = a$ et ob eandem rationem C $\gamma = a$, ita vt sit $\beta\gamma = a$. Iam ex triangulo I $\beta p$ erit

$$\beta p = \mathrm{I}p \cot\beta = p \cot\beta,$$

vnde momentum inertiae respectu axis I $p$ erit

$$\tfrac{1}{2} M (\beta p^2 - a.\,\beta p + a\,a).$$

Cum igitur sit $a = \beta\gamma = \beta p + \gamma p$, erit hoc momentum

$$= \tfrac{1}{2} M (\beta p^2 + \beta p . \gamma p + \gamma p^2),$$

sicque

ſicque ſimili modo ab vtroque puncto $\beta$ et $\gamma$ pendet, prorſus vti rei natura poſtulat.

## Problema 3.

§. 12. *Inter omnes axes per centrum inertiae I in plano trianguli tranſeuntes eos determinare, quorum reſpectu momenta inertiae ſint vel maxima vel minima.*

## Solutio.

Tab. III. Fig. 3. In ſolutione praecedentis problematis in genere conſiderauimus axem quemcunque I P Q, qui cum recta $bc$, ideoque cum latere B C, faciebat angulum $b\mathrm{IP} = \Phi$, vnde formauimus angulum $\omega = 180^\circ - \beta - \Phi$, hincque determinauimus momentum inertiae

$$= \tfrac{1}{2} \mathrm{M} (cc \text{ ſin. } \omega^2 - ac \text{ ſin. } \Phi \text{ ſin. } \omega + aa \text{ ſin. } \Phi^2).$$

Nunc ergo quaeſtio huc redit: quantum angulum $\Phi$ accipi oporteat, vt momentum prodeat vel maximum vel minimum; vnde, cum ſoli anguli $\Phi$ et $\omega$ ſint variabiles, differentiale iſtius formulae nihilo aequetur, vnde iſta reſultat aequatio:

$$0 = 2cc\,d\omega \text{ ſin. } \omega \text{ coſ. } \omega - ac\,d\omega \text{ ſin. } \Phi \text{ coſ. } \omega$$
$$- ac\,d\Phi \text{ ſin. } \omega \text{ coſ. } \Phi + 2aa\,d\Phi \text{ ſin. } \Phi \text{ coſ. } \Phi,$$

quare cum ſit $d\omega = -d\Phi$, habebimus,

$$-2cc \text{ ſin. } \omega \text{ coſ. } \omega + ac \text{ ſin. } \Phi \text{ coſ. } \omega$$
$$- ac \text{ ſin. } \omega \text{ coſ. } \Phi + 2aa \text{ coſ. } \Phi \text{ ſin. } \Phi = 0.$$

ſiue ob

$$ac (\text{ſin. } \Phi \text{ coſ. } \omega - \text{ſin. } \omega \text{ coſ. } \Phi) = ac \text{ ſin. } (\Phi - \omega) \text{ et}$$
$$2 \text{ ſin. } \omega \text{ coſ. } \omega = \text{ſin. } 2\omega \text{ et } 2 \text{ ſin. } \Phi \text{ coſ. } \Phi = \text{ſin. } 2\Phi,$$

prodi-

prodibit haec aequatio:

$$0 = -cc \sin.2\omega + ac \sin.(\Phi - \omega) + aa \sin.2\Phi.$$

Hic autem erit

$$\Phi - \omega = 2\Phi + \beta - 180^\circ, \text{ vnde fit}$$

$$\sin.(\Phi - \omega) = -\sin.2\Phi \cos.\beta - \cos.2\Phi \sin.\beta, \text{ et}$$

$$\sin.2\omega = -\sin.2\Phi \cos.2\beta - \cos.2\Phi \sin.2\beta;$$

quibus valoribus substitutis nostra aequatio fiet

$$0 - cc \sin.2\Phi \cos.2\beta + cc \sin.2\beta \cos.2\Phi$$
$$-ac \sin.2\Phi \cos.\beta - ac \cos.2\Phi \sin.\beta + aa \sin.2\Phi,$$

vnde colligitur

$$\text{tang.}\,2\Phi = \frac{ac \sin.\beta - cc \sin.2\beta}{aa - ac \cos.\beta + cc \cos.2\beta},$$

quocirca pro angulo $\Phi$ duo reperientur valores, quorum alter pro momento inertiae maximo, alter vero pro momento minimo valebit; atque ambo axes hinc nati inter se erunt normales. Quod si enim super recta $bc$ construatur angulus $bIv = 2\Phi$, tum rectae IE et IF, angulos $bIv$ et $cIv$ bisecantes, erunt ambo axes principales quaesiti; tum vero si pro vtroque valore $\Phi$ capiatur angulus $\omega = 180^\circ - \beta - \Phi$, erit momentum inertiae respectu amborum horum axium Tab. III. Fig. 5.

$$= \tfrac{1}{2} M (cc \sin.\omega^2 - ac \sin.\Phi \sin.\omega + aa \sin.\Phi^2)$$

quorum alterum erit maximum alterum vero minimum.

## Corollarium 1.

§. 14. Statuamus breuitalis gratia

$$ac \sin.\beta - cc \sin.2\beta = A \quad \text{et} \quad aa - ac \cos.\beta + cc \cos.2\beta = B,$$

vt sit $\text{tang.}\, 2\,\Phi = \frac{A}{B}$, tum vero ponatur

$$\sqrt{(AA + BB)} = \Delta;$$

qui valor cum possit esse tam negatiuus quam positiuus, ad omnem ambiguitatem euitandam hic tantum eius valorem positiuum consideremus, quippe ex quo alterum momentum facillime deducetur, loco $+\Delta$ scribendo $-\Delta$. Hinc igitur statim habemus

$$\text{sin.}\, 2\,\Phi = \frac{A}{\Delta} \text{ et } \text{cos.}\, 2\,\Phi = \frac{B}{\Delta},$$

vnde cum sit

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{\text{sin.}\, 2\,\Phi}{1 + \text{cos.}\, 2\,\Phi} = \frac{1 - \text{cos.}\, 2\,\Phi}{\text{sin.}\, 2\,\Phi}, \text{ erit}$$

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{A}{\Delta + B} = \frac{\Delta - B}{A}.$$

## Corollarium 2.

§. 15. Nunc igitur quoque hos valores in expressionem pro momento inertiae inuentam, quae erat

$$= \tfrac{1}{2}\, M\,(cc\,\text{sin.}\,\omega^2 - ac\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{sin.}\,\omega + aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)$$

introducamus, et cum sit

$$\text{sin.}\,\Phi^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\text{cos.}\, 2\,\Phi, \text{ erit } \text{sin.}\,\Phi^2 = \tfrac{1}{2} - \frac{B}{2\Delta} = \frac{\Delta - B}{2\Delta};$$

deinde ob

$$\text{sin.}\,\omega^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\text{cos.}\, 2\,\omega = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\text{cos.}\,(2\,\beta + 2\,\Phi)$$
$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,(\text{cos.}\, 2\,\beta\,\text{cos.}\, 2\,\Phi - \text{sin.}\, 2\,\beta\,\text{sin.}\, 2\,\Phi)$$

erit

$$\text{sin.}\,\omega^2 = \frac{\Delta - B\,\text{cos.}\, 2\,\beta + A\,\text{sin.}\, 2\,\beta}{2\,\Delta};$$

Denique cum sit

$$\text{sin.}\,\Phi\,\text{sin.}\,\omega = \tfrac{1}{2}\,\text{cos.}\,(\omega - \Phi) - \tfrac{1}{2}\,\text{cos.}\,(\omega + \Phi)$$
$$= -\tfrac{1}{2}\,\text{cos.}\,(\beta + 2\,\Phi) + \tfrac{1}{2}\,\text{cos.}\,\beta$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\text{cos.}\,\beta - \tfrac{1}{2}\,\text{cos.}\,\beta\,\text{cos.}\, 2\,\Phi + \tfrac{1}{2}\,\text{sin.}\,\beta\,\text{sin.}\, 2\,\Phi$$

erit

erit

$$\sin.\,\Phi\,\sin.\,\omega = \frac{\Delta\cos.\beta - B\cos.\beta + A\sin.\beta}{2\Delta},$$

quibus valoribus ſubſtitutis prodibit momentum inertiae ita expreſſum:

$$\frac{M}{4\Delta}(\Delta(aa - ac\cos.\beta + cc) - A(ac\sin.\beta - cc\sin.2\beta) - B(aa - ac\cos.\beta + cc\cos.2\beta)),$$

vbi cum ſit

$$ac\sin.\beta - cc\sin.2\beta = A \text{ et } aa - ac\cos.\beta + cc\cos.2\beta = B$$

erit momentum inertiae

$$= \frac{M}{4\Delta}(\Delta(aa - ac\cos.\beta + cc) - AA - BB)$$
$$= \tfrac{1}{4}M(aa - ac\cos.\beta + cc) - \Delta).$$

Sicque ſumto $\Delta$ poſitiuo hoc momentum inertiae erit minimum, at ſumto $\Delta$ negatiuo habebitur momentum inertiae maximum

$$= \tfrac{1}{4}M(aa - ac\cos.\beta + cc + \Delta).$$

## Corollarium 3.

§. 16. Supra autem inuenimus, reſpectu axis ad planum trianguli in I normalis, momentum inertiae

$$= \tfrac{1}{2}M(aa - ac\cos.\beta + cc),$$

cui ergo ſumma duorum reliquorum momentorum, quae hic inuenimus, eſt aequalis; quam proprietatem pro omnibus figuris planis ſemper locum habere demonſtraui in *theoria motus corporum rigidorum.*

## Scholion.

§. 17. Quod ſi tam poſitionem axium principalium quam eorum momenta inertiae per calculum



expe-

expedire velimus, formulae hic inuentae ſatis idoneae videntur. Verum ſi conſtructionem geometricam deſideremus, iſtae formulae nos in maximas ambages praecipitarent, cuius incommodi ratio ſine dubio in hoc eſt ſita: quod praeter baſin trianguli $BC = 3a$, pro qua inclinationem axium principalium quaeſiuimus, alterum tantum latus $AB = 3c$, cum angulo $\beta$ in calculum introduximus, cum pari iure alterum latus $AC = 3b$, cum angulo $\gamma$ introduci potuiſſet, vnde plerumque ſolutiones parum idoneae reperiri ſolent; quamobrem, vt iſtam ambiguitatem e medio tollamus, loco lateris $AB$ rectam $AI$ cum angulo quam cum baſi $BC$ facit, in calculum introducamus, quandoquidem haec recta ſimili modo ad vtrumque latus $AB$ et $AC$ refertur, id quod in ſequente Problemate exſequemur.

## Scholion 2.

§. 18. Quemadmodum poſitio axium principalium, ſiue angulus $\Phi$ aeque refertur ad ambo latera $AB$ et $AC$, ita manifeſtum eſt ipſa momenta inertiae ad omnia tria latera trianguli aequaliter referri debere. Ad quod oſtendendum, cum ſit

$$ac \operatorname{cof.} \beta = \tfrac{1}{2}(aa + cc - bb),$$

iam ſupra obſeruauimus eſſe

$$aa - ac \operatorname{cof.} \beta + cc = \tfrac{1}{2}(aa + bb + cc),$$

ſicque prior pars momentorum inertiae iam aequaliter ex literis $a$, $b$, $c$, eſt compoſita. Neceſſe igitur eſt, vt etiam pars altera $\Delta$ aequaliter has literas $a$, $b$, $c$ inuoluat; Cum igitur ſit $\Delta\Delta = AA + BB$, loco $A$ et $B$ ſubſti-

tuamus

tuamus assumtos valores, ac prodibit

$$\Delta\Delta = a^4 - 2a^3c\,\text{cos.}\,\beta + aacc(3\,\text{cos.}\,\beta^2 - \text{sin.}\,\beta^2) - 2ac^3\text{cos.}\,\beta + c^4.$$

Auferatur vtrinque $(aa - ac\,\text{cos.}\,\beta + cc)^2$, eritque

$$\Delta\Delta - \tfrac{1}{4}(aa + bb + cc)^2 = -3aacc\,\text{sin.}\,\beta^2;$$

quare cum sit

$$ac\,\text{cos.}\,\beta = \tfrac{1}{2}(aa + cc - bb), \text{ erit}$$

$$aacc\,\text{cos.}\,\beta^2 = \tfrac{1}{4}(a^4 + b^4 + c^4 + 2aacc - 2aabb - 2ccbb$$

tum vero

$$aacc\,\text{sin.}\,\beta^2 = \tfrac{1}{4}(a^4 + b^4 + c^4 - 2aacc - 2aabb - 2bbcc),$$

vbi omnes tres literae $a$, $b$, $c$, aequaliter occurrunt, quo valore substituto reperietur

$$\Delta\Delta = a^4 + b^4 + c^4 - aabb - aacc - bbcc,$$

ita vt sit

$$\Delta = \sqrt{(a^4 + b^4 + c^4 - aabb - aacc - bbcc)},$$

consequenter ambo momenta principalia ita exprimentur, vt sit.

Minimum:

$$\tfrac{1}{8}M(aa + bb + cc - 2\sqrt{(a^4 + b^4 + c^4 - aabb - aacc - bbcc)}),$$

Maximum:

$$\tfrac{1}{8}M(aa + bb + cc + 2\sqrt{(a^4 + b^4 + c^4 - aabb - aacc - bbcc)}).$$

## Problema.

§. 19. *Formulam pro angulo $\Phi$ in praecedente problemate inuentam ita transformare, vt ad constructionem geometricam apta reddatur.*

 Solutio.

# Solutio.

Quoniam $\Phi$ denotat angulum $b$ I P, quo axis principalis I P ad rectam $b$ I, lateri B C parallelam, inclinatur, is aeque respicit latus A C $= 3\,b$ cum angulo A C B $= \gamma$, ac latus A B $= 3\,c$ cum angulo A B C $= \beta$, existente latere B C $= 3\,a$: formulam inuentam

$$\text{tang.}\, 2\,\Phi = \frac{a\,c\,\text{sin.}\,\beta - c\,c\,\text{sin.}\,2\,\beta}{a\,a - a\,c\,\text{cos.}\,\beta + c\,c\,\text{cos.}\,\beta},$$

ita transformemus, vt in eam ambo latera A C et B C cum angulis $\beta$ et $\gamma$ aequaliter ingrediantur. Hunc in finem ex centro inertiae I ductam concipiamus rectam I $a$, lateri A C parallelam, vt obtineamus triangulum I $b\,a$, toti triangulo A B C simile, cuius latera sint triplo minora, scilicet I $b = a$, I $a = b$ et $a\,b = c$, et anguli $a\,b$ I $= \beta$ et $a$ I $b = \gamma$. Tum vero si ex $a$ in basin I $b$ demittatur perpendiculum $a\,d$, erit $c$ sin. $\beta = b$ sin. $\gamma = a\,d$, et quia $b\,d = c$ cos. $\beta$ et I $d = b$ cos. $\gamma$, erit $a = c$ cos. $\beta$ $+ b$ cos. $\gamma$. Hic iam valor loco $a$ in numeratore nostrae formulae:

Tab. III. Fig. 6.

$$a\,c\,\text{sin.}\,\beta - c\,c\,\text{sin.}\,2\,\beta = a\,c\,\text{sin.}\,\beta - 2\,c\,c\,\text{sin.}\,\beta\,\text{cos.}\,\beta,$$

substitutus praebet

$$- c\,c\,\text{sin.}\,\beta\,\text{cos.}\,\beta + b\,c\,\text{sin.}\,\beta\,\text{cos.}\,\gamma,$$

in cuius posteriore membro loco $c$ sin. $\beta$ scribatur $b$ sin. $\gamma$, sicque numerator noster induet hanc formam: $b\,c\,(\text{sin.}\,\beta - \gamma)$. Simili modo pro denominatore retenta parte prima $a\,a$, ex parte altera

$$- a\,c\,\text{cos.}\,\beta + c\,c\,\text{cos.}\,2\,\beta = - a\,c\,\text{cos.}\,\beta + c\,c\,\text{cos.}\,\beta^2 - c\,c\,\text{sin.}\,\beta^2,$$

si loco $a$ valor ante datus scribatur, reperietur:

$$- b\,c\,\text{cos.}\,\beta\,\text{cos.}\,\gamma - c\,c\,\text{sin.}\,\beta^2,$$

cuius

cuius postremus terminus, ob $c$ sin. $\beta = b$ cos. $\gamma$, fit $-bc$ sin. $\beta$ sin. $\gamma$, ita vt haec pars fiat $-bc$ cos. $(\beta-\gamma)$, hincque totus denominator $= aa - bc$ cos. $(\beta-\gamma)$, vnde formula nostra nunc habebit hanc formam:

$$\text{tang. } 2\,\Phi = \frac{bc \text{ sin. } (\beta-\gamma)}{aa - bc \text{ cos. } (\beta-\gamma)};$$

quae, si breuitatis gratia sumatur $\frac{bc}{a} = e$, abibit in hanc:

$$\text{tang. } 2\,\Phi = \frac{e \text{ sin. } (\beta-\gamma)}{a - e \text{ cos. } (\beta-\gamma)}.$$

Pro qua construenda abscindatur angulus $abe = aId = \gamma$, et capiatur $be = \frac{bc}{a} = e$, iunctaque recta $Ie$ erit angulus $bIe = 2\,\Phi$. Cum enim sit angulus $abe = \gamma$, erit angulus $Ibe = \beta - \gamma$. Hinc si ex $e$ in $bI$ demittatur perpendiculum $ep$, ob $be = e$ erit hoc perpendiculum

$$ep = e \text{ sin. } (\beta-\gamma) \text{ et } bp = e \text{ cos. } (\beta-\gamma),$$

vnde fit

$$Ip = a - e \text{ cos. } (\beta-\gamma);$$

sicque prodibit tangens anguli $bIe$, hoc est

$$\frac{ep}{Ip} = \frac{e \text{ sin. } (\beta-\gamma)}{a - e \text{ cos. } (\beta-\gamma)} = \text{tang. } 2\,\Phi.$$

Vnde patet hunc angulum $bIe$ eum ipsum esse, quem quaerimus, qui ergo si bisecetur recta $IM$, erit $IM$ alter axis principalis, cuius respectu momentum inertiae est minimum, alter vero axis $IN$ ad istum $IM$ erit normalis, eiusque respectu momentum inertiae erit maximum.

## Corollarium 1.

§. 20. Quo haec constructio magis ad morem Geometrarum adornetur, triangulo $Iab$ circumscribatur circulus, in quo capiatur arcus $af = ab$, vt fiat angulus Tab. III. Fig. 7.

$abf$

$abf = \gamma$, ideoque $Ibf = \beta - \gamma$. Porro abſcindatur arcus $b\gamma = aI$, vt ducta recta $ag$ fiat angulus $bag = \beta$, eritque interſectio rectarum $bf$ et $ag$ ipſum punctum $e$ figurae praecedentis. Cum enim in triangulo $abe$ ſit angulus $abe = \gamma$ et angulus $bae = \beta$, erit triangulum $abe$ ſimile toti triangulo $bIa$; vnde prodit iſta proportio $Ib : Ia = ab : be$, hoc eſt in literis $a : b = c : \frac{bc}{a} = e$, ſicque eſt $be = e = \frac{bc}{a}$, et ducta recta $Ie$ prodit angulus $bIe = 2\Phi$.

## Corollarium 2.

§. 21. Si triangulum propoſitum fuerit Iſoſceles, et latus $Ia = ab$, erunt etiam anguli $\beta$ et $\gamma$ aequales; vnde ſtatim fit tang. $2\Phi = 0$, ideoque vel $2\Phi = 0$ vel $2\Phi = 180$; quamobrem hoc caſu prior axis $IM$ in ipſam lineam $Ib$ incidit, ſeu baſi $BC$ erit parallelus, alter vero illi erit normalis. Hinc quia $c = b$ erit

$$\sqrt{(a^4 + b^4 + c^4 - aabb - aacc - bbcc)} = aa - bb,$$

hincque vel $\Delta = aa - bb$ vel $\Delta = bb - aa$, prouti fuerit vel $a > b$ vel $b > a$. Priori igitur caſu, quo $a > b$, erit momentum inertiae prius $\frac{1}{8}M(4bb - aa)$, poſterius vero $\frac{2}{8}Maa$. Caſu vero quo $be > aa$ prius momentum inertiae fit $\frac{2}{8}Maa$, poſterius vero maius $\frac{1}{8}M(4bb - aa)$.

## Corollarium 3.

§. 22. Quod ſi triangulum fuerit plane aequilaterum, vt ſit $a = b = c$, quia tum fit tang. $2\Phi = \frac{0}{0}$, ipſe angulus $\Phi$ plane non determinatur, ſed omnes plane rectae per centrum inertiae I ducta vicemgerent axium principalium,

palium, quorum respectu omnia momenta inertiae erunt $=\frac{1}{2}Maa$; quemadmodum etiam in omnibus corporibus, in quibus duo momenta inertiae principalia inter se fiunt aequalia, vsu venire obseruaui, quippe quo casu infiniti axes principales locum habent.

## Alia solutio eiusdem problematis.

§. 23. Consideremus hic ipsum triangulum propositum $ABC$, cuius latera posita sunt $AB=3c$, $AC=3b$, $BC=3a$, anguli vero $BAC=\alpha$, $ABC=\beta$, $BCA=\gamma$; tum vero ducta basi $BC$ per centrum inertiae $I$ parallela $bc$, pro vno axe principali $IM$ posuimus angulum $bIM=\Phi$, et inuenimus Tab. III. Fig. 8.

$$\text{tang.}\, 2\Phi = \frac{ac\,\text{sin.}\,\beta - cc\,\text{sin.}\,2\beta}{aa - ac\,\text{cos.}\,\beta + cc\,\text{cos.}\,2\beta}.$$

Nunc vero ducamus per $I$ rectam $AIF$, quae basin $BC$ bisecabit in $F$, vt sit $BF=CF=\frac{3}{2}a$, et vocemus hanc rectam $AF=3f$, at angulum $AFC=\zeta$, eritque

$$3b:3f=\text{sin.}\,\zeta:\text{sin.}\,\beta,$$ hincque

$$b\,\text{sin.}\,\beta=f\,\text{sin.}\,\zeta;$$ tum vero erit

$$AF^2=AB^2+BF^2-2AB.BF\,\text{cos.}\,\beta,$$ hoc est

$$ff=cc+\tfrac{1}{4}aa-ac\,\text{cos.}\,\beta,$$

vnde fit

$$ac\,\text{cos.}\,\beta=cc+\tfrac{1}{4}aa-ff.$$

Deinde erit simili modo

$$cc=ff+\tfrac{1}{4}aa+af\,\text{cos.}\,\zeta;$$

quo valore substituto fit

$$ac\,\text{cos.}\,\beta=\tfrac{1}{2}aa+af\,\text{cos.}\,\zeta,$$

quae aequatio per $c\,\text{sin.}\,\beta=f\,\text{sin.}\,\zeta$ diuisa praebet

 cot.

$$\cot.\beta = \frac{a + 2f\cos.\zeta}{2f\sin.\zeta}.$$

Imprimis autem notentur isti valores:

$$c\sin.\beta = f\sin.\zeta \text{ et } c\cos.\beta = \tfrac{1}{2}a + f\cos.\zeta,$$

quorum ratio ex figura facillime patet; hincque erit

$$2cc\sin.\beta\cos.\beta = cc\sin.2\beta = af\sin.\zeta$$
$$+ 2ff\sin.\zeta\cos.\zeta = af\sin.\zeta + ff\sin.2\zeta,$$

deinde

$$cc\cos.\beta^2 - cc\sin.\beta^2 = cc\cos.2\beta$$
$$= \tfrac{1}{4}aa + af\cos.\zeta + ff\cos.2\zeta.$$

Substituantur igitur isti valores in nostra formula pro tang. $2\Phi$ inuenta, ac prodibit numerator:

$$ac\sin.\beta - cc\sin.2\beta = -ff\sin.2\zeta$$

et denominator:

$$aa - ac\cos.\beta + cc\cos.2\beta = \tfrac{3}{4}aa + ff\cos.2\zeta,$$

sicque erit

$$\text{tang. } 2\Phi \frac{-ff\sin.2\zeta}{\tfrac{3}{4}aa + ff\cos.2\zeta}.$$

Nunc etiam positionem axis IM ad rectam AF referamus, ponendo angulum AIM $= \psi$, vt fit $\psi = 180° - \Phi - \zeta$, ideoque $2\psi = 360° - 2\zeta - 2\Phi$, vnde fit

$$\text{tang. } 2\psi = -\text{tang. }(2\zeta + 2\Phi) = \frac{-\text{tang. } 2\zeta - \text{tang. } 2\Phi}{1 - \text{tang. } 2\zeta.\text{ tang. } 2\Phi}.$$

Quod si iam hic loco tang. $2\Phi$ valor modo inuentus substituatur, reperietur

$$\text{tang. } 2\psi = \frac{-\tfrac{3}{4}aa\text{ tang. } 2\zeta}{\tfrac{3}{4}aa + ff\cos.2\zeta + ff\sin.2\zeta\text{ tang. } 2\zeta};$$

est vero

$$ff(\cos.2\zeta + \sin.2\zeta\text{ tang. } 2\zeta) = \frac{ff}{\cos.2\zeta},$$

vnde

vnde supra et infra per cos. $2\zeta$ multiplicando prodibit

$$\text{tang. } 2\psi = \frac{-\frac{3}{4}aa\,\text{sin. } 2\zeta}{\frac{3}{4}aa\,\text{cos. } 2\zeta + ff},$$

quam ergo construi oportet, atque hinc deriuatur sequens

## Constructio.

§. 24. *Capiatur angulus* A F E $= 180° - 2\zeta$, *ipsa autem recta* F E $= \frac{3aa}{4f}$; *tum iungatur recta* I E, *et ambo anguli* A I E *et* F I E *bisecentur rectis* I M *et* I N, *quae erunt ambo axes principales nostri trianguli.* Tab. III. Fig. 9.

## Demonstratio.

Vocemus angulum A F E $= 2\eta$, vt sit $2\zeta = 180° - 2\eta$, quo valore adhibito fit

$$\text{tang. } 2\psi = \frac{-\frac{3}{4}aa\,\text{sin. } 2\eta}{-\frac{3}{4}aa\,\text{cos. } 2\eta + ff} = \frac{\frac{3}{4}aa\,\text{sin. } 2\eta}{\frac{3}{4}aa\,\text{cos. } 2\eta - ff},$$

tum vero ponatur recta F E $= \frac{3aa}{4f} = e$, vt fiat

$$\text{tang. } 2\psi = \frac{e\,\text{sin. } 2\eta}{e\,\text{cos. } 2\eta - f};$$

quare si ex E in A F ducatur normalis E P, erit

$$EP = e\,\text{sin. } 2\eta \text{ et } FP = e\,\text{cos. } 2\eta;$$

Ergo cum sit F I $= f$, erit I P $= e\,\text{cos. } 2\eta - f$, sicque manifesto erit

$$\text{tang. } AIE = \frac{e\,\text{sin. } 2\eta}{e\,\text{cos. } 2\eta - f} = \text{tang. } 2\psi;$$

consequenter quia angulus A I E $= 2\psi$, eo bisecto erit A I M $= \psi$, sicque haec recta I M erit alter axis principalis; alter vero I N, qui ad hunc est normalis, reperitur bisecando angulum F I E. Q. E. D.



Corol.

## Corollarium 1.

Tab. III. Fig. 10.

§. 25. Quo hanc constructionem magis ad Praxin accommodemus, iterum triangulo A B C circumscribatur circulus, vt in figura repraesentatur, vbi recta A F producatur vsque ad circulum in D; et cum sit $AF . FD = BF . FC = BF^2$, erit $3f . FD = \frac{9}{4} a \alpha$, vnde $FD = \frac{3 a \alpha}{4 f}$, sicque haec linea F D aequatur nostrae lineae F E in figura praecedente. Cum igitur hic sit angulus $BFD = \zeta$, ex D in B C agatur normalis, quae vlterius in E producatur, vt fiat $DG = GE$, eritque iungendo puncta F et E, $FE = FD$ et angulus $BFE = BFD = \zeta$, ideoque $BFE = 2\zeta$, sicque erit angulus $AFE = 180^\circ - 2\zeta$, quemadmodum in constructione assumsimus, ita vt sit $FE = e$ et angulus $AFE = 2\eta$, vnde ducta recta I E manifesto fit angulus $AIE = 2\psi$. Caeterum non opus est ducere rectam D E, quoniam punctum E facilius determinabitur, si ex punctis B et C circini interuallis B D et C D fiat intersectio, quae cadet in ipsum punctum E, quamobrem haec constructio ob summam simplicitatem longe praeferenda videtur.

## Corollarium 2.

§. 26. Quemadmodum ambo axes principales in hac constructione ad rectam I A sunt definiti, ita necesse est, vt si similis constructio ad rectas I B et I C accommodetur, eadem axium principalium positio reperiatur, quae conuenientia ex solis principiis geometricis non nisi per maximas ambages ostendi posse videtur. Quamobrem sequens Theorema eo maiore attentione dignum esse arbitror.

Theo-

# Theorema geometricum.

§. 27. Si triangulo A B C circumscribatur circulus. in eoque ex angulis A B C ducantur chordae A $a$, B $b$, C $c$, latera opposita B C, A C et A B, bisecantes in punctis D, E et F, quae se mutuo secent in puncto I; tum vero notentur puncta $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ita vt sint interualla Tab. III. Fig. 11.

$$\text{I.}\ \begin{matrix} B\alpha = Ba \\ C\alpha = Ca \end{matrix} \quad \text{II.}\ \begin{matrix} A\alpha = Ab \\ C\beta = Cb \end{matrix} \quad \text{III.}\ \begin{matrix} A\gamma = Ac \\ B\gamma = Bc \end{matrix}$$

iunganturque rectae I $\alpha$ I $\beta$ et I $\gamma$; his factis binae rectae M I M et $m$ I $m$, quae angulos A I $\alpha$ et $a$ I $\alpha$ bisecant, quoque angulos B I $\beta$ et $b$ I $\beta$, itemque C I $\gamma$ et $c$ I $\gamma$ bisecabunt.

## Scholion.

§. 28. Hactenus quidem ambos axes principales ex principio indirecto, quo eorum respectu momenta inertiae sunt vel maxima vel minima, determinauimus, quandoquidem demonstraui, his casibus etiam in omnibus corporibus vires centrifugas, si corpora circa hos axes motu gyratorio ferantur, se mutuo destruere, ita vt non opus sit hos axes ab vlla vi externa sustineri, in quo vtique consistit principium directum, ex quo axes principales definiri conuenit, quamobrem non incongruum videtur, ex eodem principio directo axes trianguli principales determinare. Ac primo quidem quod ad axem ad planum trianguli normalem attinet, per se manifestum est, si triangulum circa hunc axem gyraretur, tum omnes vires centrifugas, quoniam eidem puncto I, scilicet centro inertiae, erunt applicatae, se mutuo in aequilibrio esse servaturas. Pro binis igitur reliquis axibus in ipso plano trianguli sitis superest, vt eorum positionem ex eodem principio directo determinemus.

## Problema.

Tab. III. Fig. 3. §. 29. *Proposito quocunque triangulo materiali* ABC, *in eius plano binos axes principales ex principio directo, quo omnes vires centrifugae se mutuo destruere debent, inuestigare.*

## Solutio.

Maneant omnes denominationes, vti supra in Problemate secundo sunt constitutae, scilicet: $AB = 3c$, $AC = 3b$, $BC = 3a$, et angulus $ABC = \beta$; tum vero ducta basi parallela $bc$, vt sit $Bb = \frac{1}{3} AB = b$, ita vt in eius puncto medio I sit centrum inertiae trianguli, erit $Ib = a$. Iam sit recta IPQ vnus axium principalium, ponaturque angulus $bIP = \Phi$, et angulus

$$IPb = 180° - \beta - \Phi = \omega,$$

vt sit

$$bP = \frac{a \sin. \Phi}{\sin. \omega} \text{ et } IP = \frac{a \sin. \beta}{\sin. \omega}.$$

Nunc pro nostra inuestigatione ex puncto indefinito X agatur basi BC parallela XZ, axi occurrens in Q; ac vocato interuallo $AX = x$ erit $XZ = \frac{ax}{c}$; hinc quia $bX = 2c - x$, erit

$$PX = 2c - x - \frac{a \sin. \Phi}{\sin. \omega} \text{ et } XQ = \frac{(2c - x) \sin. \omega}{\sin. \Phi} - a,$$

quod breuitatis gratia ponatur $= q$. Praetera vero erit

$$PQ = \frac{(2c - x) \sin. \beta}{\sin. \Phi} - \frac{a \sin. \beta}{\sin. \omega}, \text{ vnde fit recta}$$

IQ

$$I Q = \frac{(2c - x) \text{ fin. } \beta}{\text{fin. } \Phi},$$

quae breuitatis gratia vocetur $= p$. Nunc in recta X Z capiatur indefinite interuallum $XY = y$, et ex Y in axem IQ demittatur perpendiculum YR, vnde ob $QY = q + y$ et angulum ad $Q = \Phi$ erit

$$YR = (q + y) \text{ fin. } \Phi \text{ et } QR = (q + y) \text{ cof. } \Phi,$$

hincque interuallum $IR = p - (q + y) \text{ cof. } \Phi$. His positis quocunque motu triangulum circa axem IQ gyretur, vis centrifuga puncti Y ab axe erit vt interuallum RY, in qua directione etiam ponatur ab axe recedere. Ponamus igitur hanc vim centrifugam esse $\alpha (q + y) \text{ fin. } \Phi$, quae, quia axis per centrum inertiae transit, per totum triangulum se mutuo sponte destruet. Praeterea vero necesse est, vt etiam momenta harum virium respectu puncti I euanescant; momentum autem puncti I erit

$$\alpha (q + y) \text{ fin. } \Phi (p - (q + y) \text{ cof. } \Phi),$$

quod euolutum dat

$$\alpha p (q + y) \text{ fin. } \Phi - \alpha (q + y)^2 \text{ fin. } \Phi \text{ cof. } \Phi.$$

Concipiamus nunc elementum lineare $Yy = dy$, quod in istam formulam ductum et integratum praebet

$$\alpha p q y \text{ fin. } \Phi + \tfrac{1}{2} \alpha p y y \text{ fin. } \Phi - \alpha q q y \text{ fin. } \Phi \text{ cof. } \Phi$$
$$- \alpha q y y \text{ fin. } \Phi \text{ cof. } \Phi - \tfrac{1}{3} \alpha y^3 \text{ fin. } \Phi \text{ cof. } \Phi,$$

quod iam euanescit facto $y = 0$. Promoueatur igitur punctum Y in Z, ponendo $y = \frac{a x}{c}$, et momentum pro tota linea X Z erit

$$\frac{\alpha a p q x \text{ fin. } \Phi}{c} + \frac{\alpha a^2 p x x \text{ fin. } \Phi}{2 c c} - \frac{\alpha a q q x \text{ fin. } \Phi \text{ cof. } \Phi}{c}$$
$$- \frac{\alpha a a q x x \text{ fin. } \Phi \text{ cof. } \Phi}{c c} - \frac{\alpha a^3 x^3 \text{ fin. } \Phi \text{ cof. } \Phi}{3 c^3}.$$

Promoueatur iam punctum X per elementum $dx$, et lineae

XZ

XZ tribuatur latitudo $dx \sin.\beta$, per eamque momentum modo inuentum multiplicetur, et omiſſo coefficiente $\alpha$, quippe qui per diuiſionem tolletur in fine calculi, prodibit iſta formula:

$$\frac{\alpha pqx\,dx \sin.\Phi \sin.\beta}{c} + \frac{\alpha\alpha pxx\,dx \sin.\Phi \sin.\beta}{2cc} - \frac{\alpha qqx\,dx \sin.\Phi \cos.\Phi \sin.\beta}{c}$$
$$- \frac{\alpha\alpha qxx\,dx \sin.\Phi \cos.\Phi \sin.\beta}{cc} - \frac{\alpha^3 x^3\,dx \sin.\Phi \cos.\Phi \sin.\beta}{2c^3}.$$

Nunc cum ſit

$$p = \frac{(2c - x)\sin.\beta}{\sin.\Phi} \text{ et } q = \frac{(2c - x)\sin.\omega}{\sin.\Phi} - \alpha,$$

hincque

$$pq = \frac{(2c - x)^2 \sin.\beta \sin.\omega}{\sin.\Phi^2} - \frac{\alpha(2c - x)\sin.\beta}{\sin.\Phi},$$

capiatur integrale per partes, ac ſtatim pro toto triangulo ſtatuatur $x = 3c$, reperieturque

$$\int pqx\,dx = \frac{9c^4 \sin.\beta \sin.\omega}{4\sin.\Phi^2},$$
$$\int pxx\,dx = -\frac{9c^4 \sin.\beta}{4\sin.\Phi},$$
$$\int qqx\,dx = \frac{9c^4 \sin.\omega^2}{4\sin.\Phi^2} + \tfrac{9}{2} aacc,$$
$$\int qxx\,dx = -\frac{9c^4 \sin.\omega}{4\sin.\Phi} - 9ac^3,$$
$$\int x^3\,dx = \tfrac{1}{4}x^4 = \tfrac{81}{4}c^4.$$

Singulae hae formulae per ſuos coefficientes multiplicatae et in vnam ſummam collectae dabunt hanc aequationem:

$$\frac{9ac^3 \sin.\beta^2 \sin.\omega}{4\sin.\Phi} - \tfrac{9}{8} aacc \sin.\beta^2 - \frac{9ac^3 \cos.\Phi \sin.\beta \sin.\omega^2}{4\sin.\Phi},$$
$$-\tfrac{9}{2} a^3 c \sin.\Phi \cos.\Phi \sin.\beta + \tfrac{9}{4} aacc \cos.\Phi \sin.\beta \sin.\omega$$
$$+ 9a^3 c \sin.\Phi \cos.\Phi \sin.\beta - \tfrac{27}{4} a^3 c \sin.\Phi \cos.\Phi \sin.\beta = 0,$$

quae per $9ac \sin \beta$ diuiſa abit in hanc:

$$\frac{cc \sin.\beta \sin.\omega}{4\sin.\Phi} - \frac{ac \sin.\beta}{8} - \frac{cc \cos.\Phi \sin.\omega^2}{4\sin.\Phi} - \tfrac{1}{2} aa \sin.\Phi \cos.\Phi$$
$$+ \tfrac{1}{4} ac \cos.\Phi \sin.\omega + aa \sin.\Phi \cos.\Phi - \tfrac{3}{4} aa \sin.\Phi \cos.\Phi = 0$$

vbi cum occurrant triplicis generis termini, vel per $aa$ vel

vel per $ac$, vel per $cc$ affecti, singulos seorsim exprimamus et per $\sin.\phi$ multiplicemus, sicque prodibit haec aequatio:

$$-2aa\cos.\phi\sin.\phi^2+ac(2\sin.\phi\cos.\phi\sin.\omega-\sin.\beta\sin.\phi)$$
$$+cc(2\sin.\beta\sin.\omega-2\cos.\phi\sin.\omega^2)=0.$$

Cum igitur sit $\omega=180-\beta-\phi$, erit

$$\sin.\omega=\sin.(\beta+\phi)=\sin.\beta\cos.\phi+\cos.\beta\sin.\phi,$$

vnde habebitur pro membro $ac$ coefficiens

$$2\sin.\beta\sin.\phi\cos.\phi^2+2\cos.\beta\sin.\phi^2\cos.\phi-\sin.\beta\sin.\phi,$$

at membrum $cc$, quia factorem habet $2\sin.\omega$, ita repraesentetur:

$$2cc\sin.\omega(\sin\beta-\cos.\phi\sin.\omega),$$

cuius factor posterior, loco $\sin.\omega$ substituto valore, euadit,

$$\sin.\beta-\sin.\beta\cos.\phi^2-\cos.\beta\cos.\phi\sin.\phi=\sin.\beta\sin.\phi^2$$
$$-\cos.\beta\sin.\phi\cos.\phi=\sin.\phi(\sin.\beta\sin.\phi-\cos.\beta\cos.\phi)$$
$$=-\sin.\phi\cos.(\beta+\phi).$$

Cum igitur sit $\omega=180^\circ-\beta-\phi$, erit $\cos.\omega=-\cos.(\beta+\phi)$, ideoque postremum membrum erit

$$2cc\sin.\omega\sin.\phi\cos.\omega=cc\sin.\phi\sin.2\omega,$$

quod ob $2\omega=360^\circ-2\beta-2\phi$ dat

$$\sin.2\omega=-\sin.(2\beta+2\phi)=-\sin.2\beta\cos.2\phi-\cos.2\beta\sin.2\phi,$$

sicque vltimum membrum est

$$-cc\sin.\phi(\sin.2\beta\cos.2\phi+\cos.2\beta\sin.2\phi);$$

membrum vero medium est

$$ac\sin.\phi(2\cos.\phi\sin.\omega-\sin.\beta),$$

cuius factor posterior, loco $\sin.\omega$ scripto valore, fit

$$2\,\text{fin.}\,\beta\,\text{cof.}\,\Phi^2 + 2\,\text{cof.}\,\beta\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi - \text{fin.}\,\beta.$$

Cum igitur fit $2\,\text{cof.}\,\Phi^2 - 1 = \text{cof.}\,2\,\Phi$, hic factor posterior fit

$$\text{fin.}\,\beta\,\text{cof.}\,2\,\Phi + \text{cof.}\,\beta\,\text{fin.}\,2\,\Phi,$$

ficque membrum medium

$$= a\,c\,\text{fin.}\,\Phi\,(\text{fin.}\,\beta\,\text{cof.}\,2\,\Phi + \text{cof.}\,\beta\,\text{fin.}\,2\,\Phi).$$

Denique primum membrum reducitur ad hanc formam: $-a\,a\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{fin.}\,2\,\Phi$, vnde, quia omnia membra iam diuidi possunt per $\text{fin.}\,\Phi$, emerget ista aequatio:

$$-a\,a\,\text{fin.}\,2\,\Phi + a\,c\,(\text{fin.}\,\beta\,\text{cof.}\,2\,\Phi + \text{cof.}\,\beta\,\text{fin.}\,2\,\Phi)$$
$$- c\,c\,(\text{fin.}\,2\,\beta\,\text{cof.}\,2\,\Phi + \text{cof.}\,2\,\beta\,\text{fin.}\,2\,\Phi = 0,$$

vnde tandem colligimus

$$\frac{\text{fin.}\,2\,\Phi}{\text{cof.}\,2\,\Phi} = \text{tang.}\,2\,\Phi = \frac{a\,c\,\text{fin.}\,\beta - c\,c\,\text{fin.}\,2\,\beta}{a\,a - a\,c\,\text{cof.}\,\beta + c\,c\,\text{cof.}\,2\,\beta},$$

quae est eadem aequatio, quam fupra in Problemate tertio per methodum maximorum et minimorum pro positione axium principalium eruimus, vnde egregius confenfus inter vtramque methodum perfpicitur.

## Scholion.

§. 30. Omnia igitur, quae hactenus circa axes principales trianguli cuiuscunque inuenimus, primo redeunt ad pofitionem binorum axium principalium in plano trianguli fitorum, pro quibus definiendis imprimis notatu digna est constructio fatis fimplex et concinna §. 27. expofita, vbi rectae M I M et $m$ I $m$ exhibent binos axes principales, quorum refpectu momenta inertiae funt inuenta:

Maxi-

Maximum:

$$\tfrac{1}{8}M(aa+bb+cc+2\sqrt{(a^4+b^4+c^4-aabb-aacc-bbcc)}),$$

Minimum:

$$\tfrac{1}{8}M(aa+bb+cc-2\sqrt{(a^4+b^4+c^4-aabb-aacc-bbcc)}),$$

quorum summa $\tfrac{1}{4}M(aa+bb+cc)$, praebet momentum inertiae respecta tertii axis principalis, qui plano trianguli in centro inertiae I perpendiculariter insistit. Facile autem est quouis casu discernere, vtri priorum binorum axium conueniat vel momentum inertiae maximum vel minimum; quibus inuentis pro quouis alio axe per centrum inertiae I ducto momentum inertiae facillime determinatur, quemadmodum in *Theoria motus corporum rigidorum* fusius demonstraui. Si enim non solum pro triangulo, sed etiam pro corpore quocunque, terni axes principales fuerint IF, IG, IH, inter se normales, et per centrum inertiae I transeuntes; tum vero pro axe IF momentum inertiae fuerit $Mff$, pro axe $IG = Mgg$, et pro axe $IH = Mhh$, denotante M massam totius corporis, hinc pro quouis alio axe IO, ad principales ita constituto, vt sint anguli $FIO = \zeta$, $GIO = \eta$ et $HIO = \theta$, momentum inertiae erit Tab. III. Fig. 12.

$$= Mff \operatorname{cos.} \zeta^2 + Mgg \operatorname{cos.} \eta^2 + Mhh \operatorname{cos.} \theta^2.$$

Perspicuum autem est semper fore

$$\operatorname{cos.} \zeta^2 + \operatorname{cos.} \eta^2 + \operatorname{cos.} \theta^2 = 1.$$