1783

Determinatio omnium motuum, quos chorda tensa et uniformiter crassa recipere potest

Leonhard Euler

DETERMINATIO OMNIVM MOTVVM QVOS CHORDA TENSA ET VNIFORMITER CRASSA RECIPERE POTEST.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Tab. II. Fig. 1. Chordam ratione crassitiei et materiae, ex qua constat, ita comparatam esse assumo, vt, si eius capiatur longitudo $= e$, eius pondus futurum sit $= E$. Talis igitur chordae portionem $AB = a$ in terminis A et B fixam et a vi quacunque $= P$ tensam statuamus; quam tensionem ita concipere licet, ac si chordae, vltra terminum A productae et circa trochleam dependenti, appensum esset pondus $= P$. Quod si iam a proprio chordae pondere mentem abstrahamus, quod prae pondere tendente P plerumque pro nihilo est habendum, tum, si chorda AB verticalem teneat situm, ea in aequilibrio erit constituta, si secundum lineam rectam AB fuerit extensa. Interim tamen, etiamsi chordae pondus prae pondere tendente negligatur, tamen in motus determinatione eius massa in computum ingreditur, quae quia ipsius ponderi aequalis censetur, ea erit $= \frac{Ea}{e}$.

§. 2.

§. 2. Haec igitur chorda infinitis modis ad motum concitari potest, prout ea initio aliter atque aliter de statu aequilibrii fuerit deturbata, dum scilicet vel ad figuram quamcunque fuerit diducta, vel singulis eius elementis certus motus impressus. Omnes autem has variationes tanquam infinite paruas spectamus, vt inde aliae vibrationes, nisi quae fuerint quam minimae, oriri nequeant. Hinc si chorda inter vibrandum habuerit figuram A M B, omnes eius applicatae P M quasi infinite paruae spectantur; tum vero etiam omnes eius tangentes M T ab axe A B infinite parum declinare supponuntur: ita vt anguli P T M sint pariter infinite parui; quae infinita paruitas cum in figura repraesentari nequeat, nihil obstat, quominus applicatae P M cum angulis P T M, quantumuis magnae exprimantur, dummodo cogitemus, eas pro motu chordae in ratione 1 ad ω diminui debere, denotante ω fractionem quam minimam. Tum vero etiam non ipsi anguli P T M sed eorum tangentes in eadem ratione diminuentur; vnde intelligitur, etiam in figura finita hos angulos P T M nusquam ad angulum rectum assurgere debere. Tab. II. Fig. 2.

§. 3. His praemonitis, quia applicatae P M revera sunt infinite paruae, portio chordae A M ab abscissa A P non discrepare est censenda. Si igitur vocemus abscissam A P $= x$ et applicatam P M $= y$, arcus A M ipsi abscissae x aequalis reputari potest; vnde punctum chordae M inter vibrandum secundum aliam directionem moveri nequit, praeter directionem ipsius applicatae P M; ita vt in hac directione alternatim vel ad axem A B accedat vel recedat, idque in vtramque plagam. Praeterea

vero

vero etiam formula $\frac{dy}{dx}$ vbique quasi infinite paruum valorem seruare debet, quandoquidem ista formula tangentem anguli P T M exprimit.

§. 4. Quomodocunque autem chorda initio fuerit impulsa, quaestio principalis semper huc redit, vt ad quoduis tempus figuram A M B, quam chorda tum habebit, definiamus; deinde vero etiam celeritas, qua hoc momento singula chordae puncta mouentur, debet inuestigari. Sicque ad statum chordae ad quoduis tempus determinandum, duae res requiruntur: primo scilicet ipsa figura chordae; tum vero etiam eius motus, quo hoc momento agitabitur. Cum autem iste chordae status ad aliquod tempus fuerit cognitus, ex eo ad quoduis aliud tempus status chordae, hoc est tam eius figura quam motus quaeri debebit, vnde sequens problema soluendum proponitur.

Problema.

Si initio, siue dato quopiam temporis momento, cognitus fuerit status chordae, eius scilicet figura et motus; totum motum, qui deinceps sequetur, definire, ita vt ad quoduis aliud tempus tam figuram quam motum chordae in singulis punctis assignare valeamus.

Solutio.

Tab. II. Fig. 3. §. 5. Ante omnia igitur statum, in quo chorda dato tempore $t = 0$ versabatur, distincte repraesentemus. Referat igitur curua A Z B figuram, quam chorda hoc tempore habuit, pro qua abscissae $AX = x$ respondeat appli-

applicata $XZ = z$, ita vt pro qualibet abſciſſa x quantitas applicatae z innoteſcat; quae cum reuera quaſi ſit infinite parua, in ratione numeri praemagni ad vnitatem diminuta eſt concipienda. Quaecunque autem fuerit haec curua, eius applicatae in terminis A et B debent eſſe nullae, quia in his punctis chorda aſſumitur fixa. Hic quidem omnes applicatas in eandem plagam directas exhibemus; nihil autem impedit, quo minus haec curua vtrinque circa axem ſit diſpoſita.

§. 6. Eodem modo altera curua AVB ita referat motum chordae, quo eodem tempore $t = 0$ ciebatur, vt applicata $XV = v$, abſciſſae $AX = x$ reſpondens, exprimat celeritatem, qua iſtud chordae punctum ſurſum mouetur, ſiquidem applicata XV ſurſum vergat; ſin autem iſtae applicatae in alteram partem cadant, etiam motus directio contraria eſt intelligenda. Quia igitur ambo chordae termini A et B manent fixi, pro his locis, ſumendo vel $x = 0$, vel $x = a$, iſta applicata v itidem euaneſcere debet. Ceterum hic applicatae in figura expreſſae in eadem ratione imminutae concipi debent, qua ſuperiores applicatae z. Celeritates autem perpetuo per ſpatia deſignamus, quae ab iis vno minuto ſecundo percurrentur, quia ſcilicet tempora in minutis ſecundis exprimimus.

§. 7. Quod ſi iam elapſo tempore quocunque t chorda eiusmodi figuram induerit, vt abſciſſae $AX = x$ reſpondeat applicata $XY = y$, ea vtique erit certa quaedam functio binarum variabilium x et t, quam ergo ita comparatam eſſe oportet, vt poſito $t = 0$ fiat $y = z$, ac praete-

praeterea $\left(\frac{dy}{dt}\right) = v$, siquidem z et v hic spectantur vt functiones solius variabilis x per statum initialem datae; atque hic perinde est, siue hae functiones sint continuae siue discontinuae, vel quod perinde est: siue illae binae curuae A Z B et A V B, certa quadam aequatione comprehendi queant, siue pro lubitu vtcunque sit formata.

§. 8. Iam igitur principia Mechanicae pro motu chordarum hanc suppeditant aequationem generalem:

$$\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = c\,c\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right),$$

vbi c denotat certam quantitatem constantem per indolem chordae $\frac{e}{E}$ expressam, eiusque tensionem P determinandam, quae pro nostro casu erit $c = \sqrt{\frac{2\,g\,e\,P}{E}}$, denotante g altitudinem lapsus grauium vno minuto secundo. Huius vero aequationis differentio-differentialis integrale completum notum est ita per duas functiones arbitrarias exprimi posse, vt sit:

$$y = \Gamma : (c\,t + x) - \Delta : (c\,t - x).$$

§. 9. Hanc aequationem generalem primum ita pro nostro casu limitemus, vt applicata y semper euanescat tam casu $x = 0$ quam casu $x = a$. Primo igitur posito $x = 0$ habebimus $0 = \Gamma : c\,t - \Delta : c\,t$, ideoque $\Delta : c\,t = \Gamma : c\,t$, ita vt indoles functionis Δ cum functione Γ conuenire debeat, atque hinc nanciscimur istam aequationem ad nostrum casum propius accommodatam:

$$y = \Gamma : (c\,t + x) - \Gamma : (c\,t - x).$$

§. 10. Pro altera conditione faciamus $x = a$ ac fieri necesse est $\Gamma : (c\,t + a) = \Gamma : (c\,t - a)$. Hinc si ponamus

namus $c t - a = p$, erit $c t + a = p + 2 a$; vnde patet, indolem functionis Γ ita comparatam esse debere, vt sit:

$$\Gamma : (p + 2 a) = \Gamma : p.$$

Hinc ergo si ista functio per lineam curuam super axe in infinitum producto repraesentetur, ea vtrinque ita in infinitum producta est concipienda, vt omnibus abscissis p, $p + 2 a$, $p + 4 a$, $p + 6 a$, etc. itemque negatiuis $p - 2 a$, $p - 4 a$, $p - 6 a$, $p - 8 a$, etc. pares applicatae conueniant. Ex quo patet, tales curuas nulla aequatione finita comprehendi posse.

§. 11. Quod porro ad motum chordae attinet, ex valore applicatae y inuento colligitur

$$\left(\frac{d y}{d t}\right) = c \Gamma' : (c t + x) - c \Gamma' : (c t - x),$$

qui valor, posito $x = 0$, iam sponte euanescit: at posito $x = a$ fiet

$$\Gamma' : (c t + a) = \Gamma' : (c t - a),$$

quippe quod ex conditione praecedente sequitur, qua erat

$$\Gamma : (c t + a) = \Gamma : (c t - a).$$

Haec igitur respiciunt nostram chordam, cuius motum nunc in genere exploremus, quicunque fuerit status initialis; quamobrem easdem aequationes ad statum initialem supra determinatum accommodemus. Posito ergo $t = 0$ primo fieri debet $y = z$, vnde habebimus $z = \Gamma : x - \Gamma : (-x)$, vnde fit $\Gamma : (-x) = \Gamma : (+x) - z$, ex quo iam intelligimus, quomodo curua per functionem Γ designata retro pro abscissis negatiuis continuari debeat.

§. 12. Conditio autem motus praescripta, posito $t = 0$ praebere debet $\left(\frac{dy}{dt}\right) = v$, unde obtinemus.

$$v = c\,\Gamma' : x - c\,\Gamma' : (-x),$$

vnde pro functione differentiali Γ' similem deducimus determinationem, vt ante:

$$\Gamma' : (-x) = \Gamma' : (+x) - \frac{v}{c}.$$

His igitur conditionibus insuper satisfieri oportet, vt solutio generalis ad casum propositum restringatur ac penitus determinetur.

§. 13. Cum autem ipsam functionem Γ cum eius valore differentiali Γ' immediate comparare non liceat, reducamus posteriorem conditionem

$$v = c\,\Gamma' : x - c\,\Gamma' : (-x)$$

ad indolem ipsius functionis Γ, quem in finem hanc aequationem ducamus in dx, vt fiat

$$v\,dx = c\,dx\,\Gamma' : x - c\,dx\,\Gamma' : (-x),$$

quae aequatio integrata praebet

$$\int v\,dx = c\,\Gamma : x + c\,\Gamma : (-x).$$

Sicque pro indole functionum $\Gamma : x$ et $\Gamma : (-x)$ determinanda has duas nacti sumus aequationes:

$$\Gamma : x - \Gamma : (-x) = z \text{ et } \Gamma : x + \Gamma : (-x) = \tfrac{1}{c}\int v\,dx,$$

vnde colligimus:

$$\Gamma : x = \tfrac{1}{2c}\int v\,dx + \tfrac{1}{2}z \text{ et}$$
$$\Gamma : (-x) = \tfrac{1}{2c}\int v\,dx - \tfrac{1}{2}z,$$

quarum formularum ope per solas quantitates v et z valores functionis Γ tam pro abscissis positiuis $+x$, quam pro

pro negatiuis $-x$, definire poterimus a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = a$, ita vt huius functionis figura per interuallum $= 2a$ describi queat, id quod sufficit pro ea functione vtrinque in infinitum continuanda, quoniam semper post interualla $= 2a$ eaedem applicatae reuertuntur.

§. 14. Vt igitur haec constructio ad praxin transferri queat, ex scala celeritatum AVB, cuius applicatae $XV = v$, valores formulae $\int v\,dx$ construere debemus. Cum igitur formula $\int v\,dx$ exprimat arcum curuae AXV, super eodem axe describatur noua curua ASD, vt vbique sit $XS = \int \frac{v\,dx}{c}$, siue rectangulum $c.\,XS =$ areae AVX. Hac igitur curua descripta, vocemus eius applicatam $XS = s$, et habebimus nostras functiones Tab. II. Fig. 5.

$$\Gamma : x = \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}z \text{ et } \Gamma : (-x) = \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}z.$$

§. 15. Quo igitur constructio facilior reddatur, super eodem interuallo a tanquam axe describantur ambae curuae AZB et ASD, atque ex hac figura scala functionum Γ sequenti modo describi poterit. Super axe infinito a puncto A capiantur vtrinque interualla $AX = Ax = x$ et in X erigatur applicata $X\Gamma = \tfrac{1}{2}XS + \tfrac{1}{2}XZ$, et ex x applicata $x\gamma = \tfrac{1}{2}XS - \tfrac{1}{2}XZ$, quae quidem ad alteram partem cadat ob $XS < XZ$, haecque operatio pro omnibus abscissis instituatur, quo facto patet, in ipso puncto A applicatam fore nullam, sumto vero $x = a$, in puncto B fore $BG = \tfrac{1}{2}BD$; eodemque modo in b erit applicata $bg = \tfrac{1}{2}BD$. Sicque tractum huius scalae, qua functio Γ repraesentatur, iam per totum interuallum $Bb = 2a$ descriptum fore Fig. 6. Fig. 7.

patet,

patet, quem etiam dextrorsum, quoties libuerit, per intervalla $G A' G'$, $G' A'' G''$, $G'' A''' G'''$, etc. repeti licebit.

§. 16. Iam ope huius scalae ad quoduis tempus figura chordae facillime delineari poterit. Sumatur enim super axe interuallum $A T = c t$, at a puncto T abscindantur vtrinque interualla $T P$ et $T p = x$, quibus valoribus respondeant applicatae $P Q$ et $p q$, eritque ex indole functionis Γ, applicata $P Q = \Gamma : (c t + x)$ et $p q = \Gamma : (c t - x)$, vnde, pro figura, quam chorda hoc momento habebit, abscissae x respondebit applicata $y = P Q - p q$, sicque pro singulis abscissis applicatae definiuntur.

§. 17. Ex hac constructione manifestum est, eandem chordae figuram esse prodituram, quam habuerat initio, elapso tempore $t = \frac{2a}{c}$, iterumque elapso tempore $t = \frac{4a}{c}$, quia pro omnibus his temporibus puncta T in similia nostrae scalae loca incidunt; ex quo manifestum est, omnia vibrationum tempora inter se fore aequalia et tempus vniuscuiusque $= \frac{a}{c}$ min. sec. ita vt numerus vibrationum vno minuto secundo editarum $= \frac{c}{a}$, id quod eo magis notatu dignum est, quod tempora vibrationum plane non a statu initiali pendeant, nisi forte figura principalis $b \gamma A F G$ iam contineat duas pluresue portiones inter se similes et aequales; tum enim etiam tempora vibrationum vel ad semissem, vel ad trientem, vel ad quadrantem redigentur, perinde ac si chorda esset vel duplo, vel triplo, vel quadruplo breuior.

§. 18

§. 18. Hoc igitur modo problema nostrum perfecte resolutum vtique est censendum, cum, quicunque etiam status chordae initio fuerit inductus, tam ex figura quam motu initiali per facillimas constructiones, sine vllo calculo, ad quoduis tempus figura, quam chorda tum est habitura, delineari possit, id quod aliis methodis, quibus Geometrae ad hoc problema resoluendum sunt vsi, nullo plane modo praestari potest, cuius rei ratio manifesto in eo est sita, quod hoc problema ad genus Analyseos fere prorsus nouum est referendum, in quo scilicet functiones duarum pluriumue variabilium pertractantur; vnde etiam solutiones adhuc prorsus insolitae et a communi Annalysi penitus abhorrentes deriuantur, quandoquidem functionibus discontinuis, seu lineis curuis pro lubitu ductis, nullus adhuc locus in Geometria est concessus.