1783

Dilucidationes super aliquot casus aequilibrii difficiliores

Leonhard Euler

DILVCIDATIONES
SVPER ALIQVOT CASVS AEQVILIBRII DIFFICILIORES.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Etsi in Statica, vbi de aequilibrio potentiarum agitur, omnia iam penitus videntur explorata; praecipue quando vires vel punctis, vel corporibus rigidis sunt applicatae: tamen saepenumero eiusmodi occurrunt casus, quibus determinatio aequilibrii non mediocrem sagacitatem requirit. Talis casus se mihi nuper obtulit, cum forte quadrilaterum ex quatuor virgis rigidis formatum essem contemplatus, quae circa angulos libere moueri possent, ita vt inde innumerabiles species quadrilaterorum formari queant. Tum vero inter binas virgas eiusmodi elastra applicata consideraui, quae data vi sese contrahendi essent praedita; vnde quaestio est nata: qualis figura ab istis elastris quadrilatero induceretur. Haec igitur quaestio ita se habebat:

§. 2. *Si quatuor virgae rigidae* A B, B C, C D, D A, *ita inuicem iungantur, vt circa angulos libere gyrari queant; tum vero ipsis inter angulos elastra* $a\,\alpha$, $b\,\beta$, $c\,\gamma$, *et* *et* $d\,\delta$, *applicentur, quae datis viribus sese contrahendi sint praedita, inuenire speciem, quam quadrilaterum ab actione harum virium accipiet, vt in aequilibrio consistat.*

§. 3. Hic facile intelligitur, statum aequilibrii non solum a viribus, quibus singula elastra concipiuntur praedita, pendere, sed etiam potissimum a punctis a, α, b, β, c, γ, d, δ, quibus singulis lateribus sunt applicata; vnde facile patet, solutionem huius Problematis non parum esse absconditam, cum adeo principia, ex quibus solutionem haurire opportet, vix satis sint perspecta. Ante autem quam solutionem huius Problematis suscipiam, casum faciliorem sum euoluturus, quo elastra in ipsis angulis applicata accipiuntur, vnde sequens problema nascitur:

Problema.

§. 4. *Si quadrilaterum* ABCD *ex quatuor virgis rigidis fuerit ita formatum, vt circa angulos libere moueri queat; tum vero intra angulos oppositos, secundum diagonales* AC et BD, *elastra fuerint applicata, quae datis viribus sese contrahendi polleant, inuenire statum aequilibrii huius quadrilateri.* Tab. I. Fig. 4.

Solutio.

§. 5. Sit p vis, qua elastrum AC se contrahere conatur, et vis elastri $BD = q$; sitque O intersectio ambarum diagonalium. Quia igitur punctum A sollicitatur a vi $= p$, in directione AO, haec vis resoluatur secundum directiones laterum AB et AD; vnde per principium fun-

damen-

damentale reperitur vis sec. $AB = \frac{p\,\sin.OAD}{\sin.BAD}$ et vis sec. $AD = \frac{p\,\sin.OAB}{\sin.BAD}$. Cum autem sit

$$\sin.BAD : \sin.OAD = BD.OA : OD.AB \text{ et}$$
$$\sin.ABD : \sin.OAB = BD.OA : OB.AD,$$

erit

$$\text{vis sec. } AB = \frac{p.OD.AB}{BD.OA} \text{ et vis sec. } AD = \frac{p.OB.AD}{BD.OA}.$$

Simili modo vis q, qua punctum B secundum BO vrgetur, per resolutionem dabit

$$\text{vim sec. } BA = \frac{q.OC.AB}{AC.OB} \text{ et vim sec. } BC = \frac{q.OA.BC}{AC.OB}.$$

Pari modo vis p, qua punctum C in directione CO trahitur, per resolutionem dabit

$$\text{vim sec. } CB = \frac{p.OD.BC}{BD.OC} \text{ et vim sec. } CD = \frac{p.OB.CD}{BD.OC}.$$

Denique vis q, qua punctum D versus O trahitur, dat

$$\text{vim sec. } DC = \frac{q.OA.CD}{AC.OD} \text{ et vim sec. } DA = \frac{q.OC.AD}{AC.OD}$$

§. 6. Quod si iam istae vires, vtpote aequiualentes, elastrorum loco substituamus, singula latera quadrilateri a binis viribus contrariis sollicitabuntur, quae sequenti modo se habebunt:

$$\text{I. vis sec. } AB = \frac{p.OD.AB}{BD.OA} - \frac{q.OC.AB}{AC.OB},$$
$$\text{II. vis sec. } BC = \frac{q.OA.BC}{AC.OB} - \frac{p.OD.BC}{BD.OC},$$
$$\text{III. vis sec. } CD = \frac{p.OB.CD}{BD.OC} - \frac{q.OA.CD}{AC.OD},$$
$$\text{IV. vis sec. } DA = \frac{q.OC.AD}{AC.OD} - \frac{p.OB.AD}{BD.OA}.$$

§. 7. Manifestum autem est, quadrilaterum in aequilibrio esse non posse, nisi binae vires, quibus singula latera sollicitantur, se mutuo destruant, vnde quatuor aequationes

tiones refultare debere videntur, quae autem omnes ad vnicam reuocantur, quae erit:

$$p.\,AC.\,OB.\,OD = q.\,AD.\,OA.\,OC,$$

ita vt effe debeat

$$p : q = BD.\,OA.\,OC : AC.\,OB.\,OD, \text{ fiue}$$
$$p : q = \frac{OA.\,OC}{AC} : \frac{OB.\,OD}{BD},$$

quocirca, cum detur ratio $p : q$, folutio problematis noftri ad iftud problema geometricum reducitur: *Vt datis quatuor lateribus* AB, BC, CD, DA, *tale quadrilaterum conftruatur, vt ductis diagonalibus* AC *et* BD, *quae fe mutuo fecent in puncto* O, *fiat*:

$$\frac{OA.\,OC}{AC} : \frac{OB.\,OD}{BD} = p : q;$$

in cuius folutione Geometrae vires fuas exercere poffunt.

Corollarium.

§. 8. Si latera oppofita fuerint inter fe aequalia, fcilicet $AB = CD$ et $BC = AD$, quadrilaterum femper erit parallelogrammum, eiusque diagonales AC et BD fefe in medio O interfecabunt, ita vt fit $OA = OC = \frac{1}{2}AC$ et $OB = OD = \frac{1}{2}BD$; vnde pro hoc cafu prodibit haec proportio: $p : q = AC : BD$, ita vt diagonales eam ipfam rationem inter fe tenere debeant, quam habent vires elaftrorum AC et BD.

Scholion.

§. 9. Mirum hic non eft, quod quatuor aequationes, ex quatuor lateribus deductae, eandem praebeant proportionem. Quia enim binae vires vtriusque elaftri, quas in angulos oppoſitos exercent, ſe mutuo tollunt, etiam omnes vires, in quas reſoluuntur, ſe mutuo deſtruere debent; vnde pro ſolutione noſtri problematis ſatis fuiſſet tantum binas vires, quibus vnicum latus A B urgetur, inveſtigaſſe. Quemadmodum in hac ſolutione ad interſectiones binarum diagonalium O ſpectauimus, vnde reſolutionem virium petiuimus, ita etiam alias ſolutiones concinnare licebit, quibus diagonales alio modo ad latera quadrilateri referantur.

Alia ſolutio eiuſdem problematis.

Tab. I. Fig. 5. §. 10. Producantur bina latera oppoſita ad concurſum vsque in E et F, et conſideretur primo vis p, qua punctum C in directione C A vrgetur, quae directio ad triangulum C F D referatur, vnde colligetur

$$\text{vis } CB = \frac{p.\,AD.\,CF}{AC.\,DF} \text{ et vis } CD = \frac{p.\,AF.\,CD}{AC.\,DF}.$$

Sin autem eadem directio C A referatur ad triangulum C B E, reperietur vis ſecundum C B $= \frac{p.\,AE.\,CB}{AC.\,BE}$, et vis ſecundum C D $= \frac{p.\,AB.\,CE}{AC.\,BE}$. Deinde vis q, qua punctum B verſus D trahitur, referatur ad triangulum C B E, indeque reperietur vis B C $= \frac{q.\,DE.\,BC}{BD.\,CE}$, quam iam ſufficit inueniſſe, cum habeamus binas vires, qua latus B C vrgetur, ſcilicet

$$\text{vim } BC = \frac{q.\,DE.\,BC}{BD.\,CE} - \frac{p.\,AD.\,CF}{AC.\,DF},$$

quae ad nihilum reducta praebet hanc aequationem:

$$q.\,AC.\,BC.\,DE.\,DF = p.\,AD.\,BD.\,CE.\,CF.$$

Sin autem poſterior vis ſecundum C B ſumatur, prodibit haec aequatio:

q. A C.

$$q \cdot AC.BE.DE = p \cdot BD.AE.CE,$$ siue
$$p : q = AC.BE.DE : BD.AE.CE,$$ siue
$$p : q = \frac{AC.DE}{CE} : \frac{BD.AE}{BE},$$

quae autem proportio variis modis variari poteſt, propter eximias relationes, quibus lineae huius figurae inter ſe comparari poſſunt.

§. 11. Quia haec proportio prorſus conuenit cum ante inuenta, ex ea quoque ſolutio problematis geometrici ante memorati deduci poterit. Ceterum quia hic duplex expreſſio pro vi ſecundum CB eſt reperta, inde iſta aequalitas deriuatur:

$$\frac{AE.CB}{AC.BE} = \frac{AD.CF}{AC.DF},$$ ita vt ſit
$$AE.CB.DF = AD.BE.CF,$$ ſiue
$$\frac{CB.DF}{CF} = \frac{AD.BE}{AE}.$$

quae eſt egregia proprietas geometrica huius figurae. Ceterum plures aliae proprietates ex hac figura deduci poſſunt.

§. 12. Huius autem problematis ſolutio parum confert ad problema principale initio propoſitum reſoluendum. In poſteriori enim ſtatim licuit vires elaſtrorum ſecundum directiones laterum quadrilateri reſoluere, id quod in priore problemate, vbi elaſtra non in ipſis angulis figurae ſunt applicata, per ſolitas virium reſolutiones praeſtari non poteſt. Hanc ob rem ſequens Lemma ſtaticum, vix adhuc cognitum, ſum propoſiturus, cuius vſus in huiusmodi inueſtigationibus maximi momenti eſſe poterit.

Lemma

Lemma ſtaticum.

§. 13. *Vim corpori rigido applicatam ſecundum ternas directiones datas reſoluere.*

Solutio.

Tab. I. Fig. 6. Sit virgae rigidae A B applicata vis A ſecundum directionem $a\,\alpha$ trahens, quam reſoluere oporteat in ternas vires, quae ſecundum directiones datas A B, A D et B D agant; vbi quidem omnes has directiones in eodem plano ſitas aſſumo. Occurrat directio vis applicatae directioni A D in puncto α, et ducta recta a D vis A ſecundum $a\,\alpha$ reſoluatur primo ſecundum directiones a A et a D, vnde deducitur vis ſecundum $a\,\mathrm{A} = \frac{\mathrm{A}.\, \alpha\mathrm{D}.\, \mathrm{A}a}{\mathrm{AD}.\, a\alpha}$ et vis ſecundum $a\,\mathrm{D} = \frac{\mathrm{A}.\, \mathrm{A}\alpha.\, a\mathrm{D}}{\mathrm{AD}.\, a\alpha}$, quae vocetur $= \mathrm{T}$, haecque vis puncto D concipiatur applicata, quae iam reſolui poterit ſecundum directiones B D et A D, quia haec vis T ſecundum a D trahit. Hinc ergo naſcitur:

$$\text{vis ſec. BD} = \frac{\mathrm{T}.\, \mathrm{A}a.\, \mathrm{BD}}{\mathrm{AB}.\, a\mathrm{D}} \text{ et vis ſec. AD.} = \mathrm{T}\,\frac{a\mathrm{B}.\, \mathrm{AD}}{\mathrm{AB}.\, a\mathrm{D}},$$

hinc loco T ſubſtituto valore reperietur

$$\text{vis ſec. BD} = \frac{\mathrm{A}.\, \mathrm{A}a.\, \mathrm{A}\alpha.\, \mathrm{BD}}{a\alpha.\, \mathrm{AB}.\, \mathrm{AD}} \text{ et vis ſec. AD} = \frac{\mathrm{A}.\, \mathrm{A}\alpha.\, a\mathrm{B}}{a\alpha.\, \mathrm{AB}},$$

ſicque ternae vires quaeſitae vi A aequiualentes erunt:

$$\text{I. vis ſec. BA} = \frac{\mathrm{A}.\, \alpha\mathrm{D}.\, \mathrm{A}a}{\mathrm{AD}.\, a\alpha},$$

$$\text{II. vis ſec. AD} = \frac{\mathrm{A}.\, \mathrm{A}\alpha.\, a\mathrm{B}}{\mathrm{AB}.\, a\alpha},$$

$$\text{III. vis ſec. BD} = \frac{\mathrm{A}.\, a\mathrm{A}.\, \mathrm{A}\alpha.\, \mathrm{BD}}{\mathrm{AB}.\, \mathrm{AD}.\, a\alpha}.$$

Corollarium.

§. 14. Eodem modo, ſi vis A, virgae A D in α applicata, ſecundum $a\alpha$ ageret, ea ſecundum easdem ternas directiones A D, A B et B D reſoluta dabit has vires ex prioribus natas, quoniam ibi tantum literas a et α, item B et D permutari oportet:

I. vis ſec. D A $= \frac{A\, aB \cdot A\alpha}{AB \cdot a\alpha}$,

II. vis ſec. A B $= \frac{A \cdot Aa \cdot \alpha D}{AD \cdot a\alpha}$,

III. vis ſec. D B $= \frac{A \cdot A\alpha \cdot Aa \cdot DB}{AD \cdot AB \cdot a\alpha}$,

quae vires illis ſunt aequales et contrariae, id quod mirum non eſt, quoniam poſterior vis A priori etiam aequalis eſt et contraria.

Corollarium 2.

§. 15. Hinc ſi B D etiam fuerit virga rigida perinde ac latera A B et A D, intra quae applicatum ſit elaſtrum $a\alpha$, vi ſeſe contrahendi A praeditum, omnes vires hinc ortae ſe mutuo deſtruunt, et triangulum, ex his tribus virgis formatum, A B D, erit in aequilibrio. Hoc autem tantum locum habet, ſi B D fuerit virga rigida; niſi enim talis ſit, hic duae vires occurrunt inter ſe aequales $= \frac{A \cdot Aa \cdot A\alpha \cdot BD}{AB \cdot AD \cdot a\alpha}$, quarum altera punctum B verſus D, altera vero punctum D verſus B urgetur; unde deducimus ſequens theorema maximum nobis uſum praeſtaturum.

Theorema ſtaticum.

§. 16. *Si intra duas virgas rigidas A B et A D, in A iunctas, utcunque applicatum fuerit elaſtrum $a\alpha$, vi ſeſe*

contra-

contrahendi = A *praeditum, eius loco substitui potest elastrum intra terminos* B *et* D *applicatum, cuius vis sese contrahendi sit* $= \frac{A.\ A\,a.\ A\,\alpha.\ B\,D}{A\,B.\ A\,D.\ a\,\alpha}$. Atque huius theorematis ope problematis initio propositi, et quod difficillimum merito erat visum, solutio iam facile obtineri potest.

Solutio problematis initio propositi.

§. 17. Cum hic quatuor occurrant elastra $a\,\alpha$, $b\,\beta$, $c\,\gamma$, $d\,\delta$, sint vires, quibus ea se contrahere conantur, singulatim A, B, C, D, et ex theoremate praemisso loco elastri $a\,\alpha$ substituatur elastrum B D, cuius vis sit $\frac{A.\ A\,a.\ A\,\alpha.\ B\,D}{A\,B.\ A\,D.\ a\,\alpha}$. Deinde simili modo loco elastri $b\,\beta$ substituatur elastrum A C, cuius vis sit $= \frac{B.\ B\,b.\ B\,\beta.\ C\,A}{B\,C.\ B\,A.\ b\,\beta}$. Porro loco elastri $c\,\gamma$, cuius vis = C, substitui poterit elastrum B D, cuius vis $= \frac{C.\ C\,\gamma.\ C\,c.\ B\,D}{C\,D.\ B\,C.\ c\,\gamma}$; Denique loco elastri $d\,\delta$, cuius vis = D, substitui potest elastrum A C, cuius vis $= \frac{D.\ D\,\delta.\ D\,d.\ A\,C}{A\,D.\ C\,D.\ d\,\delta}$. Cum igitur bina noua elastra, tam pro directione A C quam B D inuenta, in vnum coalescere concipi queant, quatuor elastra proposita reducentur ad bina noua elastra, quorum alterum intra angulos A et C erit applicatum et vi sese contrahendi pollens

$$= \frac{B.\ B\,b.\ B\,\beta.\ C\,A}{A\,B.\ C\,B.\ b\,\beta} + \frac{D.\ D\,\delta.\ D\,d.\ A\,C}{A\,D.\ C\,D.\ d\,\delta}.$$

Similique modo vis elastri intra B et D erit

$$\frac{A.\ A\,a.\ A\,\alpha.\ B\,D}{B\,A.\ D\,A.\ a\,\alpha} + \frac{C.\ C\,c.\ C\,\gamma.\ B\,D}{B\,C.\ D\,C.\ c\,\gamma}.$$

Hoc igitur modo problema initio propositum reductum est

eſt ad problema §. 4. ſolutum, vbi p et q nunc denotabunt vires elaſtrorum A C et B D. Cum igitur ibi eſſet inuentum

$$p.\frac{OB.OD}{BD}=q.\frac{OA.OC}{AC},$$

ſi loco p et q iſtos valores ſcribamus, habebimus ſequentem ſolutionem noſtri problematis:

$$\frac{B.Bb.B\beta.AC.OB.OD}{AB.CB.DB.b\beta}+\frac{D.Dd.D\delta.AC.OB.OD}{AD.CD.BD.d\delta}$$
$$=\frac{A.Aa.A\alpha.BD.OA.OC}{BA.DA.CA.a\alpha}+\frac{C.Cc.C\gamma.BD.OA.OC}{BC.DC.AC.c\gamma},$$

quae aequatio reducitur ad hanc formam:

$$\frac{OB.OD}{BD^2}\left(\frac{B.Bb.B\beta}{AB.CB.b\beta}+\frac{D.Dd.D\delta}{AD.CD.d\delta}\right)$$
$$=\frac{OA.OC}{AC^2}\left(\frac{A.Aa.A\alpha}{BA.DA.a\alpha}+\frac{C.Cc.C\gamma}{BC.DC.c\gamma}\right).$$

Corollarium.

§. 18. Quod ſi ergo bina latera oppoſita fuerint aequalia, ſcilicet $BC=AD$ et $CD=AB$, vt quadrilaterum fiat parallelogrammum, quia tum eſt

$$OA=OC=\tfrac{1}{2}AC \text{ et } OB=OD=\tfrac{1}{2}BD,$$

aequatio ſolutionem noſtri problematis continens erit

$$\frac{B.Bb.B\beta}{b\beta}+\frac{D.Dd.D\delta}{d\delta}=\frac{A.Aa.A\alpha}{a\alpha}+\frac{C.Cc.C\gamma}{c\gamma},$$

Fig. 3.

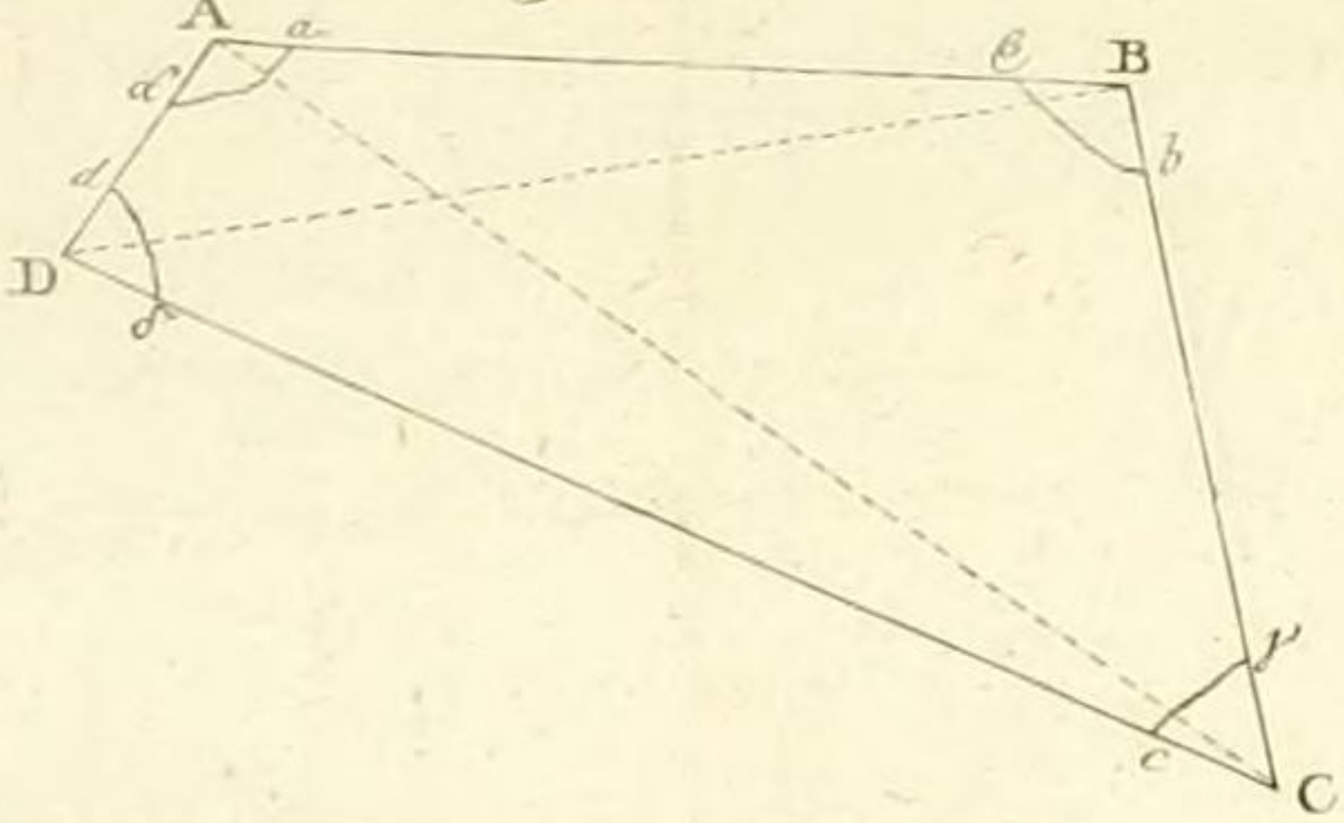

Fig. 4.

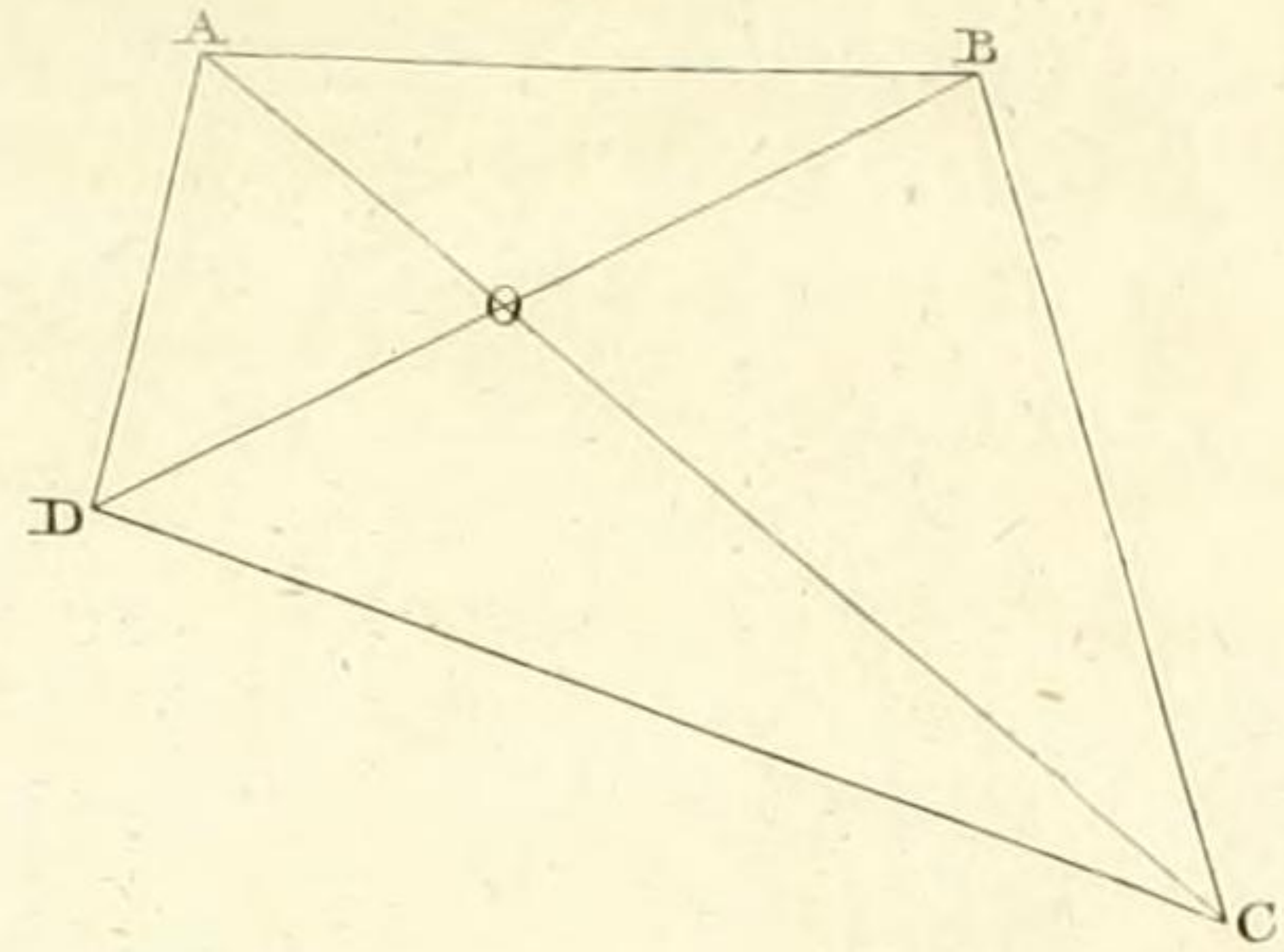

Fig. 5.

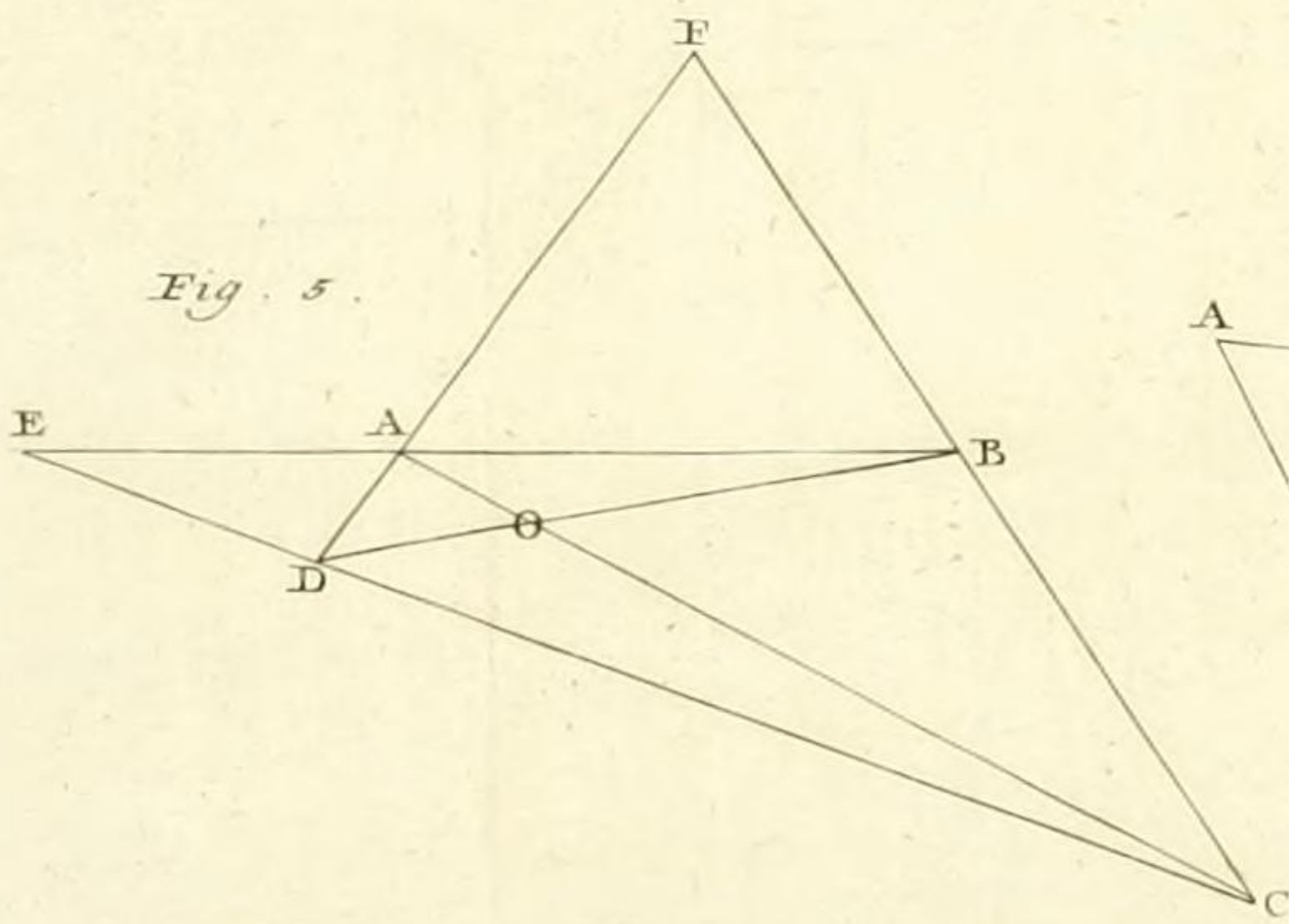

Fig. 6.

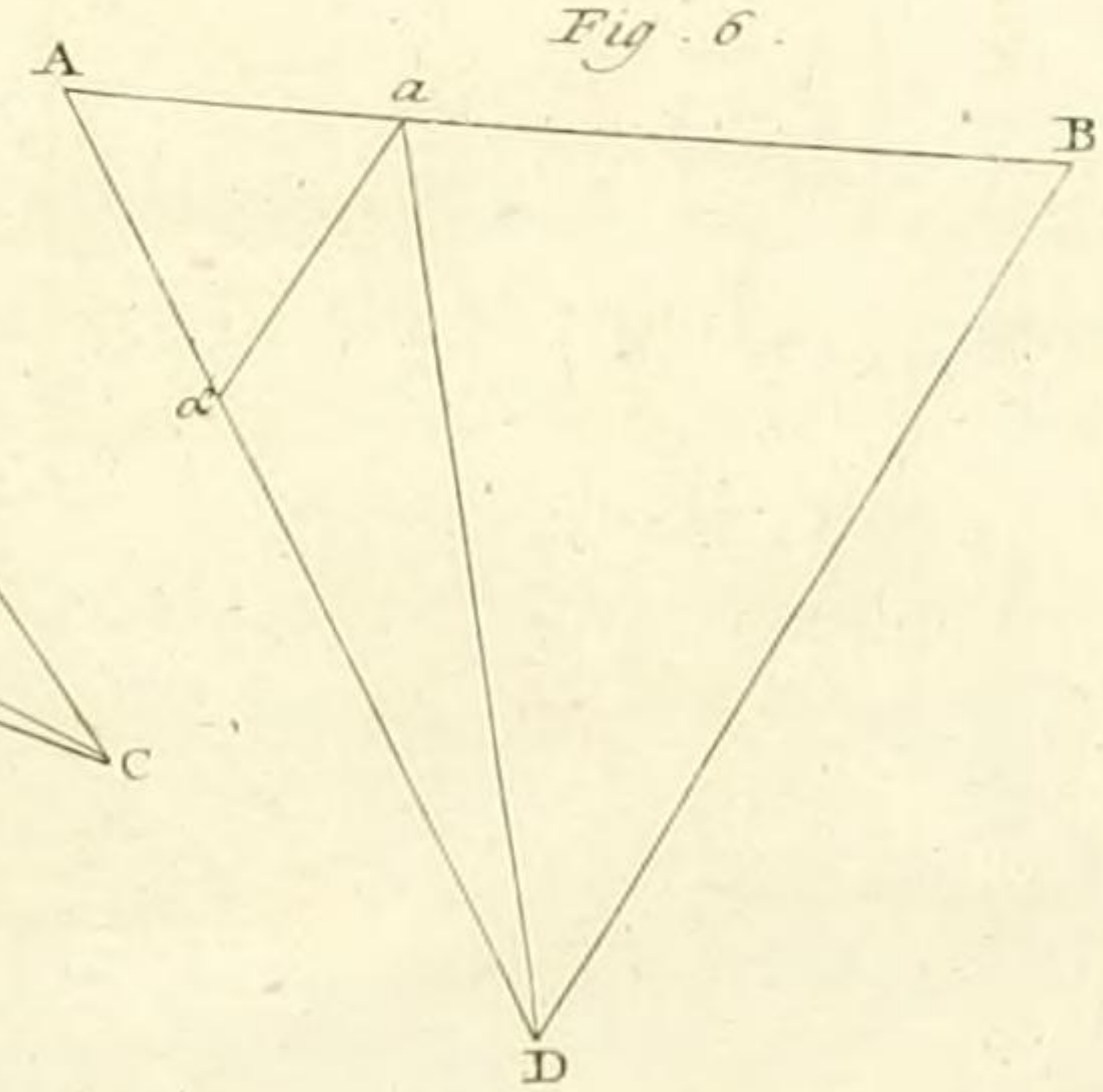

Fig. 7.

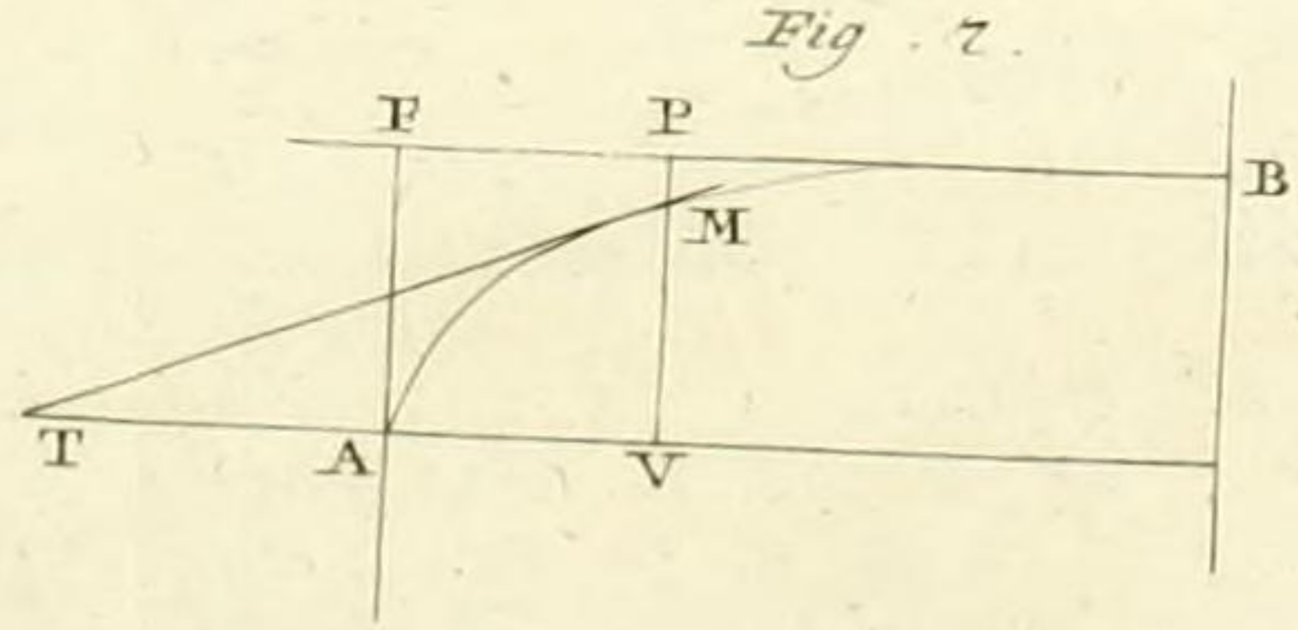

Fig. 1.

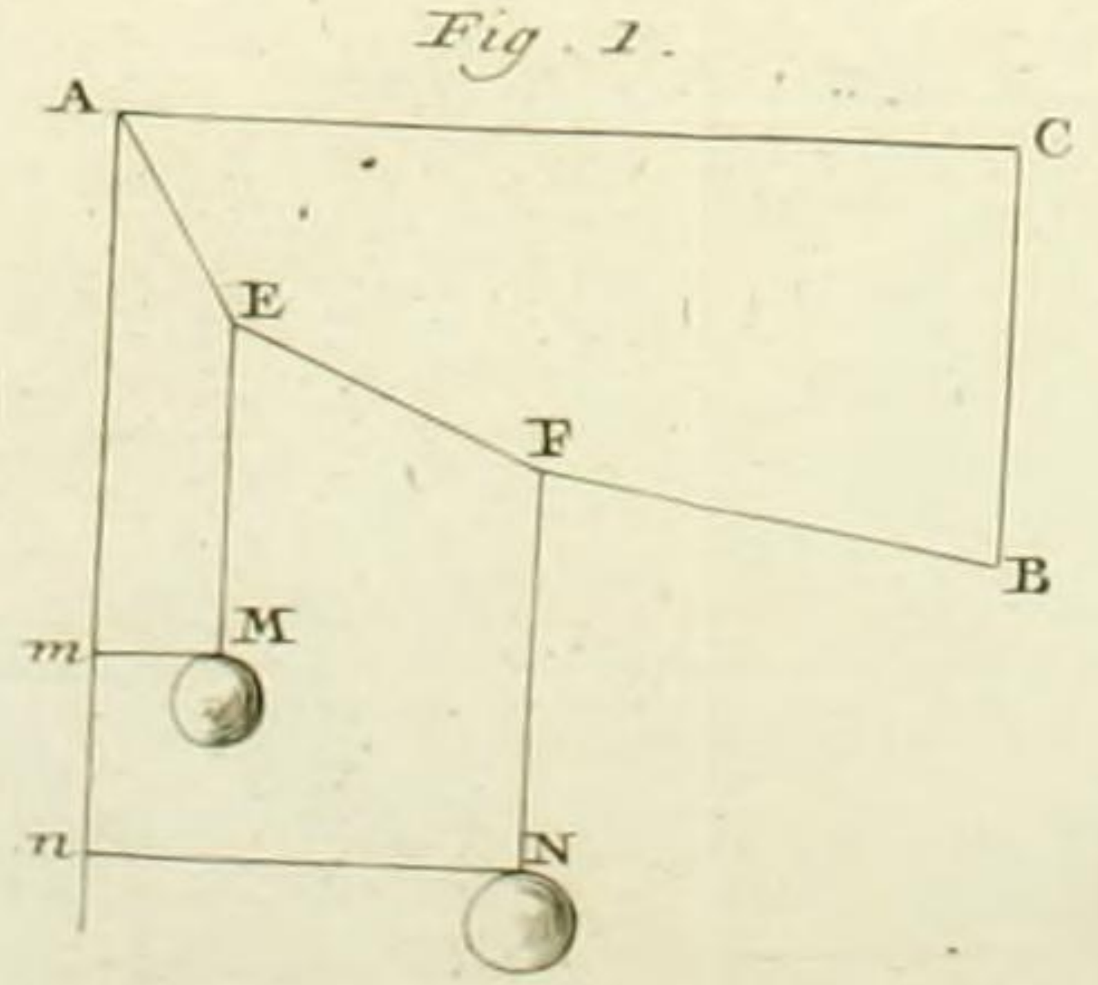

Fig. 2.