



1783

De serie Lambertine plurimisque eius insignibus proprietatibus

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De serie Lambertine plurimisque eius insignibus proprietatibus" (1783). *Euler Archive - All Works*. 532.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/532>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE
SERIE LAMBERTINA,
 PLVRIMISQVE EIVS INSIGNIBVS
 PROPRIETATIBVS.

Auctore
L. EULER O.

§. I.

Hoc cognomine appellare liceat illam maxime memora-
 bilem seriem, qua vir acutissimi ingenii *Lambertus* radices
 aequationum trinomialium primus exprimere docuit in
 Actorum Helueticorum Volum. III. Haec autem series, si
 eius elementa parumper immutentur, sequenti forma re-
 praesentari potest:

$$\begin{aligned}
 S = & 1 + nv + \frac{1}{2}n(n + \alpha + \beta)v^2 \\
 & + \frac{1}{6}n(n + \alpha + 2\beta)(n + 2\alpha + \beta)v^3 \\
 & + \frac{1}{24}n(n + \alpha + 3\beta)(n + 2\alpha + 2\beta)(n + 3\alpha + \beta)v^4 \\
 & + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

cuius seriei summa S ita pendet a resolutione huius aequa-
 tionis trinomialis:

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta)v x^{\alpha + \beta}, \text{ ut sit } S = x^n$$

D 3

vbi

vbi cum illa aequatio plures habere possit radices, pro x earum maximam vel minimam accipi oportet, prouti circumstantiae postulauerint. Praesenti autem forma hanc seriem exhibere est visum, ut litterae α et β inter se permutabiles euaderent, ita ut, quicquid de altera fuerit obseruatum, etiam de altera valeat.

§. 2. Praecipua igitur huius seriei proprietas in hoc consistit, ut eius summa semper aequalis sit potestati exponentis n , ad quem certa quaedam quantitas eleuetur. Vnde si pro valore ipsius n quocunque $n = p$ summa seriei ponatur $= P$; pro alio autem valore quocunque $n = q$ summa ponatur $= Q$: tum, quia habebitur $P = x^p$ et $Q = x^q$, manifestum est fore $P^q = Q^p$, siue $1P : 1Q = p : q$; sicque, dummodo summa huius seriei pro unico casu exponentis n innotuerit, inde summae pro aliis quibuscunque valoribus semper assignari poterunt, siquidem reliquae quantitates α , β et ν eosdem valores retineant. Plurimum igitur optandum foret, ut ista insignis proprietas ex ipsa seriei indole demonstrari posset.

§. 3. Hic igitur ante omnia casus notatu dignus occurrit, quo $n = 0$ et summa $S = 1$. Cum igitur sit $S = x^n$, notum est casu $n = 0$ formulam $\frac{x^n - 1}{n}$ abire in logarithmum hyperbolicum ipsius x , quamobrem hic casus nobis istam summationem imprimis memoratu dignam suppeditat:

$$\begin{aligned}
 Ix &= v + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) v^2 + \frac{1}{6}(\alpha + 2\beta)(2\alpha + \beta) v^3 \\
 &+ \frac{1}{24}(\alpha + 3\beta)(2\alpha + 2\beta)(3\alpha + \beta) v^4 \\
 &+ \frac{1}{120}(\alpha + 4\beta)(2\alpha + 3\beta)(3\alpha + 2\beta)(4\alpha + \beta) v^5 \\
 &+ \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Quodsi ergo summa huius seriei iam fuerit explorata, voceturque $= \Delta$, ob $Ix = \Delta$ erit $x = e^\Delta$, denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$. Unde cognito hoc valore Δ pro quocunque numero n summa seriei propositae erit $= e^{n\Delta}$; ex quo igitur aliam seriem infinitam exhibere licet, propositae aequalẽ, scilicet:

$$S = 1 + n\Delta + \frac{1}{2}n^2\Delta^2 + \frac{1}{6}n^3\Delta^3 + \frac{1}{24}n^4\Delta^4 + \text{etc.}$$

tum vero, quia $\Delta = Ix$, simul habebitur ista aequatio:

$$e^{\alpha\Delta} - e^{\beta\Delta} = (\alpha - \beta)v e^{(\alpha + \beta)\Delta}, \text{ siue}$$

$$e^{-\beta\Delta} - e^{-\alpha\Delta} = (\alpha - \beta)v.$$

ex qua aequatione etiam valorem ipsius Δ investigare licebit.

§. 4. Praeterea vero etiam summationem seriei propositae generalis ita describere licet, ut, si fuerit

$$v = \frac{x^{-\beta} - x^{-\alpha}}{\alpha - \beta},$$

seriei summa futura sit $S = x^n$, atque adeo quicunque valores litteris α et β tribuantur, si modo notetur, uti iam observauimus, quando ex pluribus valoribus pro x assumtis idẽm valõr pro v resultare potest, tum pro summa $S = x^n$ eum accipi oportere, qui fuerit vel maximus vel minimus. His in genere praenotatis, percurramus aliquos casus praecipuos, ratione litterarum α et β , quibus cognitio nostrae seriei non mediocriter illustrabitur.

Ca-

Casus I.

Quo $\xi = 0.$

§. 5. Quoniam litterae α et ξ sunt permutabiles, perinde est, siue α siue ξ euanescat. Sit igitur $\xi = 0$ et nostra series sequentem induet formam:

$$S = 1 + nv + \frac{1}{2}n(n+a)v^2 + \frac{1}{6}n(n+a)(n+2a)v^3 + \frac{1}{24}n(n+a)(n+2a)(n+3a)v^4 + \frac{1}{120}n(n+a)(n+2a)(n+3a)(n+4a)v^5 + \text{etc.}$$

cuius ergo summa erit $S = x^n$, si modo x capiatur ex hac aequatione: $x^\alpha - 1 = \alpha v x^\alpha$, ex qua prodit $x^\alpha = \frac{1}{1 - \alpha v}$, ideoque $x = (1 - \alpha v)^{-\frac{1}{\alpha}}$; quamobrem summa istius seriei erit $S = (1 - \alpha v)^{-\frac{n}{\alpha}}$, quae more solito euoluta eandem prorsus seriem gignit. Quo ergo casu ipsa series Lambertina iam insigne firmamentum accipit.

§. 6. Quodsi hic exponentem n euanescere faciamus, series hoc modo ad logarithmum reuocabitur, ut sit

$$lx = v + \frac{1}{2}\alpha v^2 + \frac{1}{3}\alpha^2 v^3 + \frac{1}{4}\alpha^3 v^4 + \frac{1}{5}\alpha^4 v^5 + \text{etc.}$$

Cum igitur sit

$$x = (1 - \alpha v)^{-\frac{1}{\alpha}}, \text{ erit } lx = -\frac{1}{\alpha} l(1 - \alpha v).$$

Notum autem est esse

$$l(1 - \alpha v) = -\alpha v - \frac{1}{2}\alpha^2 v^2 - \frac{1}{3}\alpha^3 v^3 - \frac{1}{4}\alpha^4 v^4 - \text{etc.}$$

quae series ducta in $-\frac{1}{\alpha}$ ipsam seriem modo inuentam reddit.

Casus II.

Quo $\xi = \alpha$.

§. 7. Hic casus maxime est memoratu dignus, propterea quod aequatio, unde valorem x deriuari oportet, fit incongrua, scilicet: $x^\alpha - x^\alpha = 0$ v x^{2^α} , siue $0 = 0$; ad quod incommodum euitandum ponamus $\alpha = \xi + \omega$, existente ω infinite paruo, et nostra aequatio erit

$$x^{\xi+\omega} - x^\xi = \omega v x^{2^{\xi+\omega}}, \text{ siue}$$

$$\frac{x^\omega - 1}{\omega} = v x^{\xi + \omega}.$$

Constat autem, euanescente ω esse $\frac{x^\omega - 1}{\omega} = l x$, ita vt hoc casu fiat $l x = v x^{\xi + \omega} = v x^\alpha$, quae ergo est aequatio, ex qua valorem ipsius x elici oportet.

§. 8. Posito autem $\xi = \alpha$ ad sequentem seriem perueniemus:

$$S = 1 + n v + \frac{1}{2} n (n + 2 \alpha) v^2 + \frac{1}{6} n (n + 3 \alpha)^2 v^3 \\ + \frac{1}{24} n (n + 4 \alpha)^3 v^4 + \frac{1}{120} n (n + 5 \alpha)^4 v^5 \\ + \frac{1}{720} n (n + 6 \alpha)^5 v^6 + \text{etc.}$$

quae series ideo maxime est notatu digna, quod non solum exponentes continuo crescant, sed etiam ipsae quantitates eleuatae in progressionem arithmetica procedant, cuiusmodi series vix adhuc a Geometris sunt consideratae. Interim tamen hic nouimus, summam huius seriei esse $S = x^\alpha$, si modo valor ipsius x huic aequationi conueniat, nempe: $l x = v x^\alpha$, quem autem valorem aliter nisi appropinquando cognoscere non datur.

§. 9. Quodsi ulterius statuerimus $n = 0$, ex supra allatis sequens series colligitur:

$$lx = v + a v^2 + \frac{3^2}{5} a a v^3 + \frac{4^3}{24} a^2 v^4 + \frac{5^4}{120} a^3 v^5 + \frac{6^5}{720} a^4 v^6 + \text{etc.}$$

Cum igitur fit $lx = v x^\alpha$, erit

$$x^\alpha = 1 + \frac{2^1}{1 \cdot 2} a v + \frac{3^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^2 v^2 + \frac{4^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^3 v^3 + \frac{5^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^4 v^4 + \frac{6^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^5 v^5 + \text{etc.}$$

Ponamus hic $av = u$, ita ut $lx = u x^\alpha$. Sit iam porro $x^\alpha = y$, ideoque $lx = ly$, consequenter aequatio nostra fiet $ly = uy$, quocirca nanciscimur hanc summationem:

$$y = 1 + \frac{2^1}{1 \cdot 2} u + \frac{3^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} u u + \frac{4^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} u^3 + \frac{5^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} u^4 + \frac{6^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} u^5 + \text{etc.}$$

si modo fuerit $u = \frac{ly}{y}$.

§. 10. Quoniam in hac serie exponentes numeratorum ab ipsis numeratoribus unitate deficiunt, eos sequenti modo ad paritatem reducamus. Multiplicemus vtrinque per w ac differentiemus, fietque:

$$\frac{d \cdot ly}{d u} = \frac{d y}{y d u} = 1 + \frac{2^2}{1 \cdot 2} u + \frac{3^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} u u + \frac{4^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} u^3 + \frac{5^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} u^4 + \frac{6^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} u^5 + \text{etc.}$$

Cum autem fit $ly = uy$, erit $\frac{d y}{y} = u d y + y d u$, vnde fit $\frac{d y}{d u} = \frac{y y}{1 - u y}$; sicque summa illa erit $= \frac{y}{1 - u y}$. Multiplicemus porro vtrinque per u , et ob $u y = ly$ adipiscemur hanc summationem maxime notabilem:

$$\frac{ly}{1 - ly} = u + \frac{2^2}{1 \cdot 2} u^2 + \frac{3^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^3 + \frac{4^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} u^4 + \frac{5^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} u^5 + \text{etc.}$$

si modo fuerit $w = \frac{ly}{y}$.

§. 11. Haec postrema series ob concinnitatem utique meretur, ut in eius indolem accuratius inquireamus. Ac primo quidem patet, si sumeremus $u = 1$ vel $u > 1$, seriem prodituram esse diuergentem; cum in forma generali $\frac{n^n}{1 \cdot 2 \dots n}$ numerator continuo magis denominatorem superet, ideoque omnes termini adeo in infinitum excrefant, quod signum est summae imaginariae; id quod per formulam $u = \frac{ly}{y}$ manifesto declaratur, siquidem nullius numeri logarithmus ipso maior euadere potest. Quando autem u unitate minus accipitur, summa istius seriei utique finita prodire potest, quoties scilicet formula $\frac{ly}{y}$ finitum accipit valorem, id quod euenit, quando $ly < 1$, siue $y < e$. Sumto autem $y = e$, unde fit $u = \frac{1}{e}$, series nostra etiam nunc summam infinitam habebit, etiam si eius termini continuo decrefant, atque adeo tandem euanescant.

§. 12. In hac autem serie imprimis memorabile occurrit, quod, si u tantillo superet $\frac{1}{e}$, terminos tandem in infinitum excrefant, id quod egregie conuenit cum iis, quae olim circa valorem producti $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ obseruati in calculo differentiali pag. 466. Quod si enim ponatur

$$T = \frac{n^n}{1 \cdot 2 \dots n}, \text{ ut fit}$$

$$lF = n \ln n - l1 - l2 - l3 \dots - ln$$

loco citato demonstrari esse $l1 + l2 + l3 + l4 + \dots + ln$
 $= \frac{1}{2} l2 \pi + (n + \frac{1}{2}) ln - n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \text{etc.}$

unde sequitur ipsum productum

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = \frac{\sqrt{2 \pi} \times n^{n + \frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{12n}} - \frac{1}{360n^3}}{e^n} \text{ etc.}$$

E 2

sicque

ficque habebimus

$$T = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \cdot e^{n - \frac{1}{12n} + \frac{1}{360n^3} - \text{etc.}}$$

Quando ergo n est numerus praemagnus, totus seriei nostrae terminus erit $T u^n = \frac{e^n u^n}{\sqrt{2n\pi}}$, ex qua forma manifestum est, simulac fuerit $e u > 1$, siue $u > \frac{1}{e}$, tum hunc terminum euadere infinitum; sin autem fuerit $e u$ vel $= 1$ vel adeo < 1 , siue $u < \frac{1}{e}$, tum istum terminum in nihilum esse arbiturum.

§. 13. Illustremus hanc summationem vnico exemplo, ponentes $ly = \frac{1}{2}$, vt summa seriei euadat $= 1$; tum autem erit $u = \frac{1}{2\sqrt{e}}$, quo ergo casu certi sumus fore

$$1 = u + \frac{2^2}{1 \cdot 2} u^2 + \frac{3^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^3 + \frac{4^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} u^4 + \text{etc.}$$

Cum autem sit $e = 2,71828$, valores priorum huius seriei terminorum in fractionibus decimalibus ita reperientur expressi:

$$\begin{aligned} u &= 0,303269 \\ 2 u^2 &= 0,183944 \\ \frac{9}{2} u^3 &= 0,125515 \\ \frac{32}{3} u^4 &= 0,090228 \\ \frac{5^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} u^5 &= 0,066805 \\ \frac{2^2 \cdot 6^2}{5} u^6 &= 0,050413 \end{aligned}$$

Haec ergo series perquam lente conuergit, ita tamen, vt tota summa non ultra vnitatem ascenderè sit censenda.

De resolutione

aequationis $lx = vx^\alpha$.

§. 14. Quoniam pro casu secundo, ubi $\xi = \alpha$, summatio nostrae seriei pendet ab aequatione $lx = vx^\alpha$, ex qua, pro quouis valore v , quantitatem x erui oportet: ante omnia obseruari conuenit, cuilibet valori v geminos valores ipsius x respondere posse. Ad hoc ostendendum faciamus $x^\alpha = y$ et $\alpha v = u$, ut habeatur ista aequatio: $ly = uy$, siue $u = \frac{ly}{y}$; vnde patet numerum u posituum esse non posse, nisi sit $y > 1$. Tum autem semper erit $u < \frac{ly}{e}$, propterea quod maximus valor formulae $\frac{ly}{y}$ oritur sumto $y = e$, ita ut, siue y maius capiatur quam e siue minus, semper prodeat $u < \frac{ly}{e}$. Hinc igitur patet, seriem pro casu secundo inuentam finitam summam habere non posse; quamdiu fuerit $u > \frac{ly}{e}$, siue $v > \frac{ly}{\alpha e}$, siquidem v fuerit quantitas positua; quando enim foret negatiua, ob signa alternantia summa semper futura esset finita.

§. 15. Hinc sequitur porro, quoties fuerit $u < \frac{ly}{e}$, toties duos valores pro y exhiberi posse: alterum scilicet maiorem quam e , alterum vero minorem, ex quorum utroque prodeat idem valor $u = \frac{ly}{y}$. Veluti, siue statuatur $y = 2$, siue $y = 4$, vtrinque prodit $u = \frac{ly}{2}$. Idem vsu venit, siue statuatur $y = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$, siue $y = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$, siquidem ex utroque prodit $u = \frac{ly}{3}$. Idem porro euenit, siue sumatur $y = (\frac{4}{3})^3$, siue $y = (\frac{3}{4})^3$, quandoquidem ex utroque fit $u = \frac{3ly}{4}$.

§. 16. Ad tales binos ipsius y valores inueniendos sint p et q huiusmodi valores, quibus euadat $u = \frac{lp}{p} = \frac{lq}{q}$.

E 3

Pe-

Ponamus nunc $q = p r$, fierique oportet

$$\frac{lp}{p} = \frac{lp r}{p r} = \frac{lp + lr}{p r},$$

sive $r lp = lp + lr$, vnde fit $lp = \frac{lr}{r-1}$, ideoque $p = r^{\frac{r}{r-1}}$,

hincque $q = r^{\frac{r}{r-1}}$, quae formulae quo commodiores red-
dantur, faciamus $\frac{r}{r-1} = m$, vt fit $r = \frac{m+1}{m}$, vnde bini va-
lores ipsius y , quos vocauimus p et q , nunc erunt: alter

$$y = p = \left(\frac{m+1}{m}\right)^m, \text{ alter vero } y = q = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}; \text{ ex vtro-}$$

$$\text{que enim prodit } u = \frac{m^{m+1}}{(m+1)^m} l^{\frac{m+1}{m}}.$$

§. 16. His expositis hic quaestio oritur maximi
momenti: vter horum duorum valorum ipsius y adhiberi
debeat ad summam huius seriei exprimendam:

$$y = 1 + \frac{2^1}{1.2} u + \frac{3^2}{1.2.3} u u + \frac{4^3}{1.2.3.4} u^3 + \frac{5^4}{1.2.3.4.5} u^4 + \text{etc.}$$

ad quam quaestionem dirimendam sumamus primo $u = \frac{1}{e}$, vt
vterque valor ipsius y fit $= e$; nullum enim est dubium quin
hoc casu fit $y = e$. Nunc vero, si fuerit $u < \frac{1}{e}$, euidens
est summam seriei euadere minorem quam e . Quare cum
pro y inuenerimus duos valores, alterum maiorem, alte-
rum quidem minorem quam e , manifestum est, semper
valorem minorem accipi debere ad summam illius seriei

exprimendam. Ita si fuerit $u = \frac{m^{m+1}}{(m+1)^m} l^{\frac{m+1}{m}}$, valor pro
 y assumendus erit $y = \left(\frac{m+1}{m}\right)^m$, quippe qui semper minor
est quam e , dum alter, $y = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}$, maior est quam e

Theo-

Theorema.

§. 17. Si quantitates x et v ita a se invicem pendeant, ut sit $l x = v x$, atque adeo cuilibet valori v gemini valores x respondeant, alter maior quam e , alter vero minor, tum in sequentibus summationibus:

$$I. \frac{x^n - 1}{n} = v + \frac{n+2}{1 \cdot 2} v^2 + \frac{(n+3)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} v^3 + \frac{(n+4)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} v^4 + \text{etc.}$$

$$II. \frac{x^n}{1 - l x} = 1 + \frac{n+1}{1} v + \frac{(n+2)^2}{1 \cdot 2} v^2 + \frac{(n+3)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} v^3 + \frac{(n+4)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} v^4 + \text{etc.}$$

perpetuo loco x minorem valorem accipi oportet, qui scilicet sit minor quam e . Ratio harum duarum serierum ex evolutione casus secundi per se est manifesta; prior enim nascitur ex §. 8. sumendo $a = 1$.

§. 18. Posterior vero series ex priore deducitur per differentiationem; hinc enim per $d v$ diidendo et differentiando adipiscimur

$$\frac{x^{n-1} d x}{d v} = 1 + \frac{n+2}{1} v + \frac{(n+3)^2}{1 \cdot 2} v^2 + \frac{(n+4)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} v^3 + \text{etc.}$$

Cum autem sit $v = \frac{l x}{x}$, erit $d v = \frac{d l x}{x x}$ ($1 - l x$), ideoque

$$\frac{x^{n-1} d x}{d v} = \frac{x^{n+1}}{1 - l x}$$

Quare si hic loco n scribamus $n - 1$, orietur ista summatio:

$$\frac{x^n}{1 - l x} = 1 + \frac{n+1}{1} v + \frac{(n+2)^2}{1 \cdot 2} v^2 + \frac{(n+3)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} v^3 + \text{etc.}$$

quae est ipsa series nostra posterior.

§. 19. Hae duae autem series eo magis omni attentione dignae sunt censendae, quod multo sint simplices et concinniores, quam ipsa series generalis *Lambertina*; tum vero imprimis, quod nulla plane via patere videatur ad earum veritatem directe demonstrandam. Quamquam enim veritas ipsius seriei *Lambertinae* iam satis est euicta: tamen rationes, quibus demonstratio illa innititur, ad casum praesentium serierum nullo modo accomodari possunt, in quo utique insigne paradoxon conspicitur, quod propositionem quandam generalem demonstratione munire liceat, quae tamen ad quempiam casum specialem applicari penitus nequeat.

§. 20. Quemadmodum autem series generalis *Lambertina* ex aequatione trinomiali

$$x^{\alpha} - x^{\beta} = (\alpha - \beta) v x^{\alpha + \beta},$$

deriuari queat, alia occasione fusius monstrari, vbi simul similem resolutionem ad aequationes quantumvis polynomias extendi. At vero quomodo vicissim series *Lambertina* ad aequationem trinomialem perduci queat, quaestio multo magis ardua videtur; vnde operae pretium erit talem analysin exposuisse, quod opus quo facilius succedat, sequens problema praemittam.

Problema.

Proposita serie *Lambertina*, vti initio est euoluta, eius consensum cum hac aequatione trinomiali:

$$x^{\alpha} - x^{\beta} = (\alpha - \beta) v x^{\alpha + \beta},$$

docere.

Solutio.

Solutio.

§. 21. Posita seriei illius summa = S, hic quidem assumo istam summam aequari huiusmodi potestati, x^n , ita ut tantum nobis incumbat relationem inter istam quantitatem x et quantitates ipsam seriem constituentes, quae sunt α , β et v inuestigare. Facile autem intelligitur, hanc ob rationem neutiquam pro demonstratione haberi posse, (propterea quod hoc ipsum ante omnia demonstrandum fuisset), istam summam S per talem formam x^n exhiberi posse. Hoc autem concessio ratiocinium sequenti modo instituamus.

§. 22. Posito scilicet $S = x^n$ primo loco exponentis indefiniti n statuo valorem determinatum $n = -\alpha$, indeque ista series obtinebitur:

$$x^{-\alpha} = 1 - \alpha v - \frac{1}{2} \alpha \beta v^2 - \frac{1}{6} \alpha \cdot 2 \beta (\alpha + \beta) v^3 \\ - \frac{1}{24} \alpha \cdot 3 \beta (\alpha + 2 \beta) (2 \alpha + \beta) v^4 \\ - \frac{1}{120} \alpha \cdot 4 \beta (\alpha + 3 \beta) (2 \alpha + 2 \beta) (3 \alpha + \beta) v^5 - \text{etc.}$$

Simili modo, si statuamus $n = -\beta$, ad sequentem seriem pertingemus:

$$x^{-\beta} = 1 - \beta v - \frac{1}{2} \beta \alpha v^2 - \frac{1}{6} \beta \cdot 2 \alpha (\beta + \alpha) v^3 \\ - \frac{1}{24} \beta \cdot 3 \alpha (\beta + 2 \alpha) (2 \beta + \alpha) v^4 \\ - \frac{1}{120} \beta \cdot 4 \alpha (\beta + 3 \alpha) (2 \beta + 2 \alpha) (3 \beta + \alpha) v^5 - \text{etc.}$$

§. 23. Iam priorem harum duarum serierum a posteriore subtrahamus, atque impetrabimus istam aequalitatem: $x^{-\beta} - x^{-\alpha} = (\alpha - \beta) v$, propterea quod praeter terminos secundos omnes sequentes se manifesto destruant. Quodsi iam illam aequationem inuentam per $x^{\alpha+\beta}$ multiplicemur

triplicemus, prodibit ipsa aequatio trinomialis assumta

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta) v x^{\alpha + \beta}.$$

§. 24. Dummodo igitur demonstrari posset, summam seriei *Lambertinae* aequari potestati exponentis n cuiuspiam quantitatis x , quae ab n non pendeat, praecedens Analysis firmam utique demonstrationem suppeditaret. Hunc autem defectum in sequente problemate supplere conabimur.

Problema principale.

Operationes analyticas exponere, quae ad cognitionem verae summae seriei *Lambertinae* manuducant.

Solutio.

§. 25. Cum series proposita *Lambertina* quatuor quantitates α , β , v et n innoluar, ternas priores α , β et v tanquam datas et constantes spectemus, dum quarta n quasi variabilis consideretur; hocque modo summam quaesitam S tanquam certam functionem quantitatis n contemplari licebit, quam more recepto hoc modo repraesentemus: $S = \Phi : n$, ita ut sit

$$\begin{aligned} \Phi : n = & 1 + n v + \frac{1}{2} n (n + \alpha + \beta) v^2 \\ & + \frac{1}{6} n (n + \alpha + 2\beta) (n + 2\alpha + \beta) v^3 \\ & + \frac{1}{24} n (n + \alpha + 3\beta) (n + 2\alpha + 2\beta) (n + 3\alpha + \beta) v^4 \\ & + \frac{1}{120} n (n + \alpha + 4\beta) (n + 2\alpha + 3\beta) (n + 3\alpha + 2\beta) \times \\ & \times (n + 4\alpha + \beta) v^5 + \text{etc.} \end{aligned}$$

§. 26. Cum igitur haec aequatio vera esse debeat, quicumque numeri loco n scribantur, loco n statua-

mus

mus primo $n - \alpha$ et impetrabimus

$$\begin{aligned} \Phi : (n - \alpha) &= 1 + (n - \alpha) v + \frac{1}{2} (n - \alpha) (n + \beta) v^2 \\ &+ \frac{1}{6} (n - \alpha) (n + 2\beta) (n + \alpha + \beta) v^3 \\ &+ \frac{1}{24} (n - \alpha) (n + 3\beta) (n + \alpha + 2\beta) (n + 2\alpha + \beta) v^4 \\ &+ \frac{1}{120} (n - \alpha) (n + 4\beta) (n + \alpha + 3\beta) \times \\ &\times (n + 2\alpha + 2\beta) (n + 3\alpha + \beta) v^5 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Simili vero modo reperiemus fore

$$\begin{aligned} \Phi : (n - \beta) &= 1 + (n - \beta) v + \frac{1}{2} (n - \beta) (n + \alpha) v^2 \\ &+ \frac{1}{6} (n - \beta) (n + 2\alpha) (n + \alpha + \beta) v^3 \\ &+ \frac{1}{24} (n - \beta) (n + 3\alpha) (n + \alpha + 2\beta) (n + 2\alpha + \beta) v^4 \\ &+ \frac{1}{120} (n - \beta) (n + 4\alpha) (n + \alpha + 3\beta) (n + 2\alpha + 2\beta) \\ &\times (n + 3\alpha + \beta) v^5 + \text{etc.} \end{aligned}$$

§. 27. Subtrahamus nunc priorem harum duarum serierum a posteriore, et cum pro terminis cuiuscunque ordinis, praetermissis factoribus communibus, habeamus

$$(n - \beta) (n + \lambda \alpha) - (n - \alpha) (n + \lambda \beta) = (\lambda + 1) n (\alpha - \beta),$$

hoc observato, subtractione facta inueniemus

$$\begin{aligned} \Phi : (n - \beta) - \Phi : (n - \alpha) &= (\alpha - \beta) v + \frac{1}{2} (\alpha - \beta) n v^2 + \frac{1}{6} (\alpha - \beta) n (n + \alpha + \beta) v^3 \\ &+ \frac{1}{24} (\alpha - \beta) n (n + \alpha + 2\beta) (n + 2\alpha + \beta) v^4 \\ &+ \frac{1}{120} (\alpha - \beta) n (n + \alpha + 3\beta) (n + 2\alpha + 2\beta) \\ &\times (n + 3\alpha + \beta) v^5 \text{ etc.} \end{aligned}$$

§. 28. Quia in hac serie omnes termini factorem continent $(\alpha - \beta) v$, per hunc diuidendo consequimur hanc aequationem:

$$\frac{\Phi:(n-\beta) - \Phi:(n-\alpha)}{(\alpha-\beta)v} = 1 + n v + \frac{1}{2} n (n + \alpha + \beta) v^2 + \frac{1}{6} n (n + \alpha + 2\beta) (n + 2\alpha + \beta) v^3 + \frac{1}{24} n (n + \alpha + 3\beta) (n + 2\alpha + 2\beta) \times (n + 3\alpha + \beta) v^4 + \text{etc.}$$

quae series cum sit ea ipsa, quam caractere $\Phi:n$ insinuimus, pro summa eruenda hanc adepti sumus aequationem:

$$\Phi:(n-\beta) - \Phi:(n-\alpha) = (\alpha-\beta) v \Phi:n.$$

§. 29. Totum negotium igitur ad hanc quaestionem est perductum: cuiusmodi functionem ipsius n pro $\Phi:n$ accipi oporteat, ut huic aequationi satisfiat? Leuiter autem eam inspicienti mox patebit, ei tali positione satisfieri posse: $\Phi:n = A k^n$, vbi quidem neque A neque k litteram n inuoluat; tum autem erit

$$\Phi:(n-\alpha) = A k^{n-\alpha} \text{ et } \Phi:(n-\beta) = A k^{n-\beta}.$$

Substitutis autem his valoribus aequatio inuenta istam inducet formam:

$$A (k^{n-\beta} - k^{n-\alpha}) = (\alpha-\beta) v A k^n$$

quae diuisa per $A k^n$ abit in hanc: $k^{-\beta} - k^{-\alpha} = (\alpha-\beta) v$, quam si ducamus in $k^{\alpha+\beta}$ et loco n scribamus x , deducimur ad ipsam aequationem trinomiali initio commemoratam: $x^\alpha - x^\beta = (\alpha-\beta) v x^{\alpha+\beta}$.

§. 30. Sic igitur solidissime est euictum, summam seriei *Lambertinae* necessario tali formula exprimi, nempe $S = A k^n$, siue $S = A x^n$, vbi cum posito $n = 0$ summa seriei fieri debeat $= 1$, manifestum est litteram A necessario fieri $= 1$, ita vt summa istius seriei prorsus sit vti est

est assignata: scilicet $S = x^n$, siquidem quantitas x ista aequatione eliciatur: $x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta) v x^{\alpha + \beta}$.

§. 31. Contra hanc solutionem obiici posses, aequationi inuentae

$$\Phi: (n - \beta) - \Phi: (n - \alpha) = (\alpha - \beta) v \Phi: n$$

fortasse adhuc aliis modis satisfieri posse, praeter valorem $\Phi: n = A k^n$, quod quidem negari nequit, cum huiusmodi aequationes plerumque plures admittere soleant solutiones. Verum, etiamsi sufficere queat istum valorem prorsus satisfacere, atque adeo ita, ut neque A neque k ab n pendeat: tamen idem ex principiis Analyseos infinitorum etiam sequenti modo confirmari potest.

§. 32. Cum $S = \Phi: n$ sit functio ipsius n , hac quantitate variabili assumpta, ex notis principiis constat fore

$$\Phi: (n - \alpha) = S - \frac{\alpha dS}{dn} + \frac{\alpha^2 d^2 S}{1 \cdot 2 \cdot dn^2} - \frac{\alpha^3 d^3 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dn^3} + \frac{\alpha^4 d^4 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dn^4} - \text{etc.}$$

similique modo

$$\Phi: (n - \beta) = S - \frac{\beta dS}{dn} + \frac{\beta^2 d^2 S}{1 \cdot 2 \cdot dn^2} - \frac{\beta^3 d^3 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dn^3} + \frac{\beta^4 d^4 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dn^4} - \text{etc.}$$

his substitutis perueniemus ad istam aequationem differentialem infinitam:

$$(\alpha - \beta) v S = (\alpha - \beta) \frac{dS}{dn} - (\alpha \alpha - \beta \beta) \frac{d^2 S}{1 \cdot 2 \cdot dn^2} + (\alpha^3 - \beta^3) \frac{d^3 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dn^3} - (\alpha^4 - \beta^4) \frac{d^4 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dn^4} + \text{etc.}$$

ex qua quantitatem S erui oportet.

§. 33. Cum autem in singulis huius aequationis terminis variabilis S unquam vbique dimensionem occupet,

In calculo integrali autem ostensum fit, tali aequationi aliter satisfieri non posse, nisi huiusmodi valoribus: $S = C e^{\lambda x}$: hoc euictō, si statuamus $e^{\lambda} = k$, fiet $S = C k^n$, prorsus vti ante assumseramus, ita vt iam nihil amplius super serie *Lambertina* desiderari posse videatur.

Vberior confirmatio Solutionis datae.

§. 34. Si ad solam conditionem inuentam respiciamus, qua esse debet

$$\Phi : (n - \beta) - \Phi : (n - \alpha) = (\alpha - \beta) v \Phi : n,$$

ei vtiq̄ue modo multo generaliori satisfieri potest. Quodsi enim singulae litterae p, q, r, s etc. fuerint radices aequationis huius: $x^{-\beta} - x^{-\alpha} = (\alpha - \beta) v$, manifestum est istum valorem:

$$\Phi : n = A p^n + B q^n + C r^n + D s^n + \text{etc.}$$

eidem conditioni satisfacere. In hac igitur formula certo continebitur valor summae S seriei *Lambertinae*, quae cum sit determinata et a solis quantitatibus α, β, n et v pendeat, quaeritur, quomodo litteras illas indefinitas A, B, C, D etc. determinari oporteat, vt fiat $S = \Phi : n$.

§. 35. Hic autem statim duo casus se offerunt, prouti vel vnica radicum summam S definit, vel omnes plane radices ad eam definiendam concurrunt, quos ergo ambos sollicite perpendi conueniet. Vbi primum obseruo, si omnibus radicibus p, q, r, s etc. simul fuerit vtendum, eas sine dubio pari ratione ingredi debere, cum nulla sit ratio, cur cupiam earum vlla praerogativa tribuere.

bucretur: Forent idcirco coefficientes illi A, B, C, D etc. inter se aequales, ideoque

$$S = A (p^n + q^n + r^n + s^n + \text{etc.});$$

quare cum casu $n = 0$ fieri debeat $S = 1$, si numerus radicum statuatur $= i$, hoc casu fit $S = A i$, ergo $A = \frac{1}{i}$.

§. 36. Praeterea autem nostra series ita est comparata, ut sumto $v = 0$ etiam prodeat eius summa $S = 1$. Iam vero casu $v = 0$ nostra aequatio erit $x^{-\beta} - x^{-\alpha} = 0$, siue $x^{\alpha-\beta} - 1 = 0$, cuius una radix semper est $= 1$, et summa omnium radicum semper est $= 0$, solo casu excepto, quo $\alpha - \beta = 1$. Quod si ergo sumatur $n = 1$, prodiret $S = \frac{1}{i} (p + q + r + s + \text{etc.}) = 0$, cum tamen summa sit $= 1$, ita ut ista hypothesis veritati aduersetur.

§. 37. Idem incommodum etiam multo clarius elucescet, si in genere statuamus $n = 1$, quippe quo casu foret $S = \frac{1}{i} (p + q + r + s + \text{etc.})$, ubi $p + q + r + s + \text{etc.}$ est summa radicum aequationis trinomialis.

$$x^{-\beta} - x^{-\alpha} = (a - \beta) v$$

ideoque aequabitur coefficienti secundi termini, postquam aequatio in ordinem fuerit redacta, qui cum plerumque deficiat, summa seriei etiam nihilo foret aequalis; quod cum veritati contradicat, satis euictum est, non omnes radices aequationis trinomialis ad summam S constituendam concurrere posse.

§. 38. Hoc igitur casu remoto, quo omnes radices aequaliter ingrederentur, relinquatur casus prior, quo summa S per unicam istarum radicum determinatur, quem-

admo-

admodum in solutione assumimus. Evidens autem est istam radicem fore vel maximam vel minimam: hic scilicet idem discrimen usu venit, atque in resolutione omnium aequationum per series recurrentes, qua methodo pariter tantum una aequationum radix vel maxima vel minima inueniri solet, sicque solutio nostra data iam extra omne dubium est collocata. Occasione autem methodi, qua sumus usi, sequens problema adiunxisse non pigebit.

Problema.

Inuenire omnes functiones quantitatis variabilis n , quibus huic conditioni generali satisfiat:

$$\Phi : n = a \Phi : (n + \alpha) + b \Phi : (n + \beta) + c \Phi : (n + \gamma) + \text{etc.}$$

Solutio.

§. 39. Quodsi ratiocinium vti in praecedenti problemate instituamus, facile patebit, isti conditioni satisfieri posse, statuendo $\Phi \cdot n = A k^n$, ita vt A . et k sint quantitates constantes. Facta autem hac substitutione prodibit haec aequatio:

$$A k^n = A a k^{n+\alpha} + A b k^{n+\beta} + A c k^{n+\gamma} + A d k^{n+\delta} + \text{etc.}$$

quae per $A k^n$ diuisa praebet

$$1 = a k^\alpha + b k^\beta + c k^\gamma + d k^\delta \text{ etc.}$$

ita vt k designet quampiam radicem huius aequationis, cuius adeo singulae radices conditioni praescriptae pariter satisfacient. Quin etiam omnes has diuersas solutiones quomodocunque inter se combinare licebit. Ita si p, q, r, s etc. fuerint radices istius aequationis, problemati nostro
gene-

generaliter satisfiet, statuendo

$$\Phi: n = A p^n + B q^n + C r^n + \text{etc.}$$

vbi litterae A, B, C, D etc. penitus arbitrio nostro relinquantur; haecque est solutio generalis problematis illius analytici, quod frequenter insignem vsum afferre poterit.

§. 40. Sed reuertamur ad feriem *Lambertina* atque offendamus, quomodo ex ea innumerabiles aliae series affines deriuari queant.

Problema.

Proposita serie *Lambertina*, quam breuitatis gratia sub hac forma referamus:

$$S = 1 + A v + B v^2 + C v^3 + D v^4 + \text{etc.}$$

cuius nouimus esse summam $= x^n$, fumendo pro x siue maximam siue minimam radicem huius aequationis trinomialiae: $x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta) v x^{\alpha+\beta}$, inde innumerabiles alias series affines formare, quarum summam pariter assignare liceat.

Solutio.

§. 31. Hic igitur litteris A, B, C, D etc. breuitatis gratia sequentes valores tribuimus:

$$A = n; B = \frac{1}{2} n (n + \alpha + \beta); C = \frac{1}{6} n (n + \alpha + 2\beta) (n + 2\alpha + \beta);$$

$$D = \frac{1}{24} n (n + \alpha + 3\beta) (n + 2\alpha + 2\beta) (n + 3\alpha + \beta);$$

$$E = \frac{1}{120} n (n + \alpha + 4\beta) (n + 2\alpha + 3\beta) (n + 3\alpha + 2\beta) (n + 4\alpha + \beta)$$

etc.

etc.

His igitur valoribus notatis duae potissimum viae patent ad alias series inde deriuandas: altera scilicet per differentiationem, altera vero per integrationem institui potest.

§. 42. Cum sit $(\alpha - \beta) v = x^{-\beta} - x^{-\alpha}$ erit

$$(\alpha - \beta) dv = -\beta x^{-\beta-1} dx + \alpha x^{-\alpha-1} dx$$

siue

$$(\alpha - \beta) dv = \frac{dx (\alpha x^\beta - \beta x^\alpha)}{x^{\alpha+\beta+1}};$$

hinc ergo si nostram seriem differentiemus, ac per dv diuidamus, ad sequentem perueniemus summationem:

$$\frac{(\alpha - \beta) n x^{n+\alpha+\beta}}{\alpha x^\beta - \beta x^\alpha} = A + 2 B v + 3 C v v$$

$$+ 4 D v^3 + 5 E v^4 + 6 F v^5 \text{ etc.}$$

§. 43. Potuiffemus etiam seriem propositam per quampiam potestatem ipsius v ante multiplicare, quam differentiatio instituat; veluti multiplicando per v^λ , vt habeamus

$$v^\lambda x^n = v^\lambda + A v^{\lambda+1} + B v^{\lambda+2} + C v^{\lambda+3} + D v^{\lambda+4} + \text{etc.}$$

haec series differentiata ac per dv diuisa praebet

$$\lambda v^{\lambda-1} x^n + n v^\lambda x^{n-1} \cdot \frac{dx}{dv} = \lambda v^{\lambda-1} + (\lambda + 1) A v^\lambda$$

$$+ (\lambda + 2) B v^{\lambda+1} + (\lambda + 3) C v^{\lambda+2}$$

$$+ (\lambda + 4) D v^{\lambda+3} + (\lambda + 5) E v^{\lambda+4} + \text{etc.}$$

quae expressio per $v^{\lambda-1}$ diuisa praebet hanc summationem:

$$\lambda x^n + n v x^{n-1} \frac{dx}{dv} = \lambda + (\lambda + 1) A v$$

$$+ (\lambda + 2) B v^2 + (\lambda + 3) C v^3 + (\lambda + 4) D v^4 + \text{etc.}$$

pro qua modo vidimus esse

$$\frac{n x^{n-1} dx}{dv} = \frac{(\alpha - \beta) n x^{\lambda+\alpha+\beta}}{\alpha x^\beta - \beta x^\alpha},$$

quo

quo valore substituto ista summa euadet

$$\begin{aligned}
 &= \lambda x^n + \frac{n x^{n+\alpha} - n x^{n+\beta}}{\alpha x^\beta - \beta x^\alpha} \\
 &= \frac{x^n}{\alpha x^\beta - \beta x^\alpha} ((\lambda \alpha - n) x^\beta - (\lambda \beta - n) x^\alpha).
 \end{aligned}$$

§. 44. Quodsi iam hanc seriem denuo per v^k multiplicemus, iterumque differentiemus, innumerabiles novas series adipiscemur, quarum summatio itidem est in potestate. Hocque modo continuo ulterius progredi licet, quem autem laborem persequi prorsus foret superfluum.

§. 45. Simili modo per integrationem novas series elicere poterimus. Quodsi enim seriem propositam per

$$dv = \frac{\alpha x^{-\alpha-1} dx}{\alpha - \beta} - \frac{\beta x^{-\beta-1} dx}{\alpha - \beta},$$

multiplicemus et vtrinque integremus, perueniemus ad sequentem summationem:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\alpha x^{n-\alpha}}{(\alpha-\beta)(n-\alpha)} - \frac{\beta x^{n-\beta}}{(\alpha-\beta)(n-\beta)} = v + \frac{1}{2} A v^2 \\
 &\quad + \frac{1}{3} B v^3 + \frac{1}{4} C v^4 + \frac{1}{5} D v^5 + \text{etc.} + \text{const.}
 \end{aligned}$$

ad quam constantem definiendam consideretur casus $v = 0$, quo fit $x = 1$, indeque constans = $\frac{n}{(n-\alpha)(n-\beta)}$.

§. 56. Potuissimus etiam ante integrationem multiplicare per v^λ ; verum hoc modo in calculos nimis operosos incidissimus, vnde nobis sufficiat, fontem aperuisse, ex quo innumerabiles huiusmodi novae series hauriri queant.