1779

Conjectura circa naturam aeris, pro explicandis phaenomenis in atmosphaera observatis

Leonhard Euler

CONIECTVRA
CIRCA NATVRAM AERIS, PRO EXPLICANDIS PHAENOMENIS IN ATMOSPHAERA OBSERVATIS.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Quanquam nobis in intima naturae mysteria penetrare, indeque veras caussas Phaenomenorum agnoscere neutiquam est concessum: tamen euenire potest, vt hypothesis quaedam ficta pluribus phaenomenis explicandis aeque satisfaciat, ac si vera caussa nobis esset perspecta, quemadmodum felicissimo successu omnes fere motus coelestes ex hypothesi attractionis vniuersalis determinari solent, etiamsi haec ipsa hypothesis ex Physica prorsus sit profliganda.

§. 2. Quam ob rem fortasse simili modo quaepiam hypothesis excogitare poterit, quae omnibus Phaenomenis aëris et atmosphaerae explicandis sufficiat. Talem ideam iam ante quinquaginta annos in Tomo II. veterum Commentariorum proposui, quae ad plura aëris phaenomena explicanda satis apta videbatur, etiamsi facile agnouissem, talem aëris structuram reuera admitti non posse. Imprimis

mis huius Phaenomeni explicatio: quod, dum aër vaporibus est inquinatus, eius elasticitas diminuatur, mihi omni attentione digna est visa, cum eius caussa a nemine adhuc dilucide sit exposita. Illo vero tempore Theoria fluidorum nondum satis erat exculta, vt istam ideam penitus euoluere valuissem; quamobrem operae pretium fore existimo, illam aëris structuram, quam finxeram, accuratius examinare, et quaenam Phaenomena inde oriri debeant, maiori curua inquirere.

§. 3. Naturam aëris autem ita animo conceperam, quasi ex innumerabilibus minimis bullulis seu sphaerulis esset compositus, quae singulae cuticula tenuissima aquosa circumdarentur, intra quas propria aëris materia motu rapidissimo in gyrum circumagatur, in cuius vi centrifuga elasticitas aëris produci erat visa. Totum negotium igitur huc redit, vt ista hypothesis accuratius perpendatur, et ad cuiusmodi phaenomena producenda sit accommodata, inquiratur. Nisi enim manifestas contradictiones inuoluat, satis probabile videtur, aëris phaenomena, actu obseruata, non multum discrepare posse.

§. 4. Quod igitur primo ad pelliculas illas aqueas siue vaporosas attinet, earum realitas in aqua spumosa atque bullis saponaceis manifesto deprehenditur, vnde recte concludere poterimus, vapores in aëre adscendentes ita dissipari, vt elementa aërea instar cuticulae inuoluant, quae si per omnia elementa aequaliter dispergatur, atmosphaera nihil de pelluciditate amittet, sin autem intra sphaerulas aëreas confuse hospitentur, refractio radiorum lucis eorumque transitus non mediocriter perturbabitur, vnde in aëre inferiore nebulae, in superiore autem nubes oriri videntur. Praeterea, quo plures vapores aëri fuerint admixti, cuticulae illae, sphaerulas aëreas ambientes, euadent densiores, quoad scilicet constitutio harum sphaerularum sufferre valet.

§. 5. Deinde etiam non desunt rationes, quae suadent, propriam aëris materiam in his sphaerulis motu rapidissimo circumagi, cum aliunde caussa elasticitatis repeti nequeat. Praeterea cum iam satis euictum sit, calorem in certa agitatione aetheris consistere, hinc vtique materia illa aëris in sphaerulis motum quendam recipere debet, qui cum in tali angusto spatio sit inclusus, non aliter nisi per motum vorticosum continuari potest, id quod eo magis fit probabile, quod aucto calore, indeque propterea motu isto verticoso, elasticitas aëris quoque augeatur; vnde manifestum est, motum gyratorium in sphaerulis aëreis cum caussa caloris arctissime esse connexum.

§. 6. Deinde vero etiam assumsi, singula aëris elementa in memoratis sphaerulis per circulos maximos circumagi, vt in iis vndequaque aequalis vis centrifuga, a centro cuiusque sphaerulae recedens, oriatur. haecque hypothesis nunc quidem cum principiis mechanicis neutiquam consistere posse videtur, cum demonstratum sit, nullum alium motum circa punctum quodpiam fixum in corporibus dari posse, nisi qui peragatur circa axem quempiam fixum. A tali autem motu alia vis centrifuga generari non potest, nisi quae ab axe gyrationis recedat, ideoque in eadem sphaerula maxime esset irregularis, cum certum sit, elasticitatem aëris in omnes plagas aequaliter tendere.

§. 7.

§. 7. Obiectio autem hinc ab illo motu oriunda tantum locum habet in corporibus solidis: in fluidis enim res longe aliter se habere potest; atque adeo clare hic demonstrabo, motum illum intestinum in singulis sphaerulis reuera ita comparatum esse debere, ac si singula elementa in circulis maximis circa centrum reuoluerentur.

§. 8. Primo autem, cum materia aërea sit homogenea, omnes eius particulas inter se aequales concipere licet, quibus adeo initio celeritates aequales sint impressae, quibus ergo singulae, si essent solitariae, in plano vniformiter in directum ferrentur, in superficie autem sphaerica in circulis maximis essent progressurae; vnde si cuiusque celeritas fuerit $= c$ et r radius sphaerae, cuiusque vis centrifuga foret $= \frac{cc}{2gr}$, qua scilicet a centro sphaerae recedere conaretur; vbi g exprimit altitudinem lapsus grauium vno minuto secundo, siquidem celeritas per spatium vno minuto secundo percursum definiatur.

§. 9. Consideremus iam duas huiusmodi particulas A et B, secundum directiones A C et B C ita motas, vt in C conuenirent et collisionem paterentur, quippe sine qua corpusculum A descripturum esset spatium $Ca = c$, alterum vero B C secundum directionem Cb celeritate eadem c. Iam vt videamus quamnam mutationem collisio sit productura, toti systemati, mente saltem, imprimamus celeritatem $= c$, secundum directionem bC, quo pacto corpusculum B in quiete sistetur in puncto C, corpusculum vero A, sumto $CB = Cb = c$, motum habebit secundum diagonalem C D parallelogrammi $CBDa$, qua retro producta in d, collisio perinde peragetur, ac si Tab. IV. Fig. 1.

 cor-

corpusculum A motu d C in alterum corpusculum B, in C quiescens, impingeret. Constat autem, tum corpusculum A in C esse quieturum, alterum vero B celeritatem esse acquisiturum C D. Iam restituatur motus mente impressus celeritate C b. Hoc modo corpus prius A nunc motum acquiret C b, alterius vero B motus componetur ex motu C D et C b, vnde si compleatur parallelogrammam C D a b, istud corpus iam motum habebit C a. Vnde patet, motus vtriusque corporis per collisionem inter se permutari, ita vt vtriusque motus ab altero continuetur. Hinc cum inter bina corpuscula nullum discrimen intercedat, totus motus se habebit ac si vtrumque corpusculum motum insitum sine vlla mutatione prosequeretur, vnde etiam vtriusque vis centrifuga nullam mutationem ob collisionem subibit.

§. 10. Quod si iam tales collisiones in infinitum multiplicentur, omnes motus nihilominus in circulis sphaerae maximis, at vero successiue ab aliis aliisque corpusculis, peragentur; quamobrem omnes vires centrifugae directe a centro recedent, et quidem eadem quantitate $\frac{cc}{2gr}$.

§. 11. In motu ergo vorticoso, quem materiae aëris propriae, in singulis sphaerulis memoratis, tribuimus, tuto assumere possumus, omnes plane motus in circulis maximis peragi, atque singulas particulas pari vi centrifuga a centro sphaerulae recedere conari; quamobrem omnes obiectiones, quae olim contra vortices Cartesianos sunt motae, omnem vim amittunt. Neque tamen idcirco arbitror, illos Cartesii vortices admitti posse; at vero illi vortices, per quos Vir Celeb. *Daniel Bernoulli* olim attractionem vni-

vniuerſalem in mundo explicare eſt annixus, hinc ſummam vim acquirunt, ita vt omnes obiectiones contra factae quaſi ſponte euaneſcant.

§. 12. Contemplemur nunc ſphaerulam quamcunque, naturam aëris conſtituentem, cuius extrema cruſta aqua, ſeu materia vaporoſa conſtet, intra quam materia aëris propria motu ante deſcripto in gyrum agatur. Sumto igitur centro ſphaerulae in O, ſit $OR = r$ radius totius ſphaerulae, ſeu extimae eius ſuperficiei, ſitque RS craſſities cruſtae aqueae, ponaturque $OS = s$, ita vt craſſities cruſtae aqueae ſit $RS = r - s$; tum vero ſit ST craſſities cruſtae aëreae gyrantis, quae ergo, poſito $OT = t$, erit $= s - t$. Intimum autem huius ſphaerulae ſpatium, a centro O vsque ad T, repletum ſit aethere puro, grauitate deſtituto, a cuius ſcilicet agitatione materia aëris propria perpetuo ad motum cieatur, modo magis modo minus, pro gradu caloris ſeu frigoris. Tab. IV. Fig. 2.

§. 13. Hinc ergo, denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$, erit volumen totius ſphaerulae $= \frac{4}{3}\pi r^3$; vnde patet, volumen cruſtae aqueae fore $\frac{4}{3}\pi(r^3 - s^3)$, et volumen cruſtae aëreae $\frac{4}{3}\pi(s^3 - t^3)$; volumen denique aethereum erit $\frac{4}{3}\pi t^3$. Quod ſi iam denſitatem aquae vnitate deſignemus, erit maſſa cruſtae aqueae $\frac{4}{3}\pi(r^3 - s^3)$. At ſi denſitatem materiae aëris propriae vocemus δ, erit eius maſſa $\frac{4}{3}\pi\delta(s^3 - t^3)$. Quare cum ipſe aether denſitate carere ſit cenſendus, erit tota maſſa in ſphaerula contenta $\frac{4}{3}\pi(r^3 - s^3 + \delta s^3 - \delta t^3)$, quae ſcilicet ſimul exprimet pondus totius ſphaerulae, cuius radius

dius $= r$; vnde manifeſtum eſt, aetherem in medio contentum recte negligi poſſe.

§. 14. Hic autem ſtatim liquet, denſitatem δ non ex ſtatu aëris ordinarii, qui iam ob elaſticitatem plurimum eſt expanſus, aeſtimari debere. Cum enim aër, in ſpatio S T incluſus, omni elaſticitate deſtituatur, quandoquidem demum eius agitatione elaſticitas aëris naturalis producitur, iſte aër in noſtra ſphaerula contentus in eo ſtatu reperiri cenſendus eſt, ac ſi ad ſummum denſitatis gradum iam eſſet compreſſus. Phaenomena autem conſulentes deprehendimus, aërem naturalem in ſpatium quaſi octingenties minus comprimi poſſe, qui numerus reſpondet rationi inter denſitatem aëris et aquae; neque ergo errabimus, ſi denſitatem aëris, ad ſummum compreſſionis gradum reductum, denſitati aquae aequalem ſtatuamus, ita vt ſit $\delta = 1$. Probabile autem admodum videtur, aërem ad talem ſtatum reductum, ſimulque omni elaſticitate carentem, vix a natura aquae eſſe diſcrepaturum. Hinc igitur, poſito $\delta = 1$, maſſa atque etiam pondus noſtrae ſphaerulae erit $\frac{4}{3}\pi(r^3 - t^3)$ ſiue aequabitur ponderi maſſae aqueae idem volumen habentis.

§. 15. Inueſtigemus nunc totam vim centrifugam, quae ex motu gyratorio cruſtae aëreae S T oriri debet; quem in finem conſideremus punctum quoddam medium X, quem in finem conſideremus punctum quoddam medium X, poſita eius diſtantia a centro $OX = x$, eiusque celeritate gyratoria $= c$, erit vis centrifuga in puncto $X = \frac{cc}{2gx}$. Hac ſcilicet vi elementum materiae in X conatur a centro O recedere, vnde in iſta cruſta aërea orietur ſtatus preſſionis a termino T ad S continuo creſcens.

§. 16.

§. 16. Constat autem, in fluidis statum pressionis commodissime exprimi posse per certam altitudinem, quam hic vocemus $= p$, qua designatur, pressionem fluidi aequalem esse ponderi cylindri, ex eadem materia constantis, et cuius altitudo sit $= p$. Pro nostro ergo casu designet p altitudinem columnae aqueae, cuius pondus aequetur pressioni in puncto X, dum scilicet in eandem basin premit. Hinc ergo, sumto elemento $Xx = dx$, ita vt pressio in x sit $p + dp$, euidens est, incrementum pressionis dp aequari debere vi centrifugae, qua elementum Xx a centro repellitur; vnde patet fore $dp = \frac{cc}{2gx} dx$, sicque integrando nanciscimur $p = \frac{cc}{2g} l x$, quod integrale ita determinari debet, vt sumto $x = t$ euanescat, ita vt pro puncto X pressio sit $p = \frac{cc}{2g} l \frac{x}{t}$. Quare promoto puncto X vsque ad S, pressio hoc loco erit $p = \frac{cc}{2g} l \frac{s}{t}$. Tanta scilicet pressione ista crusta aërea, simulque tota prorsus sphaerula, conabitur se expandere, ac reuera se expanderet, nisi vndequaque paribusque viribus comprimeretur.

§. 17. Quantumuis autem talis bullula siue expandatur siue comprimatur, in ea semper eadem quantitas materiae manet inclusa, quia neque materiae contentae exitus, neque nouae ingressus conceditur. Ponamus ergo quantitatem materiae inclusae aequari globulo aqueo, cuius radius $= a$, quandoquidem omnem calculum ad densitatem aquae reducimus. Hinc ergo quantitas materiae in hac bullula contentae erit $\frac{4}{3} \pi a^3$, quae cum partim ex crusta aquea partim ex aërea eiusdem cum aqua densitatis constet, ponamus massam aqueam esse $\frac{4}{3} \pi \lambda a^3$, ita vt quantitas materiae aëreae propriae sit $\frac{4}{3} \pi (1 - \lambda) a^3$: quantitas ergo aquae per aërem disperſae erit ad quantitatem aëris propriam vt $\lambda : 1 - \lambda$.

§. 18. Supra autem inuenimus, volumen cruſtae aqueae eſſe $\frac{4}{3}\pi(r^3 - s^3)$, vnde erit $r^3 - s^3 = \lambda a^3$. Deinde cum volumen materiae aëreae inuentum ſit $\frac{4}{3}\pi^3(s^3 - t^3)$, erit $s^3 - t^3 = (1 - \lambda)a^3$. Hinc igitur tam s^3 quam t^3 per a^3 et r^3 definire poterimus: erit ſcilicet $s^3 = r^3 - \lambda a^3$ et $t^3 = r^3 - a^3$. Quare cum altitudinem preſſioni debitam inuenerimus

$$p = \frac{cc}{2g} l \frac{s}{t} = \frac{cc}{6g} l \frac{s^3}{t^3}, \text{ erit nunc } p = \frac{cc}{6g} l \frac{r^3 - \lambda a^3}{r^3 - a^3}.$$

§. 19. Cum porro denſitas reperiatur, ſi maſſa per volumen diuidatur, quia noſtro caſu maſſa eſt $\frac{4}{3}\pi a^3$, volumen autem $\frac{4}{3}\pi r^3$, erit denſitas hoc loco $\frac{a^3}{r^3}$. Quod ſi ergo denſitatem hanc deſignemus littera q, erit $q = \frac{a^3}{r^3}$, ideoque $r^3 = \frac{a^3}{q}$, qui valor in noſtra formula ſubſtitutus praebet $p = \frac{cc}{6g} l \frac{1 - \lambda q}{1 - q}$; vbi, vt notauimus, q exprimit denſitatem aëris, dum aquae denſitas vnitate deſignatur, ideoque q ſemper erit fractio quam minima. In ſuperficie ſcilicet Terrae erit quaſi $q = \frac{1}{700}$, vel $q = \frac{1}{800}$.

§. 20. Cum igitur q ſit fractio tam exigua, erit ſatis exacte

$$l(1 - \lambda q) = -\lambda q - \tfrac{1}{2}\lambda^2 q^2 - \tfrac{1}{3}\lambda^3 q^3 \text{ et}$$

$$l(1 - q) = -q - \tfrac{1}{2}q^2 - \tfrac{1}{3}q^3,$$

qui poſterior logarithmus a priore ſubtractus relinquit

$$l\frac{1 - \lambda q}{1 - q} = (1 - \lambda)q + \tfrac{1}{2}(1 - \lambda^2)q^2 + \tfrac{1}{3}(1 - \lambda^3)q^3,$$

quocirca habebimus pro preſſione p hanc formulam:

$$p = \frac{cc}{6g}((1 - \lambda)q + \tfrac{1}{2}(1 - \lambda^2)q^2 + \tfrac{1}{3}(1 - \lambda^3)q^3)$$

cuius

cuius feriei plerumque sufficiet primum terminum, vel ad summum bina priora accepisse.

§. 21. Iam igitur insignem relationem inter densitatem aëris q et altitudinem pressioni debitam p sumus adepti, cum sit

$$p = \frac{cc}{6g}\left((1-\lambda)\, q + \tfrac{1}{2}(1-\lambda\lambda)\, qq + \tfrac{1}{3}(1-\lambda^3)\, q^3\right),$$

vbi tam litterae p et q quam λ determinatos sortiuntur valores. Erit scilicet p altitudo Barometri aquei, pressionem Atmosphaerae aequilibrantem, cuius igitur pars circiter decima quarta dabit altitudinem Barometri mercurialis; tum vero erit q ad 1 vt densitas aëris ad densitatem aequae. Denique λ exprimit portionem vaporum aqueorum per Atmosphaeram dispersorum. His obseruatis solus primus terminus seriei pro p inuentae, $\frac{cc}{6g}(1-\lambda)q$, insigne phaenomenon iam nobis egregie explicat. Inde enim patet, quo plures vapores cum aëre sint permixti, quorum quantitas est vt λ, pressionem p esse debere tanto minorem, pro eadem scilicet aëris densitate q, atque haec explicatio, quam iam olim loco supra citato inueneram, notatu maxime digna est visa.

§. 22. Neque vero solus primus seriei terminus istam elasticitatis aëris diminutionem declarat, sed etiam omnes sequentes termini minores sunt quam si esset $\lambda = 0$, nullique vapores in aëre versarentur. Ceterum hic quoque notari oportet, etiam litteram c insignem variationem subire posse, pro rapiditate motus gyratorii in nostris sphaerulis vel bullulis, quae cum gradui caloris proportio-

 nalis

nalis esse videatur, aucto vel diminuto calore etiam quantitas cc vel increscet vel diminuetur.

§. 23. Quin etiam hinc ipsa celeritas c, qua materia aërea in bullulis gyratur, absolute determinari potest, pro data scilicet altitudine p et densitate q cum humiditate λ. Sumto enim primo tantum seriei termino, qui ad hoc institutum prorsus sufficit, erit $cc = \frac{6g}{1-\lambda} \cdot \frac{p}{q}$, vnde patet, hanc celeritatem directe proportionalem esse altitudini Barometri p, reciproce vero densitati aëris q, tum vero, auctam ob humiditatem λ, celeritatem c etiam augeri. Constat autem in pedibus Rhenanis esse $6g = 93\frac{3}{4}$. Istius igitur formulae radix quadrata dabit celeritatem gyrationis in paribus pedibus expressam: Indicabit enim numerum pedum, qui hac celeritate vno minuto secundo percurrerentur.

§. 24. Cum calor a celeritate procul dubio pendeat, indagemus istam celeritatem tam pro maximo calore, qui in aëre aperto obseruari solet, et qui in Thermometro *Delisliano* respondet quasi centum gradibus, quam pro summo frigore, quod respondet 200 gradibus in eodem Thermometro. Pro priore ergo casu, quia aër est rarissimus, sumamus $q = \frac{1}{1000}$, simulque ipsi p summam altitudinem tribuamus, quae est quasi 34 pedum in Barometro aqueo. Ipsam humiditatem vero hic penitus negligamus, vt sit $\lambda = 0$. Ex his iam valoribus colligitur

$$cc = 93,75 \times 34 \times 1000 = 3187500,$$

ideoque ipsa celeritas $c = 1790$ ped. quae ergo respondet 100 gradibus Thermometri *Delisliani*.

§. 25. Simili modo pro summo frigore 200 gradibus respondente, sumamus densitatem $q = \frac{1}{700}$, altitudinem vero Barometri etiam minimam accipiamus, scilicet $p = 31$ pedum, hincque colligitur

$$cc = 93,75 \times 31 \times 700 = 2034375,$$

ideoque $c = 1330$, quae ergo celeritas ducentis gradibus Thermometri *Delisliani* respondet, ita vt differentia inter has duas celeritates sit 360 pedum. Hinc intelligitur, si plura huiusmodi experimenta instituantur, haud difficile fore pro singulis gradibus huius Thermometri respondentes celeritates assignare. Quo pacto istud Thermometrum ad multo maiorem perfectionis gradum euehetur.

§. 26. Eodem modo etiam reliqua instrumenta, quibus aëris indoles explorare solet, beneficio nostrae formulae magis perfici poterunt. Quod quidem ad Barometrum attinet, id vix vlla emendatione indiget, si modo pro quouis caloris gradu ratio densitatis mercurii habeatur; quo enim mercurius minorem habuerit densitatem, quod fit in magno calore, tum altitudo barometrica secundum eandem rationem imminui debet, vt ad certam densitatem fixam reuocetur. Summo autem frigore, quo Mercurius in spatium aliquanto minus contrahitur, ideoque eius densitas augetur, ob hanc rationem altitudo Barometri obseruata aliquantillum augeri debebit.

§. 27. Praecipuum autem instrumentum, quod ad Theoriam nostram explorandam requiritur, est Manometrum, nunc quidem fere prorsus obsoletum, quo densitas aëris indicatur, et cuius descriptio exstat in *Wolfii*

Elementis Matheseos Tomo II, vt et in *Mémoires de l'Académie Royale de Paris* 1705. Pro uſu autem noſtro optandum eſſet, vt gradibus arbitrariis in tali inſtrumento ſignatis adſcriberentur numeri, indicantes, quoties denſitas aëris minor ſit quam denſitas aquae, quam tanquam fixam ſpectare poſſumus, quippe cuius exiguae variationis, a maiore vel minore calore oriundae, ratio facile haberi poterit. Pluribus autem experimentis erit opus, antequam hoc inſtrumentum ad ſummum perfectionis gradum perducatur.

§. 28. Supereſt autem adhuc inſtrumentum, humiditati aëris dimetiendae aptum, quod Hygrometrum appellare ſolet. Plura huiusmodi inſtrumenta paſſim exſtant deſcripta; verum valde dubitandum videtur, num veram aquae quantitatem, per aërem diſperſam, declarent. Interim tamen plurimis etiam nouis experimentis opus erit, haec inſtrumenta ita inſtruere, vt quouis tempore verum valorem noſtrae litterae λ, hoc eſt eam fractionem, quae indicet, quotam totius voluminis partem aqua ſeu humiditas in aëre occupet, doceat, a quo perfectionis gradu etiamnunc plurimum ſumus remoti.

§. 29. Cum igitur in Thermometro *Delisliano* gradui 200, quo inſigne frigus indicatur, reſpondeat celeritas 1430 pedum in minuto ſecundo, quia congelatio Mercurii adhuc maiorem gradum frigoris poſtulat, ei circiter reſpondebit celeritas 1200 ped. ita vt, niſi celeritas iſta fuerit maior, Mercurius fluiditatem penitus amittat. Deinde cum gradui 100 reſpondeat celeritas 1790 pedum, quia terminus congelationis in gradum 150 cadit, cui

cui ergo respondebit celeritas 1610 ped., celeritate maiore opus erit, ad aquam in statu fluiditatis conseruandam.

§. 30. Quia porro gradus ebullitionis aquae in hoc Thermometro est o, ei propemodum conueniet celeritas 2150 ped. vbi ergo aqua ebullire incipiet. Et quia in nostra formula altitudo Barometri potissimum ingreditur, hinc intelligere licet, cur, aucta aëris elasticitate, maior gradus ad ebullitionem aquae requiratur, et cur, minuta elasticitate, aqua etiam in minore gradu caloris ebullire queat, quemadmodum experimentis est comprobatum, cuius phaenomeni ergo caussa in nostra formula sine dubio erit quaerenda.

§. 31. Neque vero celeritas, ad quemuis caloris gradum aëri inducendum requisita, tantum ad aërem spectare est censenda, cuius scilicet minimae particulae tanta celeritate commoueri debent, sed etiam in omnibus plane corporibus perinde locum habere videtur. Omnes quoque naturae scrutatores in hoc conueniunt, quod caussa caloris in motu quodam perniciss imo minimarum particularum consistat. Quae ergo sententia non solum nostrae Theoriae maxime est conformis, sed etiam ipsam celeritatem, cuilibet gradui caloris conuenientem, assignare valemus. Quanquam autem haec celeritas maxime enormis videatur, tamen perpendendum est, in natura dari celeritates adhuc incomparabiliter maiores, cuiusmodi est celeritas radiorum lucis, in quibus cum caussa omnis caloris sit quaerenda, mirum non est, hinc tam insignem celeritatis gradum generari posse.

§. 32.

§. 32. Sed reuertamur ad noſtram formulam ſupra inuentam et ad ſolum aërem proprie accommodatam, quae haec quatuor elementa: 1°) altitudinem preſſioni debitam p; 2°) denſitatem aëris q; 3°) gradum caloris, formula $\frac{cc}{6g}$ contentum et 4°) gradum humiditatis λ complectitur. Ex datis horum elementorum ternis quibusque quartum aſſignari poteſt; ita, ſi dentur denſitas aëris q, gradus caloris $\frac{cc}{6g}$, cuius loco br. gr. ſcribamus b et gradus humiditatis λ, hinc altitudo, preſſioni debita, p in genere ita exprimitur, vt ſit $p = b\, l\, \frac{1-\lambda q}{1-q}$; quam pro faciliori calculo in hanc ſeriem reſoluimus:

$$p = b\left((1-\lambda)\, q + \tfrac{1}{2}(1-\lambda\lambda)\, qq + \tfrac{1}{3}(1-\lambda^3)\, q^3 + \text{etc.}\right)$$

cuius applicatio iam ſatis eſt expoſita.

§. 33. Ponamus nunc dari primo altitudinem preſſioni debitam p, ſecundo denſitatem aëris q, et tertio humiditatem λ, hinc gradus caloris $b = \frac{cc}{6g}$ ita definitur, vt ſit $b = \frac{p}{l\,\frac{1-\lambda q}{1-q}}$, hincque, logarithmis per ſeriem expreſſis, erit

$$b = p : \left((1-\lambda)\, q + \tfrac{1}{2}(1-\lambda\lambda)\, qq + \tfrac{1}{3}(1-\lambda^3)\, q^3 + \text{etc.}\right)$$

cuius ſeriei plerumque ſufficit ſolum primum terminum cum ſecundo ſumſiſſe.

§. 34. Sin autem detur altitudo preſſioni debita p, menſura caloris b, ac tertio humiditas λ, inde ad denſitatem q inueniendam recurrendum eſt ad exponentialia, cum ſit $e^{\frac{p}{b}} = \frac{1-\lambda q}{1-q}$, vnde poſito br. gr. $e^{\frac{p}{b}} = k$, erit $q = \frac{k-1}{k-\lambda}$,

et

et quia b plerumque plurimum excedit p, cum per seriem sit

$$k = 1 + \frac{p}{b} + \frac{pp}{2bb} + \frac{p^3}{6b^3} + \text{etc.}$$

erit

$$q = \left(\frac{p}{b} + \frac{pp}{2bb} + \frac{p^3}{6b^3} + \text{etc.}\right) : \left(1 - \lambda + \frac{p}{b} + \frac{pp}{2bb} + \frac{p^3}{6b^3}\,\text{etc.}\right)$$

§. 35. Denique si detur altitudo pressioni debita p, mensura caloris b, et densitas q, per formulam exponentialem $e^{\frac{p}{b}} = k = \frac{1-\lambda q}{1-q}$ humiditas λ ita determinetur, vt sit $\lambda = \frac{1-k(1-q)}{q}$, quae expressio hoc laborat defectu, vt minimus error, in elementis datis p, k et q commissus, enormes errores in valore λ producat.

§. 36. Imprimis autem nostra formula commodissime adhiberi potest ad Problema aërometricum maximi momenti resoluendum, quo quaeri solet, quanta vi opus sit ad aërem in spatium quantumuis minus coarctandum, cuius ergo solutionem hic subiungimus.

Problema.

Inuestigare, quanta vis requiratur, ad datum aëris volumen in spatium quantumuis minus comprimendum.

Solutio.

§. 37. Ponamus aërem comprimendum in tubo cylindrico contineri, cuius amplitudo sit $= ff$ et compressionem per emboli intrusionem produci; tum si altitudo, pressioni debita, fuerit $= p$, vis requisita aequabitur ponderi columne aqueae, cuius basis $= ff$ et altitudo $= p$, ita vt ista vis per massam aqueam expressa sit $= ffp$. Ponamus in statu naturali, vnde compressio inchoat, altitudinem pressioni debitam esse $= a$, densitatem vero aëris naturalem $= b$; at vero mensurae caloris cum humiditate, quoniam durante compressione nullam mutationem patiuntur, sint vt ante b et λ, ita vt sit $a = b\,l\,\frac{1-\lambda b}{1-b}$, siue proxime $a = (1-\lambda)\,b\,b$.

§. 38. Ponamus nunc intrusione emboli istud aëris volumen iam in spatium n vicibus minus esse compressum, ita vt iam eius densitas sit $q = n\,b$, vnde quaeri debet altitudo pressioni debita p, huic densitati respondens, que ergo, loco q scribendo $n\,b$, erit $b\,l\,\frac{1-\lambda n b}{1-n b}$; vnde nisi compressio iam satis sit notabilis, satis exacte erit $p = b\,(1-\lambda)\,n\,b$. Hinc patet, pressionem p exacte proportionalem esse numero n, siue pressionem semper densitati esse proportionalem, nisi compressio iam sit vehementer magna.

§. 39. In maioribus autem compressionibus adhiberi etiam conueniet secundum seriei terminum, ita vt sit

$$p = b\,((1-\lambda)\,n\,b + \tfrac{1}{2}(1-\lambda\lambda)\,n\,n\,b\,b),$$

cum initio fuisset $p = a$, quae ergo altitudo quanto iam sit maior, definiri debet ex hac formula:

$$\frac{p}{a} = n + \tfrac{1}{2}(1+\lambda)\,n\,n\,b;$$

vnde patet, vim comprimentem plusquam n vicibus esse maiorem, prorsus vti per experimenta est obseruatum.

§. 40.

§. 40. Sin autem compreſſio longe vlterius continuari concipiatur, recurrendum erit ad formulum logarithmicam $p = b\, l \frac{1 - \lambda n b}{1 - n b}$, quae, comparata cum preſſione initiali $a = b\, l \frac{1 - \lambda b}{1 - b}$, dabit

$$\frac{p}{a} = l \frac{1 - \lambda n b}{1 - n b} : l \frac{1 - \lambda b}{1 - b}.$$

Quia autem poſterior logarithmus eſt ſatis exacte $(1 - \lambda) b$, erit

$$\frac{p}{a} = \frac{1}{(1 - \lambda) b} \cdot l \frac{1 - \lambda n b}{1 - n b};$$

vnde patet, caſu $n b = 1$ ſiue $n = \frac{1}{b}$, vim requiſitam fieri infinitam.

§. 41. Quo haec clarius perſpiciantur, ponamus pro ſtatu initiali eſſe $b = \frac{1}{800}$, ſiue denſitatem aëris ad aquae denſitatem eſſe vt 1 ad 800, humiditatem autem λ penitus ſeponamus, eritque ergo a preſſio Atmoſpherae naturalis, et quaeramus nunc, quotuplo maior preſſio requiratur ad aëris volumen in ſpatium n vicibus minus coarctandum; tum igitur formula ante data nobis praebebit, $\frac{p}{a} = 800\, l \frac{800}{800 - n}$, vbi logarithmis vtendum erit hyperbolicis. Ita ſi aër in ſpatium quadringenties minus comprimatur, hoc eſt, ſi $n = 400$, fiet $\frac{p}{a} = 554$; ſcilicet vis, quae tantum eſſet quadringenties maior, non ſufficit, ſed requiritur vis 554 vicibus maior. Quodſi autem condenſatio in ſpatium 700es minus poſtulatur, vi opus erit 1663 vicibus maiore.

§. 42. Operae igitur pretium videtur, pro hac hypotheſi $b = \frac{1}{800}$ et $\lambda = 0$ tabulam conſtruere, indicantem, quotuplo maior fiat vis comprimens requiſita ad aërem in ſpatium n cuplo minus redigendum. Sequens tabula igitur oſtendet pro ſingulis numeris n valorem formulae

$$\frac{p}{a} = 800\, l \frac{800}{800 - n},$$

vbi pro condenſationibus minoribus erit

$$\frac{p}{a} = n + \frac{1}{2} \frac{nn}{800} + \frac{1}{3} \frac{n^3}{800^2},$$

ita vt tantum logarithmis hyperbolicis indigeamus, quando numerus n vltra 100 aſſurgit.

n	$p : a$	n	$p : a$
1	1, 0006	125	135, 92
2	2, 0025	150	166, 11
3	3, 0056	175	197, 49
4	4, 0100	200	230, 14
5	5, 0157	225	264, 19
6	6, 0226	250	299, 75
7	7, 0308	275	336, 97
8	8, 0403	300	376, 00
9	9, 0510	350	460, 28
10	10, 063	400	554, 48
20	20, 254	450	661, 34
30	30, 577	500	784, 64
40	41, 035	550	930, 52
50	51, 630	600	1109, 0
60	62, 369	650	1339, 2
70	73, 254	700	1663, 5
80	84, 288	750	2218, 1
90	95, 477	800	infinit.
100	106, 82		

§. 43.

§. 43. Manifeſtum eſt vires, ad aërem comprimendum requiſitas, in hac tabula exhibitas, iam in ſe complecti preſſionem Atmoſphaerae; vnde ſi tantum vires actu adhibendae quaerantur, ſubtrahi debet inde illa preſſio, ſeu, quod eodem redit, ab omnibus his viribus ſubtrahi debet vis caſui $n = 1$ reſpondens. Praeterea ob humiditatem, quam hic neglex imus, omnes vires hic deſignatae aliquod incrementum nanciſcuntur; ſcilicet, ſi pro compreſſione n cupla vis fuerit $= n + \pi$, ob humiditatem λ iſta vis erit $n + (1 + \lambda)\pi$.

De variatione ſtatus aëris
per vniuerſam Atmoſphaeram.

§. 44. Quae hactenus ſunt tradita ad aërem in certo loco exiſtentem reſtringuntur. Nunc autem videamus, qua lege ſtatus aëris per Atmoſphaeram ſiue aſcendendo ſiue deſcendendo immutetur. Hic igitur in certo Terrae loco A ſtatum aëris tanquam cognitum aſſumemus, hincque verticaliter aſcendendo, inueſtigabimus, quomodo pro quauis altitudine A $Z = z$, ſtatus aëris ſe ſit habiturus; vbi evidens eſt, ſi ad interiora Terrae deſcendere velimus, altitudinem z tantum negatiuam eſſe accipiendam. Hic igitur ante omnia pro loco fixo A ſtatum aëris definiri oportet, ſiquidem pro quauis altitudine $AZ = z$ elementa calculi cum hoc loco comparari conueniat. Tab. IV. Fig. 3.

§. 45. Sit igitur primo altitudo Barometri aquei pro loco $A = a$, et pro loco $Z = p$; ſecundo denſitas aëris in A ſit $= b$, in Z vero $= q$; tertio ſit humiditas in $A = \lambda$, in Z vero $= \Phi$; quarto denique ponatur celeritas motus gyratorii in subsidium vocati pro loco A $= c$, pro Z vero $= u$. Tum vero pro loco A sit breuitatis gratia $\frac{cc}{6g} = b$, pro loco Z autem sit $\frac{uu}{6g} = v$; vbi notetur, quantitates b et v longitudinem plurium millium pedum designare, propterea quod celeritas c plerumque inter terminos 1400 et 1800 pedum continetur. Quia igitur valores litterae c iam ad gradus Thermometri relatos assumimus, pro praecipuis valoribus celeritatis c valores quantitatis b in sequenti tabula adiungamus, incipiendo a $c = 1200$ vsque ad $c = 2000$ per 50 ascendendo:

c	b	c	b
1200	15360	1650	29040
1250	16667	1700	30827
1300	18026	1750	32667
1350	19440	1800	34560
1400	20907	1850	36507
1450	22427	1900	38507
1500	24000	1950	40560
1550	25627	2000	42667
1600	27307		

§. 45. Quia densitas aëris ascendendo decrescit, euidens est, solum primum terminum seriei supra datae abunde sufficere; vnde statuere licebit $p = (1 - \Phi) v q$, quae formula etiam tuto adhiberi poterit, si in viscera terrae descendamus. Hinc igitur densitas in loco Z erit $q = \frac{p}{(1 - \Phi) v}$, vnde si per elementum $Zz = dz$ vlterius ascendamus, pressio in z erit $p + dp$, quae autem minor erit

erit quam in Z ponduſculo aëris in interuallo Zz contenti, quod reperiemus, ſi elementum dz per denſitatem q multiplicemus, vnde fit $dp = - q\,dz$. Ergo, loco q ſubſtituto valore modo dato erit $dp = - \frac{p\,dz}{(1-\Phi)v}$, hincque $dz = - \frac{(1-\Phi)v\,dp}{p}$, quae aequatio, quia tam v quam Φ tanquam functiones altitudinis z ſunt ſpectandae, ita repraeſentari debet: $\frac{dz}{(1-\Phi)v} = - \frac{dp}{p}$, cuius integrale eſt

$$\int \frac{dz}{(1-\Phi)v} = C - l\,p,$$

quam conſtantem C ita definiri oportet, vt caſu $z = 0$, quo ſimul integrale $\int \frac{dz}{(1-\Phi)v}$ euaneſcere debet, euadat $p = a$, vnde erit $C = l\,a$; ideoque $\int \frac{dz}{(1-\Phi)v} = l\frac{a}{p}$.

§. 46. Siniſtrum igitur membrum huius aequationis erit certa functio ipſius z, pendens a ratione, ſecundum quam tam calor quam humiditas aſcendendo ſiue creſcit ſiue decreſcit; membrum vero dextrum tantum altitudinem barometricam tam in A quam in Z inuoluit, cuius logarithmus hyperbolicus ſumi debet. Atque hic perinde eſt, ſiue altitudo Barometri aquei ſiue mercurialis in calculum introducatur, quia fractio $\frac{a}{p}$ inde non mutatur. Cum igitur ſit $l\frac{a}{p} = l\,a - l\,p$, valores horum logarithmorum hyperbolicorum pro ſingulis altitudinibus Barometri mercurialis, quae per digitos indicari ſolent, in ſequenti tabula ab altitudine 36 pollicum, ad quam certe infra Terram deſcendendo nunquam peruenietur, diminuendo per ſemipollices, exhibeamus:

Alt.

Alt. Bar.	Logar. hyperb.	Alt. Bar.	Logar. hyperb.	Alt. Bar.	Logar. hyperb.
36,0	3,583519	26,0	3,258097	16,0	2,772589
35,5	3,569533	25,5	3,238679	15,5	2,740840
35,0	3,555348	25,0	3,218876	15,0	2,708050
34,5	3,540960	24,5	3,198673	14,5	2,674149
34,0	3,526361	24,0	3,178054	14,0	2,639057
33,5	3,511545	23,5	3,157001	13,5	2,602690
33,0	3,496508	23,0	3,135494	13,0	2,564949
32,5	3,481240	22,5	3,113515	12,5	2,525729
32,0	3,465736	22,0	3,091042	12,0	2,484907
31,5	3,449988	21,5	3,068053	11,5	2,442347
31,0	3,433987	21,0	3,044522	11,0	2,397895
30,5	3,417727	20,5	3,020425	10,5	2,351375
30,0	3,401197	20,0	2,995732	10,0	2,302585
29,5	3,384390	19,5	2,970415	9,5	2,251292
29,0	3,367296	19,0	2,944439	9,0	2,197225
28,5	3,349904	18,5	2,917771	8,5	2,140066
28,0	3,332205	18,0	2,890372	8,0	2,079442
27,5	3,314186	17,5	2,862201	7,5	2,014903
27,0	3,295837	17,0	2,833213	7,0	1,945910
26,5	3,277145	16,5	2,803361	6,5	1,871802

Hic perinde eſt quanam digitorum menſura vti velimus, quia tantum ratio in computum ingreditur.

§. 47. Quod ſi tam calor quam humiditas per totam altitudinem z conſtans aſſumatur, vt ſit $v = b$ et $\phi = \lambda$, aequatio noſtra integralis erit $\frac{z}{(1-\lambda)b} = l\,\frac{a}{p}$, vnde pro quauis altitudine barometrica altitudo $AZ = z$ innoteſcit,

tescit, cum sit $z = (1 - \lambda) b\, l \frac{a}{p}$. Vicissim vero pro altitudine A Z data, posito

$$e^{\frac{z}{(1-\lambda) b}} = y, \text{ erit } y = \frac{a}{p}, \text{ ideoque } p = \frac{a}{y}.$$

Quia autem haec fractio $\frac{z}{(1-\lambda) b}$ est plerumque quam minima, erit proxime

$$\frac{1}{y} = 1 - \frac{z}{(1-\lambda) b} + \frac{z z}{2 (1-\lambda)^2 b b} - \text{etc.}$$

ideoque

$$p = a \left(1 - \frac{z}{(1-\lambda) b} + \frac{z z}{2 (1-\lambda)^2 b b} - \frac{z^3}{6 (1-\lambda)^3 b^3} + \text{etc.}\right)$$

§. 48. Hic autem casus vix vsquam locum habebit: certum enim est, per Atmosphaeram ascendendo, gradum caloris continuo diminui. Etsi autem ratio diminutionis maxime latet, tamen non multum a veritate aberrabimus, si valorem ipsius v hoc modo repraesentemus: $v = \frac{b}{1 + \frac{z}{f}}$, ita vt in altitudine $z = f$ valor ipsius v ad dimidium redigatur; tum enim, cognita hac altitudine f, ista formula vix a veritate aberrare poterit. Hanc ob rem sumamus $v = \frac{b f}{f + z}$, humiditatem vero per totam altitudinem inuariatam spectemus, vt sit $\phi = \lambda$, quia plane non constat, quomodo variatio humiditatis in calculum introduci posset, cuius etiam effectus vix sensibilis esse potest, quia maximus valor ipsius λ nunquam $\frac{1}{50}$ superare posse videtur.

§. 49. His igitur valoribus substitutis aequatio nostra erit

$$\frac{1}{b (1-\lambda)} \int \frac{(f + z)\, d z}{f} = l \frac{a}{p},$$

 vnde

vnde integratione inſtituta erit

$$\frac{1}{(1-\lambda)b}\left(z+\frac{zz}{2f}\right)=l\cdot\frac{a}{p},$$

ex qua aequatione, ſi modo conſtet altitudo f, vbi menſura caloris v ad dimidium redigitur, ad quamuis altitudinem z aſſignari poterit altitudo barometrica p.

§. 50. Hic autem occurrit quaeſtio maximi momenti, quomodo pro quauis altitudine Barometri, ſupra Terram aſcendendo obſeruata, inde ipſa eleuatio loci, ſiue altitudo $AZ=z$ definiri poſſit. Euidens autem eſt, talem concluſionem ex ſola altitudine Barometri neutiquam deriuari poſſe, niſi ſimul innoteſcat quantitas illa f. Quod ſi autem inſuper in Z obſeruetur altitudo Thermometri, ex ea valor ipſius v concludi poterit, quandoquidem hic aſſumere licet, pro quolibet gradu Thermometri innoteſcere celeritatem motus gyratorii c, ſiue noſtro caſu u, vnde fit $v=\frac{uu}{6g}$. Inuento igitur vero valore ipſius v, ob $v=\frac{fb}{f+z}$, erit viciſſim $f=\frac{vz}{b-v}$, qui valor in noſtra poſtrema aequatione ſubſtitutus dabit hanc: $\frac{(b+v)z}{2(1-\lambda)bv}=l\frac{a}{p}$, conſequenter habebimus $z=\frac{2(1-\lambda)bv}{b+v}l\frac{a}{p}$.

§. 51. Ope igitur huius formulae per ſolas obſeruationes barometricas et thermometricas eleuatio cuiusque loci ſuper horizontem aſſignari poterit, quae, cum ſit $b=\frac{cc}{6g}$ et $v=\frac{uu}{6g}$, ita ſe habebit: $z=\frac{2(1-\lambda)buu}{cc+uu}l\frac{a}{p}$; vnde ſi Thermometrum iam ſit inſtructum, vti ſupra monuimus, quaeuis altitudo ſatis facile aſſignari poterit ope obſeruationum barometricarum et thermometricarum. Ac ſi pro z prodeat valor negatiuus, quod euenit quando $p>a$, inde profunditas infra ſuperficiem Terrae pateſcet.

§. 52.

§. 52. Quia autem celeritatum c et u valores adhuc quandam incertitudinem inuoluunt, propterea quod obseruationes multo accuratiores requirunt, quam quidem instituere licet, optandum esset, vt nostra formula primum ad casus tales, vbi eleuatio loci aliunde iam est cognita, applicetur; hinc enim facile accuratiores determinationes litterarum c et u concludi poterunt; hocque pacto simul constructio Thermometrorum ad maiorem perfectionis gradum perducetur. Qui autem indolem nostrarum formularum omni studio perpendere dignabitur, longe plura ad scientiam naturalem promouendam inde deriuare poterit.