1782

Investigatio motuum, quibus laminae et virgae elasticae contremiscunt

Leonhard Euler

INVESTIGATIO MOTVVM, QVIBVS LAMINAE ET VIRGAE ELASTICAE CONTREMISCVNT.

Auctore

L. EVLERO.

Quanquam hoc argumentum iam pridem tam ab Illuſtriſſ. *D. Bernoulli*, quam a me fuſius eſt pertractatum: tamen quia illo tempore neque principia, vnde huiusmodi motus determinari opportet, ſatis erant exculta, neque ea Analyſeos pars, quae circa functiones binarum variabilium verſatur, ſatis explorata, actum agere non videbor, ſi nunc idem argumentum accuratius inueſtigauero. Praeterea vero etiam tot diuerſa motuum genera in huiusmodi corporibus locum habere poſſunt, quae accuratiorem enucleationem poſtulant; quamobrem hic operam dabo, vt vniuerſam huius rei diſquiſitionem ex primis principiis deducam, et clarius, quam quidem ante eſt factum, proponam. Imprimis autem omnia diuerſa motuum genera, quae quidem occurrere poſſunt, dilucide ſum expoſiturus. Quo igitur omnia fiant magis perſpicua, duo praemittam Lemmata, quorum altero ſtatus aequilibrii, altero vero motus virgarum vtcunque elaſticarum et a potentiis quibuscunque

que sollicitatarum definietur; vbi quidem tam virgam quam potentias perpetuo in eodem plano sitas esse assumo. Demonstrationem autem horum lemmatum non addo, quoniam eam alio loco iam dedi, atque adeo etiam ad eos casus, quibus motus non fit in eodem plano, accommodaui.

Lemma I.

Tab. II. Fig. 3. §. 1. *Si virgae vtcunque elasticae* E Y F *in singulis elementis potentiae quaecunque fuerint applicatae, statum aequilibrii definire.*

Solutio.

Referatur virga ad axem fixum O V, et pro eius puncto quocunque Y statuantur coordinatae orthogonales O X $= x$ et X Y $= y$, portio autem virgae E Y $= s$, vt sit $ds^2 = dx^2 + dy^2$; tum vero elementi Y$y = ds$ sit massa $= S\,ds$, ac in eodem loco elasticitas absoluta $=$ V, ita vt, posito radio osculi $= r$, vis, seu potius momentum elasticitatis sit $= \frac{V}{r}$; hincque, loco r substituta formula differentiali, istud momentum erit

$$= \frac{V(dy\,ddx - dx\,ddy)}{ds^3},$$

vbi scilicet nullum differentiale pro constanti est assumtum. Deinde omnes potentiae, quibus hoc elementum Yy sollicitatur, resoluantur secundum directiones coordinatarum, ac ponatur vis inde secundum directionem Y P resultans $= P\,ds$ et secundum directionem Y Q $= Q\,ds$: quibus positis pro statu aequilibrii requiritur, vt sit

$$\int dy \int P\,ds - \int dx \int Q\,ds = V\left(\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{ds^3}\right).$$

Praeter

Praeterea vero tenſio, qua elementum Yy ſecundum tangentem antrorſum verſus E tenditur, erit

$$-\left(\frac{dx}{ds}\right)\int P\,ds - \left(\frac{dy}{ds}\right)\int Q\,ds.$$

Scholion.

§. 2. Hic aſſumſimus virgam in ſtatu naturali in directum eſſe extenſam, ita vt in hoc ſtatu radius oſculi vbique ſit infinitus. Sin autem virga naturaliter iam fuerit incuruata, et pro eius puncto Y radius oſculi ponatur $= \varrho$, tum, quia vis elaſticitatis eatenus tantum ſe exſerit, quatenus iſta curuatura in ſtatu naturali ſiue augetur ſiue diminuitur, pro ſtatu aequilibrii habebitur iſta aequatio:

$$\int dy \int P\,ds - \int dx \int Q\,ds = V\left(\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{ds^3}\right) - \frac{V}{\varrho}.$$

Caeterum quia formulae integrales $\int P\,ds$ et $\int Q\,ds$ denotant ſummam omnium virium elementarium, portioni virgae E Y $= s$ applicatarum, manifeſtum eſt, ſi virga in ipſo termino E a viribus finitis ſollicitetur, eas ſimul in his formulis integralibus comprehendi debere.

Lemma 2.

§. 3. *Si eadem virga elaſtica, quam deſcripſimus, quomodocunque ſuper eodem plano fuerit proiecta, eius motum inueſtigare, hoc eſt, eius ſitum et figuram ad quoduis tempus definire.*

Solutio.

Maneant igitur omnes denominationes, vt modo ſunt conſtitutae, atque elapſo tempore $= t$ (perpetuo in minutis fecundis exprimendo) teneat virga figuram in tabula repraefentatam, ita vt portioni $EY = s$ refpondeant coordinatae $OX = x$ et $XY = y$, quae, quia cum tempore continuo variantur, hic tanquam functiones duarum variabilium s et t fpectari debent. Hinc igitur colligantur formulae $\left(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}\right)$ et $\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right)$, quibus vncinulis ( ) indicatur, in vtraque differentiatione folum tempus t variabile effe affumtum, arcum vero s pro conftante effe habitum. Hinc iam ex viribus elementaribus, virgae in fingulis punctis applicatis, formentur fequentes valores:

$$P' = P - \frac{S}{2g}\left(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}\right) \text{ et } Q' = Q - \frac{S}{2g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right),$$

vbi g denotat altitudinem lapfus grauium in vno minuto fecundo; atque ex his ftatus virgae pro hoc tempore ifthac exprimetur aequatione:

$$\int dy \int P'\,ds - \int dx \int Q'\,ds = V\left(\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{ds^3}\right) - \frac{V}{\varrho},$$

fi quidem virga in ftatu naturali iam ita fuerit incuruata, vt eius puncto Y conueniat radius osculi ϱ; vnde fi virga fuerit naturaliter recta, ob $\varrho = \infty$ terminus poftremus $\frac{V}{\varrho}$ omitti poterit. Denique, quod ad tenfionem in fingulis punctis attinet, erit fimili modo quo fupra tenfio in y verfus E vergens

$$-\left(\frac{dx}{ds}\right)\int P'\,ds - \left(\frac{dy}{ds}\right)\int Q'\,ds.$$

His igitur formulis, fi quidem eas euoluere licuerit, totus virgae motus determinabitur.

Problema I.

Tab. II. Fig 4. §. 4. *Si virga datae longitudinis* E F, *naturaliter recta et vbique tam aequaliter craffa quam aequaliter elaftica* *ſtica vtcunque contremiſcat, aequationem inuenire, qua omnes motus, qui in virga locum habere poſſunt, contineantur.*

Solutio.

Referat igitur E F virgam noſtram in ſtatu naturali conſtitutam, cuius longitudo ſit E F $= a$, eiusque craſſities $= c\,c$, ita vt eius volumen ſit $a\,c\,c$; ac per talia volumina tam maſſas quam vires ſollicitantes exprimamus, ita vt, ſi dicamus quampiam vim eſſe $= b^3$, ea tanta ſit intelligenda, quantum foret pondus eiusdem materiae, ex qua virga conſtat, ſub volumine b^3 contentum. Hinc ſi in virga capiatur portio E X $= x = s$, quandoquidem in vibrationibus minimis arcus s perpetuo abſciſſae x aequari poteſt, elementi X $x = d\,s$ maſſula erit $= c\,c\,d\,s$, ita vt, quod ſupra vocavimus S, hic nobis ſit $= c\,c$. Tempore autem elapſo t, ob tremorem conceptum tranſierit punctum X in Y, poſito X Y $= y$, et quia vibrationes quam minimae ſtatuuntur, iſta applicata y prae abſciſſa E X $= x$, ſiue arcu s, quaſi euaneſcet; ſicque idem punctum x alium motum habere nequit, niſi in directione applicatae X Y; vnde motus ſecundum directionem x erit nullus, ideoque $\frac{d\,d\,x}{d\,t^2} = 0$; atque hinc ob $d\,d\,x = 0$, radius osculi erit

$$\frac{d\,s^3}{-d\,x\,d\,d\,y} = -\frac{d\,s^2}{d\,d\,y},$$

praeterea vero erit $\varrho = \infty$. Quod autem ad elaſticitatem abſolutam attinet, ea pro ſimilibus virgis recte quadrato craſſitiei reputatur proportionalis, ita vt ſit V vt c^4; vnde ſtatuamus V $= b\,c^4$, vbi b denotat quantitatem ab indole materiae virgae pendentem, et quia $\frac{\mathrm{V}}{r}$ momentum

 virium

virium exhibet, vis autem nobis per volumen denotatur, formula $\frac{V}{r}$ quatuor dimensiones lineares complecti debet; vnde patet, literam b certam longitudinem referre.

Quia porro virgam a nullis viribus elementaribus vrgeri statuimus, erit tam $P = o$ quam $Q = o$. Interim tamen, si sumamus virgam in termino E duas sustinere vires, alteram in directione $EF = E$, alteram vero in directione $Ef = F$. fieri debebit

$$\int P\, ds = E \text{ et } \int Q\, ds = F.$$

Cum igitur ob $S = cc$ poni oporteat

$$P' = P - \frac{cc}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = P, \text{ ob } \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = o,$$

fit $\int P' ds = E$; tum vero erit

$$Q' = Q - \frac{cc}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right), \text{ hincque porro}$$

$$\int Q' ds = F - \frac{cc}{2g}\int ds \left(\frac{ddy}{dt^2}\right).$$

His igitur valoribus substitutis aequatio pro motu virgae induet hanc formam:

$$Ey - Fx + \frac{cc}{2g}\int dx \int ds \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{bc^4\, ddy}{ds^2}.$$

Pro tensione autem, qua punctum y versus E tenditur, habebimus $-E - \left(\frac{dy}{ds}\right)\int Q' ds$, vbi, quia $\frac{dy}{ds}$ quasi euanescit, tensio simpliciter erit $-E$, vnde casu quo $E = o$ tensio vbique etiam erit nulla.

Differentiemus igitur aequationem pro motu inventam, sumto solo elemento $ds = dx$ constante, fietque

$$E\, dy - F\, dx + \frac{cc}{2g}\, ds \int ds \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{bc^4\, d^3 y}{ds^2}$$

et per ds diuidendo

$$\frac{E\, dy}{ds} - F + \frac{cc}{2g}\int ds \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{bc^4\, d^3 y}{ds^3};$$

haec

haec aequatio denuo differentiata ac per ds diuifa praebebit iftam:

$$\frac{E\,d\,d\,y}{d\,s^2} + \frac{c\,c}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = -\frac{b\,c^4\,d^4\,y}{d\,s^4},$$

quae, quo difcrimen inter binas variabiles s et t clarius ob oculos ponatur, more folito ita repraefentetur:

$$E\left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right) + \frac{c\,c}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = -\,b\,c^4\left(\frac{d^4\,y}{d\,s^4}\right).$$

Corollarium I.

§. 5. Quod fi ergo virga a nullis plane viribus externis extendatur, ita vt fit $E = 0$, aequatio motum virgae determinans erit

$$\frac{c\,c}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = -\,b\,c^4\left(\frac{d^4\,y}{d\,s^4}\right), \text{ fiue}$$

$$\frac{1}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = -\,b\,c\,c\left(\frac{d^4\,y}{d\,s^4}\right);$$

ita vt totum negotium huc fit reductum, quemadmodum ifta aequatio differentialis quarti gradus integrari queat; vbi quidem in limine confiteri cogimur, eius integrale nullo adhuc modo inueniri potuiffe, ita vt contenti effe debeamus in folutiones particulares inquirere.

Corollarium II.

§. 6. Sin autem accedat vis litera E indicata, eius duo cafus perpendendi occurrunt: prouti virga ab ea vel extenditur vel comprimitur. Talis enim virga, quatenus eft rigida, etiam vires fuftinere poteft, quae ipfam comprimere conantur, cuiusmodi vires eo maiores effe poffunt, quo maior fuerit elafticitas; fi enim effet perfecte flexilis, nulla plane vis comprimens admitti poffet, vnde pro quouis elafticitatis gradu indagandum erit, quantam vim comprimentem fuftinere valeat, antequam incuruecuruetur, quam quidem quaestionem iam olim solutam dedi, vbi vires, quas columnae sustentare valent, sum perscrutatus. Quod autem ad alteram vim extendentem attinet, ab ea virga, quasi esset chorda perfecte flexilis, extendi poterit. Concipiatur scilicet eius termino E filum seu chorda alligata, quae per foraminulum *o* fulcri immobilis *m n* traducta circa trochleam T certum pondus P habeat appensum. Hoc igitur modo virga non solum ob propriam elasticitatem, sed etiam ob pondus tendens P motum tremulum concipiet, vnde sonum edet mixtum seu medium quendam inter sonum virgae elasticae proprium et sonum chordae tensae.

Tab. II. Fig. 5.

Corollarium III.

§. 7. Ponamus igitur huiusmodi vim tendentem esse $= cch$, et quia in plagam contrariam dirigitur, erit $E = -cch$, vnde pro isto motu habebimus sequentem aequationem:

$$-h\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) + \frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bcc\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right),$$

quae ergo aequatio, si fuerit $b = 0$, quo casu elasticitas euanescit, motum chordae perfecte flexilis exprimet; erit enim

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = h.\left(\frac{ddy}{ds^2}\right),$$

quemadmodum contra, si $h = 0$, orietur sonus virgae elasticae proprius, fietque

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bcc\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right);$$

et si casus ex vtroque fuerit mixtus, habebimus

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = h.\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) - bcc\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right).$$

Scho-

Scholion.

§. 8. Quoniam igitur vires ſecundum ipſam virgae directionem agentes, quibus ea vel extenderetur vel comprimeretur, ad aequationem finalem magis complicatam perducunt, eas in hac tractatione penitus remoueamus, et noſtras inueſtigationes ad eos tantum motus reſtringamus, quos virga, ſiue a nullis viribus ſollicitata, ſiue a talibus tantum, quae in virgae directionem normaliter agunt, quas ſupra litera F deſignauimus, recipere poteſt. Ipſam vero virgam hic perpetuo naturaliter rectam et per totam longitudinem vbique aequaliter craſſam et aequaliter elaſticam ſtatuamus, easdem denominationes retinentes, quae hactenus ſunt deſcriptae. At quia aequatio finalis per duplicem differentiationem eſt orta, etiam praecedentes aquationes, quae ad eam deduxerunt, conſideraſſe iuuabit, quae ſunt:

$$\text{I.}\quad -Fx + \frac{cc}{2g}\int dx \int ds \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bc^4\left(\frac{ddy}{ds^2}\right).$$

$$\text{II.}\quad -F + \frac{cc}{2g}\int ds \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bc^4\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right).$$

$$\text{III.}\quad \frac{cc}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bc^4\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right),\ \text{ſiue}\ \frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bcc\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right),$$

vbi in priores adhuc vis F, qua virga normaliter vrgeri poteſt, ingreditur, cuius ratio erit habenda, quando virga non omnino eſt libera, ſed in vno pluribusue punctis quaſi ope ſtyli eſt fixa, circa quem tamen ſit mobilis; vnde ſtatim intelligitur, virgam infinitis modis per tales ſtylos affigi poſſe, quibus eius motus diuerſimode temperetur; quos diuerſos caſus in ſequentibus accuratius euoluemus.

Proble-

Problema II.

§. 9. *Cum virga nostra infinitis modis contremiscere queat, eos casus in genere inuestigare, quibus eius motus vibratorius euadet regularis, seu minimis oscillationibus penduli cuiuspiam simplicis conformis.*

Solutio.

Ponamus igitur longitudinem istius penduli simplicis $= k$, atque vt motus virgae pari modo peragatur, necesse est vt sit $\frac{1}{2g}\left(\frac{d\,d\,y}{dt^2}\right) = -\frac{y}{k}$; in qua aequatione cum solum tempus t pro variabili habeatur, longitudo vero s vt constans spectetur, per duplicem integrationem peruenitur ad istam formulam generalem:

$$y = \text{M}\,\text{fin.}\,(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}),$$

vbi quantitas, M non solum est constans, sed etiam functionem quamcunque ipsius s designare potest. Cum igitur per aequationem finalem sit

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{d\,d\,y}{dt^2}\right) = -\,b\,c\,c\left(\frac{d^4\,y}{ds^4}\right),$$

erit etiam $b\,c\,c\left(\frac{d^4\,y}{ds^4}\right) = \frac{y}{k}$; in qua aequatione sola quantitas s pro variabili assumitur, cuius ergo integrale inuestigari oportet. Quod quo facilius fieri possit ponamus breuitatis gratia $b\,c\,c\,k = f^4$, vt remotis clausulis iam sit $y = \frac{f^4\,d^4\,y}{ds^4}$, cui satisfieri posse euidens est huiusmodi valore: $y = e^{\lambda s}$. Quia enim hinc fit

$$\frac{dy}{ds} = \lambda\,e^{\lambda s},\ \frac{d\,d\,y}{ds^2} = \lambda\,\lambda\,e^{\lambda s},\ \frac{d^3\,y}{ds^3} = \lambda^3\,e^{\lambda s},\ \frac{d^4\,y}{ds^4} = \lambda^4\,e^{\lambda s},$$

his substitutis prodit ista aequalitas: $1 = \lambda^4 f^4$, siue

$\lambda^4 =$

$\lambda^4 = \frac{1}{f^4}$, vnde sequentes quatuor valores pro litera λ eliciuntur, scilicet:

1°. $\lambda = \frac{1}{f}$; 2°. $\lambda = -\frac{1}{f}$; 3°. $\lambda = \frac{\sqrt{-1}}{f}$; 4°. $\lambda = -\frac{\sqrt{-1}}{f}$,

quibus valoribus inuentis constat, eos etiam vtcunque combinatos satisfacere, ita vt statuere queamus

$$y = \alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma e^{\frac{s\sqrt{-1}}{f}} + \delta e^{-\frac{s\sqrt{-1}}{f}},$$

quae forma, cum quatuor contineat constantes arbitrarias, vtique continet integrale completum nostrae aequationis. Notum autem est bina posteriora membra imaginaria reduci ad sinum et cosinum anguli realis $\frac{s}{f}$. Hinc igitur multiplicando per communem factorem N, qui, ob tempus t constans assumtum, pro functione temporis quacunque haberi potest, habebimus

$$y = \mathrm{N}\,(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma\,\text{sin.}\,\tfrac{s}{f} + \delta\,\text{cos.}\,\tfrac{s}{f});$$

qui ergo valor ante inuento $y = \mathrm{M}\,\text{sin.}\,(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}})$ aequalis reddi debet, id quod facillime praestabitur statuendo:

$$\mathrm{N} = \mathrm{C}\,\text{sin.}\,(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}) \text{ et}$$

$$\mathrm{M} = \mathrm{C}\,(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma\,\text{sin.}\,\tfrac{s}{f} + \delta\,\text{cos.}\,\tfrac{s}{f}),$$

sic enim vterque valor reducetur ad istam aequationem:

$$y = \mathrm{C}\,(\text{sin.}\,(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}))\,(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma\,\text{sin.}\,\tfrac{s}{f} + \delta\,\text{cos.}\,\tfrac{s}{f}),$$

vbi iam literae C, α, β, γ, δ, cum angulo ζ denotant veras quantitates constantes pro arbitrio accipiendas; quomodocunque autem accipiantur motus virgae semper ita erit comparatus, vt congruat cum oscillationibus penduli simpli-

ſimplicis, cuius longitudo eſt $= k$, vnde tempus cuiusque vibrationis erit $= \pi \sqrt{\frac{k}{2g}}$, expreſſum in minutis ſecundis, hincque porro numerus vibrationum vno minuto ſecundo editarum erit $= \frac{\sqrt{2g}}{\pi \sqrt{k}}$, qui numerus etiam pro menſura ſoni, quem chorda edet, haberi ſolet.

Corollarium 1.

§. 10. Formulae illae exponentiales, perinde ac ſinus et coſinus, commode per ſeries infinitas exhiberi poſſunt, quae ita ſe habebunt:

$$y = C\,\text{ſin.}\left(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\begin{cases} \alpha\left(1 + \frac{s}{f} + \frac{ss}{1.2ff} + \frac{s^3}{1.2.3ff} + \frac{s^4}{1.2.3.4f^4} + \text{etc.}\right. \\ +\beta\left(1 - \frac{s}{f} + \frac{ss}{1.2ff} - \frac{s^3}{1.2.3f^3} + \frac{s^4}{1.2.3.4f^4} + \text{etc.}\right. \\ +\gamma\left(\quad \frac{s}{f} \qquad - \frac{s^3}{1.2.3f^3} \qquad + \text{etc.}\right. \\ +\delta\left(1 \qquad - \frac{ss}{1.2ff} \qquad + \frac{s^4}{1.2.3.4f^4} - \text{etc.}\right. \end{cases}$$

Hinc igitur, ſi breuitatis gratia ponamus

$$y = C\,\text{ſin.}\left(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)S,$$ erit per ſeriem infinitam

$$\begin{aligned} S = {} & (\alpha + \beta + \delta)\,1 + (\alpha - \beta + \gamma)\frac{s}{f} \\ & + (\alpha + \beta - \delta)\frac{ss}{1.2ff} + (\alpha - \beta - \gamma)\frac{s^3}{1.2.3f^3} \\ & + (\alpha + \beta + \delta)\frac{s^4}{1.2.3.4f^4} + (\alpha - \beta + \gamma)\frac{s^5}{1.2.3.4.5f^5} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Hae igitur ſeries eo magis conuergent, quo maior fuerit quantitas f prae arcu s; vbi recordemur eſſe $f = \sqrt[4]{bcck}$, ita vt ſimul longitudinem penduli ſimplicis k in ſe complectatur.

Corollarium 2.

§. 11. Inuento valore ipſius y, eius quoque valores per differentiationem eruti aſſignari poſſunt: reperietur autem

autem

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)=\frac{C}{f}\,\text{fin.}\left(\zeta+t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}}-\beta e^{\frac{-s}{f}}+\gamma\,\text{cof.}\tfrac{s}{f}-\delta\,\text{fin.}\tfrac{s}{f}\right)$$

$$\left(\frac{ddy}{ds^2}\right)=\frac{C}{ff}\,\text{fin.}\left(\zeta+t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}}+\beta e^{\frac{-s}{f}}-\gamma\,\text{fin.}\tfrac{s}{f}-\delta\,\text{cof.}\tfrac{s}{f}\right)$$

$$\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)=\frac{C}{f^3}\,\text{fin.}\left(\zeta+t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}}-\beta e^{\frac{-s}{f}}-\gamma\,\text{cof.}\tfrac{s}{f}+\delta\,\text{fin.}\tfrac{s}{f}\right)$$

$$\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)=\frac{C}{f^4}\,\text{fin.}\left(\zeta+t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}}+\beta e^{\frac{-s}{f}}+\gamma\,\text{fin.}\tfrac{s}{f}+\delta\,\text{cof.}\tfrac{s}{f}\right)$$

Corollarium 3.

§. 12. Quod fi autem tantum tempus t variabile accipiamus, ipfum motum cognofcemus, quo fingulae virgae ciebuntur; namque celeritas, qua virqae punctum X in directione X Y mouetur, eft $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, quae ergo per valorem inuentum erit

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{C\sqrt{2g}}{\sqrt{k}}\,\text{cof.}\left(\zeta+t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}}+\beta e^{\frac{-s}{f}}+\gamma\,\text{fin.}\tfrac{s}{f}+\delta\,\text{cof.}\tfrac{s}{f}\right);$$

et quia incrementum celeritatis, per elementum temporis dt diuifum, praebet accelerationem, erit ea

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=-\frac{2Cg}{k}\,\text{fin.}\left(\zeta+t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}}+\beta e^{\frac{-s}{f}}+\gamma\,\text{fin.}\tfrac{s}{f}+\delta\,\text{cof.}\tfrac{s}{f}\right);$$

ex quibus formulis perfpicitur, quomodo omnibus conditionibus praefcriptis fatisfiat.

Scholion 1.

§. 13. Quanquam igitur hic tantum motus vibratorios regulares contemplamur: tamen ob ingentem quantitatum conftantium arbitrariarum numerum infinita varietas locum habere poteft, prouti iftae conftantes aliter atque aliter determinantur. In hoc autem negotio impri-

 mis

mis ad ſtatum virgae eſt reſpiciendum, vtrum ea perfecte ſit libera et nullis plane viribus coerceatur, an vero alicubi ſit fixa vel ope vnius pluriumue ſtylorum. Statim enim ac virgae ſtatus fuerit definitus, etiam conſtantium α, β, γ, δ, ratio non ſolum perfecte determinatur, ſed etiam obtinebitur aequatio, ex qua valorem quantitatis f determinare licebit, hincque igitur ipſa penduli ſimplicis longitudo k elicietur. Praecipue autem in hoc negotio ad totam virgae longitudinem EF $= a$, cuius hactenus nulla ratio eſt habita, reſpici oportet. Quod ſi autem nullas alias vires F admittamus, niſi quae virgae in vtroque termino ſint applicatae, ſtatus vtriusque termini triplex occurrere poteſt, quos igitur caſus hic euoluere conueniet; vbi quod de termino E definiemus ſimul pro altero F intelligi debet.

I. Primus igitur caſus eſto, quo virgae terminus E plane eſt liber et a nulla vi coercetur; tum igitur poſito $s = 0$, tribus aequationibus ſupra (§. 8.) memoratis ſatisfieri oportet, vnde, quia vis F $= 0$ et vtrumque integrale

$$\int ds \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) \text{ et } \int ds \int ds \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$$

perpetuo ita accipi ſupponitur, vt evaneſcat poſito $s = 0$, ex prima pro termino E, vbi $s = 0$, oportet eſſe $\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) = 0$; ex ſecunda autem aequatione naſcitur iſta conditio: $\left(\frac{d^3 y}{ds^3}\right) = 0$, ita vt hic ſtatus duas determinationes poſtulet.

II. Secundus caſus eſto, quo virgae terminus E ope ſtyli ita figitur, vt circa eum libere moueri poſſit; quo ergo caſu vis quaedam F ſtylum retinens aderit. Primum igitur, quia terminus E in ſuo loco fixus detinetur, poſito $s = 0$, hoc caſu fieri debet $y = 0$; praeterea vero prima memo-

memoratarum aequationum suppeditat hanc conditionem: $\left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right) = 0$; secunda aequatio determinabit ipsam vim

$$F = + b\,c^4 \left(\frac{d^3 y}{d\,s^3}\right),$$

quam autem nosse parum nobis refert, quia in motum vibratorium non influit; sicque iste casus etiam duas continet determinationes, scilicet:

$$y = 0 \text{ et } \left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right) = 0;$$

hunc igitur vocemus simpliciter fixum.

III. Tertius casus esto, quo terminus virgae E ita muro quasi est infixus, vt hoc loco non moueri sed tantum incuruari queat. Hoc igitur casu manifestum est, posito $s = 0$ non solum fieri debere $y = 0$, sed etiam $\left(\frac{d\,y}{d\,s}\right) = 0$, quia in hoc termino tangens in ipsum axem incidere debet; hunc autem casum vocemus infixum.

Cum igitur hi singuli casus binas determinationes inuoluant, si etiam ad alterum terminum F respiciamus, pro quo habebimus $x = s = a$, quicunque casus in vtroque locum habeant, semper inde quatuor orientur determinationes, quibus non solum constantes illae α, β, γ, δ definientur, sed insuper aequatio resultabit, ex qua ipsam quantitatem f, hincque pendulum simplex k assignare licebit.

Scholion 2.

§. 14. Cum igitur pro vtroque termino E et F terni casus locum habere queant, hinc omnino sex casus diuersi nascuntur, quos ordine resolui conueniet, si quidem hoc argumentum in omni extensione pertractare voluerimus; hos igitur sex casus sequenti modo designabimus:

I. Terminus E liber;	terminus F liber
II. - - - E liber; - - - - - - -	F ſimplic. fixus
III. - - - E liber; - - - - - - -	F infixus
IV. - - - E ſimpliciter fixus; - - -	F ſimplic. fixus
V. - - - E ſimpliciter fixus; - - -	F infixus
VI. - - - E infixus; - - - - - -	F infixus.

Plures quidem caſus videntur occurrere, veluti ſi E eſſet fixus et F liber; ſed quia ambos terminos inter ſe permutare licet, hic caſus in illis memoratis ſex iam continetur. His igitur poſitis ſex nobis ſuperſunt Problemata, quae breuiter ordine pertractabimus.

Euolutio caſus I.
quo virgae elaſticae vterque terminus prorſus eſt liber.

Problema.

§. 15. *Si virga elaſtica a nullis plane viribus ſollicitetur et plano horizontali politiſſimo libere incumbat, inveſtigare omnes vibrationes regulares, quibus ea contremiſcere poteſt.*

Solutio.

Quoniam vterque terminus E et F liber aſſumitur, pro vtroque erit tam $(\frac{ddy}{ds^2}) = 0$ quam $(\frac{d^3 s}{ds^3}) = 0$, hinc ergo pro termino E poſito $s = 0$ naſcuntur hae duae aequationes:

$$\text{I. } \alpha + \beta - \delta = 0; \text{ II. } \alpha - \beta - \gamma = 0;$$

pro altero termino F erit $s = a$, et poſito breuitatis gratia $\frac{a}{f} = \omega$, iſtae oriuntur aequationes:

III.

III. $\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} - \gamma \text{ fin. } \omega - \delta \text{ cof. } \omega = 0$;

IV. $\alpha e^{\omega} - \beta e^{-\omega} - \gamma \text{ cof. } \omega + \delta \text{ fin. } \omega = 0$.

Iam ex duabus prioribus colligitur $\delta = \alpha + \beta$ et $\gamma = \alpha - \beta$, qui valores in duabus posterioribus fubftituti praebent:

III. $\alpha (e^{\omega} - \text{fin. } \omega - \text{cof. } \omega) + \beta (e^{-\omega} + \text{fin. } \omega - \text{cof. } \omega) = 0$;

IV. $\alpha (e^{\omega} + \text{fin. } \omega - \text{cof. } \omega) - \beta (e^{-\omega} + \text{fin. } \omega - \text{cof. } \omega) = 0$;

vnde duplici modo concluditur:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-e^{-\omega} - \text{fin. } \omega + \text{cof. } \omega}{e^{\omega} - \text{fin } \omega - \text{cof. } \omega} = \frac{e^{-\omega} + \text{fin. } \omega - \text{cof. } \omega}{e^{\omega} + \text{fin. } \omega - \text{cof. } \omega}.$$

Statuamus hic breuitatis gratia $\text{fin. } \omega + \text{cof. } \omega = p$ et $\text{fin. } \omega - \text{cof } \omega = q$, vt habeamus

$$\frac{-e^{-\omega} - q}{e^{\omega} - p} = \frac{e^{-\omega} + p}{e^{\omega} + q};$$

vnde deducitur haec aequatio:

$$-1 - qq - qe^{\omega} - qe^{-\omega} = 1 + pp - pe^{\omega} - pe^{-\omega}, \text{ fiue}$$

$$2 + pp + qq + (q - p) e^{\omega} + (q - p) e^{-\omega} = 0.$$

Cum igitur fit

$$pp + qq = 2 \text{ et } q - p = -2 \text{ cof. } \omega, \text{ erit}$$

$$2 - \text{cof. } \omega \,(e^{\omega} + e^{-\omega}) = 0, \text{ hincque}$$

$$\text{cof. } \omega = \frac{2}{e^{\omega} + e^{-\omega}};$$

quocirca totum negotium huc eft reductum, vt ex ifta aequatione valores literae ω eliciantur, vbi quidem ftatim apparet, valorem $\omega = 0$ fatisfacere; quia autem hinc oritur $f = \infty$, hincque etiam k infinitum, hoc cafu virga nullum plane motum concipiet, fed in quiete perfeuerabit. Pro reliquis autem valoribus, quotcunque fuerint inuenti, habebimus

bimus $f = \frac{a}{\omega}$, hincque $k = \frac{a^4}{bcc\omega^4}$; tum vero erit

$$\sqrt{\frac{2g}{k}} = \frac{c\omega\omega\sqrt{2bg}}{aa};$$

quocirca tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi aa}{\omega\omega c\sqrt{2gb}}$, hincque ipse sonus a virga editus $= \frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{\pi aa}$. Denique cum sit

$$\text{cos.}\,\omega = \frac{2}{e^{\omega} + e^{-\omega}}, \text{ erit sin. } \omega = \frac{\pm(e^{\omega} - e^{-\omega})}{e^{\omega} + e^{-\omega}};$$

ex priore autem valore, quo sinus ω est positiuus, erit

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1 - e^{-2\omega} - e^{\omega} + e^{-\omega}}{-1 + e^{2\omega} - e^{\omega} + e^{-\omega}}, \text{ hincque}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}e^{\omega} = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega} - e^{2\omega} + 1}{-e^{\omega} + e^{-\omega} + e^{2\omega} - 1} = -1,$$

ita vt sit $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-1}{e^{\omega}} = -e^{-\omega}$; altero autem casu quo sinus ω est negatiuus, reperitur $\frac{\alpha}{\beta} = +\frac{1}{e^{\omega}} = +e^{-\omega}$; quare si sumamus $\alpha = 1$, erit $\beta = \mp e^{\omega}$, hincque $\gamma = 1 \pm e^{\omega}$ et $\delta = 1 \mp e^{\omega}$, vbi signa superiora valent, si sin. ω est positiuus, inferiora si negatiuus. His igitur valoribus inuentis aequatio pro motu virgae perfecte est determinata, quae quo simplicius repraesentetur, notetur, ob $f = \frac{a}{\Phi}$ esse $\frac{s}{f} = \frac{s}{\omega}$; vnde si ponatur breuitatis gratia $\frac{s}{a} = \omega$, vt sit $\frac{s}{f} = u\,\omega$, hoc valore posito aequatio nostra pro motu erit:

$$y = C\,\text{sin.}\left(\zeta + t\frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa}\right)\left(e^{u\omega} \mp e^{\omega(1-u)} + (1 \pm e^{\omega})\,\text{sin.}\,u\omega + (1 \mp e^{\omega})\,\text{cs.}\,u\omega\right)$$

ex qua ad quoduis tempus t status virgae elasticae cognoscitur, si modo valor literae ω rite fuerit definitus.

Corol-

Corollarium 1.

§. 16. Cum igitur ω denotet arcum circuli, cuius radius eſt $= 1$, in primo quadrante haud difficulter perſpicitur, poſt caſum $\omega = 0$ nullum alium angulum ſatisfacere; ſemper enim erit $\cos. \omega < \frac{2}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$, quod ita oſtendi poteſt. Cum ſit per ſeries

$$\cos. \omega = 1 - \frac{\omega\omega}{1.2} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \frac{\omega^6}{1 \ldots 6} + \text{etc. et}$$

$$e^{\omega} + e^{-\omega} = 2\left(1 + \frac{\omega\omega}{1.2} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} + \frac{\omega^6}{1 \ldots \ldots 6} + \text{etc. erit}\right.$$

$$\cos. \omega (e^{\omega} + e^{-\omega}) = 2\left(1 - \frac{\omega^4}{6}\right),$$

qui valor manifeſto minor eſt quam 2, niſi valor ipſius ω angulum rectum ſuperet.

Corollarium 2.

§. 17. Deinde manifeſtum eſt, neque in ſecundo neque in tertio quadrante reperiri valorem ipſius ω, quia in his quadrantibus coſinus ſunt negatiui, formula autem $\frac{2}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$ ſemper eſt poſitiua. At in quarto quadrante, vbi coſinus iterum fiunt poſitiui, dabitur valor non multum tres angulos rectos ſuperans. Sit igitur ϱ ſignum anguli recti, ſiue $\varrho = \frac{\pi}{2}$, ac ponatur $\omega = 3\varrho + \Phi$, fietque $\cos. \omega = \sin \Phi$, vnde fieri debet $\sin. \Phi = \frac{2}{e^{3\varrho + \Phi} + e^{-3\varrho - \Phi}}$; vbi facile perſpicitur, angulum Φ valde eſſe paruum, quia numerus $e^{3\varrho}$, ob $3\varrho = 4,71239$ et $e = 2,71828$, eſt ſatis magnus, ſcilicet proxime $= 111,31$, pro quo ſcribamus n. Iam quia $\sin. \Phi = \Phi$, proxime, $e^{\Phi} = 1 + \Phi$ et $e^{-\Phi}$

 $= 1$

$= 1 - \Phi$, noſtra aequatio erit

$$\Phi = \frac{2n}{nn(1+\Phi)+1-\Phi},$$ ſiue $\Phi = \frac{2n}{nn+1}$ proxime;

ſumi igitur circiter poterit $\Phi = \frac{2}{n} = \frac{1}{50}$; vnde patet angulum Φ vix vnum gradum ſuperare, ita vt ſit $\omega = 3\varrho + 1°$ circiter.

Corollarium 3.

§. 18. Progrediamur ad quintum quadrantem, et manifeſtum eſt hic iterum dari valorem tantillo minorem quam 5ϱ; defectus enim aliquot minuta prima non excedet. Porro vero ſextus et ſeptimus vacui manebant; in octavo autem reperietur $\omega = 7\varrho$, tam prope vt exceſſus ſentiri nequeat; ſicque valores vlteriores erunt continuo exactius $\omega = 9\varrho$, $\omega = 11\varrho$, etc.

Corollarium 4.

§. 19. Quod ſi ergo in primo valore exiguum diſcrimen vnius gradus negligamus, omnes valores anguli ω erunt 3ϱ, 5ϱ, 7ϱ, 9ϱ, 11ϱ, etc. qui ſecundum numeros impares in infinitum progrediuntur, vnde noſtra virga infinitos ſonos ſimplices edere poterit, qui ſequentibus numeris exprimentur:

$$\frac{9\varrho c\sqrt{2gb}}{2aa};\ \frac{25\varrho c\sqrt{2gb}}{2aa};\ \frac{49\varrho c\sqrt{2gb}}{2aa};\ \frac{81\varrho c\sqrt{2gb}}{2aa};\ \text{etc.}$$

qui ergo ſoni ſecundum numeros, 9, 25, 49, 81 etc. progrediuntur, quorum primus pro fundamentali haberi poteſt; proximus vero ad hunc rationem tenebit vt 25 : 9, quod interuallum complectitur vnam octauam cum tritono. Vnde ſi ſonus fundamentalis fuerit G, ſequens futurus erit *cis*, qui ergo ſonus ſimul auditus valde ingratam diſſonantiam referet.

Scho-

Scholion 1.

§. 20. Quodſi igitur pro ſingulis iſtis valoribus anguli ω formentur valores ipſius y, eorum quotcunque inuicem coniuncti exhibebunt motus, quos noſtra virga recipere poterit. Si hoc modo omnes infiniti valores ipſius ω inuicem coniungantur, ac pro quolibet literis C et ζ generatim quicunque alii valores tribuantur, aequatio obtinebitur generalis, quae omnes plane motus, qui in virga locum habere poſſunt, in ſe complectatur. Haec igitur aequatio generalis, ſi valores anguli ω per ω, ω', ω'', etc. deſignemus, ſequentem habebit formam:

$$y = C \sin. \left(\zeta + t \frac{\omega \omega c \sqrt{2gb}}{aa}\right)$$
$$\left(e^{u\omega} \mp e^{\omega(1-u)} + (1 \pm e^{\omega}) \sin. u\omega + (1 \mp e^{\omega}) \cos. u\omega\right)$$
$$+ C' \sin. \left(\zeta' + t \frac{\omega' \omega' c \sqrt{2gb}}{aa}\right)$$
$$\left(e^{u\omega'} \mp e^{\omega'(1-u)} + (1 \pm e^{\omega'}) \sin. u\omega' + (1 \mp e^{\omega'}) \cos. u\omega'\right)$$
$$+ C'' \sin. \left(\zeta'' + t \frac{\omega'' \omega'' c \sqrt{2gb}}{aa}\right)$$
$$\left(e^{u\omega''} \mp e^{\omega''(1-u)} + (1 \pm e^{\omega''}) \sin. u\omega'' + (1 \mp e^{\omega''}) \cos. u\omega''\right).$$

etc. etc. etc.

vbi litera u denotat fractionem $\frac{s}{a}$, et ſigna ſuperiora valent ſi angulorum ω, ω', ω'' ſinus fuerint poſitiui, inferiora vero ſi fuerint negatiui.

Scholion 2.

§. 21. Quod ſi ſonum fundamentalem, quo eſt proxime $\omega = 3\varrho$, et qui continet motum ſimpliciſſimum, quo virga contremiſcere poteſt, attentius conſideremus, facile colligere licet, curuam, quam virga inter vibrandum induit, axem ad minimum in duobis punctis ſecare debere,

 ita,

ita vt quasi duos nodos formet. Si enim axem nusquam secaret, dum singula eius puncta ab axe recedunt, eodem motu continuo vlterius recedere deberent, quia virga a nullis plane viribus coercetur; quod inde etiam perspicuum est, quod hoc casu centrum grauitatis virgae immotum esse debet. Si porro virga in motu suo vnicum nodum formaret, circa quem quasi gyraretur, motum semel conceptum gyratorium perpetuo conseruare deberet. Hinc igitur patet, virgam inter vibrandum eiusmodi formam

Tab. II. Fig. 6. $e\,L\,o\,M\,f$ esse habituram, quae situm naturalem, seu axem E F in duobus punctis L, M secet. Hoc idem vero etiam nostra formula declarat: quia enim angulus ω hic subito tres angulos rectos superat, anguli $u\,\omega$, siue $\frac{\omega s}{a}$, dum quantitas s vsque ad a augetur, angulos referent a o vsque ad $3\,\varrho$ continuo ascendentes, quorum sinus et cosinus interea bis contraria signa recipiunt, vnde duobus casibus contingere potest, vt applicata y euanescat. Eodem modo intelligere licet, pro secundo ipsius ω valore $= 5\,\varrho$ curuam virgae tres nodos habere debere; pro sequente, $\omega = 7\,\varrho$, quatuor, et ita porro. Singuli autem isti nodi siue intersectiones cum axe E F pro quouis valore ipsius ω ex haec aequatione elici poterunt:

$$e^{u\omega} \mp e^{\omega(1-u)} + (1 \pm e^{\omega})\,\text{sin.}\,\omega u + (1 \mp e^{\omega})\,\text{cos.}\,\omega u = 0$$

quippe ex qua valores literae $u = \frac{s}{a}$ ipsos nodos declarabunt. Scilicet literae u, incipiendo a o, continuo maiores tribuantur valores vsque ad 1, et casus notentur, quibus ista formula euanescit; si enim quispiam valor iam euadat valde paruus, per regulam approximationis veri eius valores facile deteguntur.

Scho-

Scholion 3.

§. 22. Quo haec clarius perspiciantur, casum primum, quo $\omega = 3.\varrho$ circiter, ideoque eius sinus negatiuus, accuratius perpendamus. Erit igitur, primo factore, constante seu a tempore pendente, omisso:

$$y = - - - - e^{u\omega} + e^{\omega(1-u)} + (1 - e^{\omega})\,\text{sin.}\,u\,\omega + (1 + e^{\omega})\,\text{cos.}\,u\,\omega,$$

cuius valores pro tribus casibus $u = 0$, $u = 1$ et $u = \frac{1}{2}$ definiamus, vt applicatas non solum pro vtroque termino E et F, sed etiam pro puncto medio O, scilicet Ee, Ff et $O\,o$ obtineamus. Primo igitur, posito $u = 0$ erit $E\,e = 2(1 + e^{\omega})$; posito autem $u = 1$, prodit applicata

$$F\,f = e^{\omega} + 1 + (1 - e^{\omega})\,\text{sin.}\,\omega + (1 + e^{\omega})\,\text{cos.}\,\omega,$$

qui valor, ob $\text{sin.}\,\omega = -1$ et $\text{cos.}\,\omega = \frac{2}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$, abit in hunc:

$F\,f = 2(1 + e^{\omega})$, sicque hae duae applicatae $E\,e$ et $F\,f$ inter se erunt aequales; at pro puncto medio O, vbi fit $u = \frac{1}{2}$, hincque $\text{sin.}\,\frac{1}{2}\,\omega = \text{sin.}\,\frac{3}{2}\,\varrho = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\text{cos.}\,\frac{1}{2}\,\omega = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, erit applicata

$$O\,o = e^{\frac{\omega}{2}} + e^{\frac{\omega}{2}} + \frac{(1 - e^{\omega})}{\sqrt{2}} - \frac{(1 + e^{\omega})}{\sqrt{2}} = 2\,e^{\frac{\omega}{2}} - e^{\omega}\sqrt{2},$$

qui valor, ob $e^{\omega} = 111$ et $e^{\frac{\omega}{2}} = 10\frac{1}{2}$, abit in $21 - 111.\sqrt{2}$; vnde patet, hanc applicatam esse negatiuam, prorsus vti figura refert. Possumus etiam simili modo positionem tangentium pro his locis exhibere ex formula

$$\left(\frac{d\,y}{d\,s}\right) = - - - e^{u\omega} - e^{\omega(1-u)} + (1 - e^{\omega})\,\text{cos.}\,u\,\omega - (1 + e^{\omega})\,\text{sin.}\,u\,\omega;$$

quae formula, posito $u = 0$, pro termino E praebet:

$$\left(\frac{d\,y}{d\,s}\right) = 1 - e^{\omega} + 1 - e^{\omega} = 2(1 - e^{\omega}) = -2(e^{\omega} - 1);$$

tum vero, posito $u = 1$, pro termino F erit

$$\left(\frac{dy}{ds}\right) = e^{\omega} - 1 + (1 - e^{\omega}) \operatorname{cos}. \omega - (1 + e^{\omega}) \operatorname{fin}. \omega,$$

qui valor, ob $\operatorname{cos}. \omega = -1$ et $\operatorname{fin}. \omega = \frac{2}{e^{\omega}}$, reiecto termino $e^{-\omega}$, vtpote minimo, reducitur ad $\left(\frac{dy}{ds}\right) = 2(e^{\omega} - 1)$; vnde patet angulos E e L et F f M esse inter se aequales. Pro puncto autem medio O, vbi $u = \frac{1}{2}$, prodit

$$\left(\frac{dy}{ds}\right) = (1 - e^{\omega}) \operatorname{cos}. \tfrac{1}{2}\omega - (1 + e^{\omega}) \operatorname{fin}. \tfrac{1}{2}\omega = -\sqrt{2},$$

qui valor, si calculus accuratius institueretur, prodiret $= 0$, ita vt tangens in puncto o axi sit parallela. Simili prorsus modo etiam sequentes casus, vbi $\omega = 5\varrho$, vel 7ϱ, vel 9ϱ expendere licebit.

Euolutio casus II.

Quo alter terminus liber relinquitur, alter vero, circa stylum mobilis, figitur.

Problema.

§. 23. *Si virga elastica in termino* E *fuerit libera, in altero vero* F *stylo affixa, circa quem tamen libere moveri possit, inuestigare omnes vibrationes regulares, quibus ea contremiscere potest.*

Solutio.

Quia ergo pro termino E, vbi $s = 0$, vt ante est $\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) = 0$ et $\left(\frac{d^3 y}{ds^3}\right) = 0$, erit etiam vt ante $\alpha + \beta - \delta = 0$ et $\alpha - \beta - \gamma = 0$, vnde fit $\gamma = \alpha - \beta$ et $\delta = \alpha + \beta$. Pro altero autem termino simpliciter fixo, vbi $s = a$, posito ite-

iterum $\frac{x}{y} = \omega$, primo debet esse $y = 0$, tum vero etiam $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 0$. Prior conditio dat

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \text{ fin. } \omega + \delta \text{ cof. } \omega = 0,$$

posterior vero

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} - \gamma \text{ fin. } \omega - \delta \text{ cof. } \omega = 0,$$

quae aequationes, loco γ et δ substitutis valoribus, abeunt in sequentes:

$$\alpha(e^{\omega} + \text{fin. } \omega + \text{cof. } \omega) + \beta(e^{-\omega} - \text{fin. } \omega + \text{cof. } \omega) = 0 \text{ et}$$
$$\alpha(e^{\omega} - \text{fin. } \omega - \text{cof. } \omega) + \beta(e^{-\omega} + \text{fin. } \omega - \text{cof. } \omega) = 0;$$

vnde geminus valor oritur

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{(e^{-\omega} - \text{fin. } \omega + \text{cof. } \omega)}{e^{\omega} + \text{fin. } \omega + \text{cof. } \omega} = -\frac{(e^{-\omega} + \text{fin. } \omega - \text{cof. } \omega)}{e^{\omega} - \text{fin. } \omega - \text{cof. } \omega}.$$

Ponatur iterum fin. ω + cof. $\omega = p$ et fin. ω − cof. $\omega = q$, vt fit

$$\frac{-e^{-\omega} + q}{e^{\omega} + p} = \frac{-e^{-\omega} - q}{e^{\omega} - p},$$

vnde colligitur haec aequatio:

$$-1 + p e^{-\omega} + q e^{\omega} - pq = -1 - q e^{\omega} - p e^{-\omega} - pq$$

siue $p e^{-\omega} + q e^{\omega} = 0$, vnde concluditur tang. $\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$, quocirca habebimus, vel

$$\text{fin. } \omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}} \text{ et cof. } \omega = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}}, \text{ vel}$$

$$\text{fin. } \omega = \frac{-e^{\omega} + e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}} \text{ et cof. } \omega = \frac{-e^{\omega} - e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}}.$$

Ex prioribus valoribus colligitur

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-e^{-\omega}\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})} - 2e^{-\omega}}{e^{\omega}\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})} + 2e^{\omega}},$$

ideo-

ideoque $\frac{\alpha}{\beta} e^{2\omega} = -1$, vnde fit $\frac{\alpha}{\beta} = -e^{-2\omega}$. Posteriore vero casu colligetur

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-e^{-\omega}\sqrt{2(e^{2\omega}+e^{-2\omega})}+2e^{-\omega}}{e^{\omega}\sqrt{2(e^{2\omega}+e^{-2\omega})}-2e^{\omega}} = \frac{-1}{e^{2\omega}} = -e^{-\omega}.$$

Vtroque ergo casu, siue sinus et cosinus anguli ω sint ambo positiui, siue ambo negatiui, pro fractione $\frac{\alpha}{\beta}$ idem valor obtinetur. Quare si ponatur $\alpha = 1$, erit $\beta = -e^{2\omega}$, hincque $\gamma = 1 + e^{2\omega}$ et $\delta = 1 - e^{2\omega}$; quibus valoribus inuentis aequatio pro motu virgae, si iterum loco $\frac{s}{a}$ scribamus u, erit haec:

$$y = C\,\text{fin.}(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}})(e^{u\omega} - e^{\omega(2-u)} + (1+e^{2\omega})\,\text{fin.}\,u\omega + (1-e^{2\omega})\,\text{cof.}\,u\omega).$$

Quicunque autem valores pro angulo ω ex aequatione

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$$

eruantur, ex singulis habetur

$$f = \frac{a}{\omega}, \text{ hincque } f^4 = \frac{a^4}{\omega^4} = bcck, \text{ vnde fit}$$

$$k = \frac{a^4}{bcc\omega^4} \text{ et } \sqrt{\frac{2g}{k}} = \frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa},$$

hincque porro vt ante tempus vnius oscillationis erit:

$$\pi\sqrt{\frac{k}{2g}} = \frac{\pi aa}{\omega\omega c\sqrt{2gb}},$$

et sonus a virga elastica editus $= \frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{\pi aa}$. Totum ergo negotium huc est reductum, vt ex aequatione

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$$

omnes valores anguli ω eruantur; vbi quidem statim liquet, valorem $\omega = 0$ satisfacere, vnde autem nullus motus sequitur; quare pro reliquis valoribus singulos quadrantes percurramus. Pro primo igitur quadrante per series habebimus:

fin. ω

$$\sin.\,\omega\,(e^{\omega}+e^{-\omega}) = 2\,\omega\,(1+\tfrac{1}{3}\,\omega\,\omega - \tfrac{1}{30}\,\omega^4) \text{ et}$$
$$\cos.\,\omega\,(e^{\omega}-e^{-\omega}) = 2\,\omega\,(1-\tfrac{1}{3}\,\omega\,\omega - \tfrac{1}{30}\,\omega^4);$$

vnde patet, priorem formulam per totum primum quadrantem maiorem esse quam posteriorem, ita vt in hoc quadrante nullus reperiatur valor pro angulo ω. In secundo autem quadrante, vbi omnes tangentes sunt negatiui, nullus iterum dari potest, neque etiam in quarto, sexto, octavo et omnibus paribus. Reliquos quadrantes in corollariis percurramus.

Corollarium 1.

§. 24. Consideremus igitur tertium quadrantem, vbi, cum sit ω maius quam π, formula $\frac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{e^{\omega}+e^{-\omega}}$ parum ab vnitate deficiet, vnde angulus ω aliquanto minor erit quam $\pi + 45^{\circ}$. Hinc sumto iterum ϱ pro signo anguli recti statuamus $\omega = \pi + \frac{1}{2}\varrho - \Phi$, eritque

$$\text{tang.}\,\omega = \text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}\varrho - \Phi) = \frac{1-\text{tang.}\,\Phi}{1+\text{tang.}\,\Phi}.$$

Cum igitur sit

$$\frac{1-\text{tang.}\,\Phi}{1+\text{tang.}\,\Phi} = \frac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{e^{\omega}+e^{-\omega}} = \frac{1-e^{-2\omega}}{1+e^{-2\omega}},$$

hinc manifesto est $\text{tang.}\,\Phi = e^{-2\omega} = \frac{1}{e^{2\pi+\varrho-2\Phi}}$, in quo exponente angulum exiguum Φ negligere licet, ita vt subducto calculo reperiatur $\text{tang.}\,\Phi = \frac{1}{2576}$; sicque angulus Φ vix vnum minutum superat, id quod tuto negligi potest, ita vt primus valor sit $\omega = \pi + \frac{1}{2}\varrho = 225^{\circ}$, cuius tam sinus quam cosinus est $= -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Corollarium 2.

§. 25. Pergamus igitur ad quartum quadrantem, vbi angulus ω multo minus discrepabit a $2\pi + 45^\circ$. Hic autem tam sinus quam cosinus erit $= + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Simili modo ex septimo quadrante nanciscimur $\omega = 3\pi + \frac{1}{2}\varrho$, tam sinu quam cosinu existente $= - \frac{1}{\sqrt{2}}$; nonus vero quadrans suppeditat $\omega = 4\pi + \frac{1}{2}\varrho$; vndecimus $\omega = 5\pi + \frac{1}{2}\varrho$, et ita porro.

Corollarium 3.

§. 26. Cum igitur sit $\varrho = \frac{\pi}{4}$, omnes valores pro angulo ω hactenus inuenti sequenti modo progrediuntur:

$$1^{dus}\ \omega = \frac{5\pi}{4};\ 2^{dus}\ \omega = \frac{9\pi}{4};\ 3^{us}\ \omega = \frac{13\pi}{4};\ 4^{tus}\ \omega = \frac{17\pi}{4},\ \text{etc.}$$

vnde omnes soni simplices, quos ista virga edere potest, sequentibus numeris exprimentur:

$$\frac{25\pi c\sqrt{2gb}}{16aa};\ \frac{81\pi c\sqrt{2gb}}{16aa};\ \frac{169\pi c\sqrt{2gb}}{16aa};\ \frac{289\pi c\sqrt{2gb}}{16aa};$$

quorum primus fundamentalis censetur; vnde si secundus simul exaudiatur, erit primus ad secundum vt 25 ad 81 hoc est vt $1 : 3\frac{6}{25}$, seu proxime vt $1 : 3\frac{1}{4}$. Ergo si sonus fundamentalis fuerit C, sequens erit *gis*, quem tamen sonum vno commate superabit, sicque harmonia parum grata existet.

Corollarium 4.

§. 27. Cum hic sonus fundamentalis, seu grauissimus, quem virga haec edere potest, sit $= \frac{25\pi c\sqrt{2gb}}{16aa}$, casu autem

autem primo, quo vterque virgae terminus erat liber, fonus fundamentalis repertus fuerit $= \frac{9 \varsigma c \sqrt{2 g b}}{2 a a} = \frac{9 \pi c \sqrt{2 g b}}{4 a a}$, ille fe habebit ad hunc vt 25 : 36, ita vt cafu primo eadem virga fonum edat fere vna quinta acutiorem. Scilicet fi fonus cafu primo editus fuerit *g*, tum fonus fecundo cafu editus erit grauior *Cis*, quod interuallum a muficis falfa quinta appellatur. Hic igitur vtique notari meretur, quod fi virga vtrinque libera edat fonum *g*, tum eadem virga altero termino fimpliciter fixa fubito editura fit fonum grauiorem *Cis*, id quod experientia facile comprobari poteft.

Scholion 1.

§. 28. Inuentis igitur omnibus valoribus anguli ω, quos defignemus per ω, ω', ω'', ω''', ω'''' etc. omnes motus irregulares, quos noftra virga edere poteft, per combinationem generaliffimam formularum ex his valoribus natarum in fequenti expreffione continebuntur:

$$\begin{aligned} y = {} & C \sin. \left(\zeta + t \tfrac{\omega \omega c \sqrt{2 g b}}{a a}\right) \left(e^{u \omega} - e^{\omega (2-u)} + (1 + e^{2 \omega})\right. \\ & \left. \sin. u \omega + (1 - e^{2 \omega}) \cos. u \omega\right) \\ & + C' \sin. \left(\zeta' + t \tfrac{\omega' \omega' c \sqrt{2 g b}}{a a}\right) \left(e^{u \omega'} - e^{\omega' (2-u)} + (1 + e^{2 \omega'})\right. \\ & \left. \sin. u \omega' + (1 - e^{2 \omega'}) \cos. u \omega'\right) \\ & + C'' \sin. \left(\zeta'' + t \tfrac{\omega'' \omega'' \sqrt{2 g b}}{a a}\right) \left(e^{u \omega''} - e^{\omega'' (2-u)} + (1 + e^{2 \omega''})\right. \\ & \left. \sin. u \omega'' + (1 - e^{2 \omega''}) \cos. u \omega''\right). \end{aligned}$$

Scholion 2.

§. 29. Examinemus etiam figuram, quam virga induet dum fonum principalem purum reddit. Hunc in-

 finem

finem euoluamus expressionem pro applicata y inuentam, neglecto iterum factore constante seu a tempore pendente, atque habebimus:

$$y = 1\,(e^{u\omega} + \sin u\omega + \cos. u\omega) - e^{2\omega}(e^{-u\omega} - \sin. u\,\omega + \cos. u\omega),$$

vbi iam vidimus, ob $\omega = \frac{5\pi}{4}$ esse $e^{2\omega} = 2576$; tum vero loco u sumamus successiue sequentes valores:

$$u = 0,\ u = \tfrac{1}{5},\ u = \tfrac{2}{5},\ u = \tfrac{3}{5},\ u = \tfrac{4}{5},\ u = 1$$

vbi pro postremo casu iam nouimus esse $y = 0$.

I. Sit igitur $u = 0$, siue $s = 0$, eritque

$$y = 2 - 2\,e^{2\omega} = -5150,$$

quae ergo est applicata pro termino E.

II. Sit $u = \frac{1}{5}$, siue $s = \frac{1}{5}a$, erit

$$y = (e^{\frac{1}{5}\omega} + \sin. \tfrac{1}{5}\omega + \cos. \tfrac{1}{5}\omega)$$
$$- e^{2\omega}(e^{-\frac{1}{5}\omega} - \sin. \tfrac{1}{5}\omega + \cos. \tfrac{1}{5}\omega).$$

Hic autem ob $\omega = \frac{5\pi}{4}$ erit

$$\tfrac{1}{5}\omega = \tfrac{\pi}{4} = 45^\circ \text{ et } e^{\frac{1}{5}\omega} = 2,1933 \text{ et}$$
$$e^{-\frac{1}{5}\omega} = 0,4559,$$

hincque fiet

$$y = 3,6075 - 2576 \cdot 0,4559 = -1171.$$

III. Sit $u = \frac{2}{5}$ seu $s = \frac{2}{5}a$, erit

$$y = (e^{\frac{2}{5}\omega} + \sin. \tfrac{2}{5}\omega + \cos. \tfrac{2}{5}\omega)$$
$$- e^{2\omega}(e^{-\frac{2}{5}\omega} - \sin. \tfrac{2}{5}\omega + \cos. \tfrac{2}{5}\omega).$$ Iam ob

$\omega =$

$\omega = \frac{5\pi}{4}$ erit $\frac{2}{5}\omega = \frac{1}{2}\pi = 90°$ et

$$e^{\frac{2}{5}\omega} = 4,8104 \text{ et } e^{-\frac{2}{5}\omega} = 0,2079,$$

hincque colligitur:

$$y = 5,8104 + 2576.0,7921 = 0,2079.$$

IV. Sit nunc $u = \frac{3}{5}$, fiue $s = \frac{3}{5}a$, eritque

$$y = (e^{\frac{3}{5}\omega} + \text{fin.}\tfrac{3}{5}\omega + \text{cof.}\tfrac{3}{5}\omega) - e^{2\omega}(e^{-\frac{3}{5}\omega} - \text{fin.}\tfrac{3}{5}\omega + \text{cof.}\tfrac{3}{5}\omega),$$

vbi eft

$\frac{3}{5}\omega = \frac{3}{4}\pi = 135°$, ideoque

$e^{\frac{3}{5}\omega} = 10,550$ et $e^{-\frac{3}{5}\omega} = 0,0948$, hincque erit

$$y = 10,550 + 2576.1,3194 = 3387.$$

V. Sit nunc $u = \frac{4}{5}$, feu $s = \frac{4}{5}\omega$, ac fiet

$$y = (e^{\frac{4}{5}\omega} + \text{fin.}\tfrac{4}{5}\omega + \text{cof.}\tfrac{4}{5}\omega) - e^{2\omega}(e^{-\frac{4}{5}\omega} - \text{fin.}\tfrac{4}{5}\omega + \text{cof.}\tfrac{4}{5}\omega)$$

et ob

$$\tfrac{4}{5}\omega = \pi = 180°,\; e^{\frac{4}{5}\omega} = 23,140 \text{ et } e^{-\frac{4}{5}\omega} = 0,0432$$

erit

$$y = 22,140 + 2576.0,9568 = 2487.$$

Talis igitur forma quam virga inter vibrandum recipiet in Tabula (fig. 7.) exhibetur, vbi neminem offendat magnitudo applicatarum, quippe quae per numerum quempiam praegrandem diuifae funt intelligendae. Haec ergo curua non nifi vnicum habet nodum in puncto O, vnde fatis tuto concludere licet, fequentem curuam, quae ex valore $\omega = \frac{9\pi}{4}$ nafcitur, habituram effe duos nodos, fequentem tres, et ita porro. Tab. II. Fig. 7.

Euolutio casus III.

quo alter terminos liber, alter vero muro firmiter infixus statuitur.

Problema.

§. 30. *Si virga elastica in termino E fuerit libera, in altero autem termino F quasi muro infixa, inuestigare omnes vibrationes regulares, quibus ea contremiscere potest.*

Solutio.

Conditio ad terminum E pertinens statim nobis praebet vt ante $\gamma = \alpha - \beta$ et $\delta = \alpha + \beta$; tum vero, posito $s = a$ factoque $\frac{a}{f} = \omega$, debet esse tam $y = 0$, quam $\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0$; vnde istas deducimus aequationes:

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \sin. \omega + \delta \cos. \omega = 0 \text{ et}$$
$$\alpha e^{\omega} - \beta e^{-\omega} + \gamma \cos. \omega - \delta \sin. \omega = 0,$$

in quibus si loco γ et δ valores inuenti substituantur, prodibunt sequentes:

$$\alpha (e^{\omega} + \sin. \omega + \cos. \omega) + \beta (e^{-\omega} - \sin. \omega + \cos. \omega) = 0 \text{ et}$$
$$\alpha (e^{\omega} + \cos. \omega - \sin. \omega) - \beta (e^{-\omega} + \cos. \omega + \sin. \omega) = 0,$$

hincque duplici modo elicitur:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-e^{-\omega} + \sin. \omega - \cos. \omega}{e^{\omega} + \sin. \omega + \cos. \omega} = \frac{e^{-\omega} + \cos. \omega + \sin. \omega}{e^{\omega} + \cos. \omega - \sin. \omega}.$$

Ponatur iterum, vti hactenus fecimus, $\sin. \omega + \cos. \omega = p$ et $\sin. \omega - \cos. \omega = g$, vt habeamus

$$\frac{-e^{-\omega} + q}{e^{\omega} + p} = \frac{e^{-\omega} + p}{e^{\omega} - q},$$

cuius

cuius aequationis resolutio praebet

$$2 + (p - q)(e^{\omega} + e^{-\omega}) + pp + qq = 0,$$

vnde ob

$$pp + qq = 2 \text{ et } p - q = 2 \operatorname{cof.} \omega \text{ reperitur}$$

$$\operatorname{cof.} \omega = \frac{-2}{e^{\omega} + e^{-\omega}},$$

vnde patet Cofinum anguli ω femper fore negatiuum, ideoque angulum ω in quadrantibus fecundo et tertio, item fexto et feptimo, item decimo et vndecimo, etc. quaeri debere. Ex cognito autem cofinu ω concluditur vel

$$\operatorname{fin.} \omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}, \text{ vel } \operatorname{fin.} \omega = \frac{-e^{\omega} + e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}},$$

quos duos cafus follicite a fe inuicem diftingui oportet. At ex priore cafu colligitur:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1 - e^{-2\omega} + e^{\omega} - e^{-\omega}}{-1 + e^{2\omega} + e^{\omega} - e^{-\omega}} = \frac{1}{e^{\omega}};$$

ex altero autem valore ipfius fin. ω colligitur $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{e^{\omega}}$.

Rite igitur his cafibus combinandis impetrabimus fequentes valores:

$$\alpha = 1, \; \beta = \pm e^{\omega}, \; \gamma = 1 \mp e^{\omega} \text{ et } \delta = 1 \pm e^{\omega},$$

quibus fubftitutis aequatio pro hoc motu fimplici erit

$$y = C \operatorname{fin.} (\zeta + t \sqrt{\tfrac{2g}{k}})$$

$$(e^{u\omega} \pm e^{\omega(1-u)} + (1 \mp e^{\omega}) \operatorname{fin.} u\omega + (1 \pm e^{\omega}) \operatorname{cof.} u\omega),$$

vbi, vt hactenus, denotat u fractionem $\frac{s}{a}$, denique erit vt ante

$$f = \frac{a}{\omega}, \; k = \frac{a^4}{bcc\omega^4}, \; \sqrt{\tfrac{2g}{k}} = \frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa},$$

tempus

tempus vnius oscillationis $= \frac{\pi a a}{\omega \omega c \sqrt{2gb}}$ et sonus editus $= \frac{\omega \omega c \sqrt{2gb}}{\pi a a}$.

Valores anguli ω in corollariis inuestigabimus.

Corollarium 1.

§. 31. Pro secundo quadrante ponamus $\omega = \rho + \Phi$, vbi ρ iterum est character anguli recti, eritque cos. $\omega = -$ sin. Φ, ita vt esse debeat

$$\sin.\Phi = \frac{2}{e^{\omega} + e^{-\omega}} = \frac{2}{e^{\rho+\Phi} + e^{-\rho-\Phi}};$$

vnde fieri debet

$$e^{\rho+\Phi}\sin.\Phi + e^{-\rho-\Phi}\sin.\Phi = 2.$$

Est vero per series

$$e^{\rho+\Phi} = e^{\rho}(1 + \Phi + \tfrac{1}{2}\Phi\Phi + \tfrac{1}{6}\Phi^3) \text{ et}$$
$$e^{-\rho-\Phi} = e^{-\rho}(1 - \Phi + \tfrac{1}{2}\Phi\Phi - \tfrac{1}{6}\Phi^3);$$

quare cum sit sin. $\Phi = \Phi - \frac{1}{6}\Phi^3$, erit

$$e^{\rho}(\Phi + \Phi\Phi + \tfrac{1}{3}\Phi^3) + e^{-\rho}(\Phi - \Phi\Phi + \tfrac{1}{3}\Phi^3) = 2.$$

Hinc si altiores ipsius Φ potestates negligantur, erit

$$\Phi = \frac{2}{e^{\rho} + e^{-\rho}}; \text{ vbi notetur esse}$$

$$e^{\rho} = e^{\frac{1}{2}\pi} = 4,8104 \text{ et } e^{-\rho} = 0,2079,$$

ita vt sit

$$\sin.\Phi = \frac{2}{5,0183} = \frac{1}{2,50915}, \text{ hinc } \Phi = 23°, 29'.$$

Cum igitur sit $\Phi = 0,3985$, admittamus etiam potestatem $\Phi\Phi$, eiusque loco scribamus $0,3985^2$, quo facto erit

$$\Phi = \frac{2}{e^{\rho}\,1,3985 + e^{-\rho}\,0,6015} = \frac{2}{6,8524} = \frac{1}{3,4262},$$

vnde

vnde fit $\Phi = 16°, 58'$. Hic autem angulus adhuc minor prodiret, ſi etiam cubi Φ^3 rationem haberemus: interim tamen haec methodus nimis eſt incerta, vt tantum vero proxime angulum Φ elicere queamus, vnde aliam methodum ingredi conuenit.

Corollarium 2.

§. 32. Quando angulus Φ, iam propemodum eſt cognitus, conuertatur is in minuta ſecunda, quorum numerus ſit n; hinc quaeratur idem arcus Φ in partibus radii, et cum ſit $\pi = 180° = 648000''$, fiat vt $648000'' : \pi$, ita n'' ad arcum, qui ſit $= m$, eritque $m = \frac{n\pi}{648000}$, hincque

$$l\,m = l\,n - 5,3144251, \text{ ſiue } l\,m = l\,n + 4,6855749;$$

tum igitur erit $\Phi = m$, et eſſe oportet

$$\text{ſin. } \Phi = \frac{2}{e^{\varrho + m} + e^{-\varrho - m}}.$$

Hinc iam pro lubitu ſumatur aliquis valor pro Φ, multum a veritate abludens, verbi gratia $\Phi = 12°$, eritque $n = 43200''$, vnde reperitur $m = 0,20944$. Cum ergo ſit

$$\varrho = \tfrac{\pi}{2} = 1,57079, \text{ erit } \varrho + m = 1,78023, \text{ hinc}$$

$$l\,e^{\varrho + m} = 1,78023 \times 0,43429 = 0,77314,$$

ſicque erit

$$e^{\varrho + m} = 5,9312 \text{ et } e^{-\varrho - m} = 0,1686;$$

quocirca debebit eſſe

$$\text{ſin. } 12° = \frac{2}{6,0998} = \frac{1}{3,0499}; \text{ eſt vero}$$

$$l\,\text{ſin. } 12° = 9,31788 \text{ et } l\,\frac{1}{3,0499} = 9,51572,$$

qui poſterior logarithmus quia nimis eſt magnus, ſignum eſt angulum Φ maiorem accipi debere. Medium inter hos

 duos

duos valores praebet $\Phi = 15^\circ = \frac{\pi}{12}$, vnde ſtatim colligitur

$$m = 0,26180, \text{ hinc } \varrho + m = 1,83259 \text{ et}$$

$$l\, e^{\varrho + m} = 1,83259 . 0,43429 = 0,79405, \text{ ergo}$$

$$e^{\varrho + m} = 6,22380 \text{ et } e^{-\varrho - m} = 0,16067,$$

conſequenter

$$\text{ſin. } 15^\circ = \frac{2}{6,38447} = \frac{1}{3,19223}; \text{ eſt vero}$$

$$l\,\text{ſin. } 15^\circ = 9,412996 \text{ et } l\frac{1}{3,19223} = 495905.$$

Si ergo pro ſin. Φ, medium inter hos valores accipiamus, reperietur $\Phi = 16^\circ. 33$. Quia igitur ſuperius medium erat nimis paruum, etiam hoc erit aliquantillo nimis paruum, vnde ſatis tuto concludimus fore $\Phi = 16^\circ. 45'$, id quod pro noſtro inſtituto ſufficit, eritque ergo

$$\omega = \varrho + 16^\circ. 45' = 106^\circ. 45',$$

ſiue erit proxime $\omega = \frac{3}{5}\pi$, ita vt ſonus hinc oriundus prodeat $= \frac{9\pi c \sqrt{2gb}}{25\, a\, a}$, qui eſt fundamentalis pro hoc caſu, et ſe habet ad fundamentalem caſus primi vt $\frac{9}{25}$ ad $\frac{9}{4}$, hoc eſt vt 4 ad 25, ſeu vt 1 ad $6\frac{1}{4}$, ita vt iſte ſonus ſit fere duabus octauis cum ſemiſſe grauior quam primo caſu; vnde

Tab. II. Fig. 8. ſi ſonus iſte fuerit C, ſonus primi caſus ſit $\overline{gis}$, ſonus autem ſecundi caſus $\overline{\overline{d}}$. Hunc autem motum figura octaua repraeſentat.

Corollarium 3.

§. 33. In tertio quadrante reperiemus ſecundum ſonum, ponendo $\omega = 3\varrho - \Phi$, vnde fit

$$\text{ſin. } \Phi = \frac{2}{e^{3\varrho - \Phi} + e^{-3\varrho + \Phi}},$$

et

et quia angulus ϕ negligi poteſt, hinc ſequitur, vti ſupra §. 17. angulum ϕ vix vnum gradum ſuperare, ita vt pro noſtro inſtituto penitus negligi queat. Sequentes vero valores ipſius ω erunt 5ϱ, 7ϱ, 9ϱ, etc. ita vt ſoni ex omnibus his valoribus oriundi ſint:

$$\frac{9\pi c\sqrt{2gb}}{4aa},\ \frac{25\pi c\sqrt{2gb}}{4aa},\ \frac{49\pi c\sqrt{2gb}}{4ba},\ \frac{81\pi c\sqrt{2gb}}{4aa},\ \text{etc.}$$

vnde patet, poſt ſonum fundamentalem ſequentes omnes prorſus conuenire cum iis, quos eadem virga caſu primo edebat.

Scholion.

§. 34. Quodſi iam omnes valores anguli ω deſignentur per ω, ω', ω'', ω''' etc., et loco $\frac{s}{a}$ ſcribatur u, aequatio generalis, omnes plane ſonos ſeu motus mixtos complectens, erit

$$\begin{aligned}
y = {} & C\ \text{ſin.}\left(\zeta + t\,\frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa}\right) \\
& \quad \left(e^{u\omega} \pm e^{\omega(1-u)} + (1 \mp e^{\omega})\ \text{ſin.}\, u\omega + (1 \pm e^{\omega})\ \text{coſ.}\, u\omega\right) \\
& + C'\ \text{ſin.}\left(\zeta' + t\,\frac{\omega'\omega' c\sqrt{2gb}}{aa}\right) \\
& \quad \left(e^{u\omega'} \pm e^{\omega'(1-u)} + (1 \mp e^{\omega'})\ \text{ſin.}\, u\omega' + (1 \pm e^{\omega})\ \text{coſ.}\, u\omega'\right) \\
& + C''\ \text{ſin.}\left(\zeta'' + t\,\frac{\omega''\omega'' c\sqrt{2gb}}{aa}\right) \\
& \quad \left(e^{u\omega''} \pm e^{\omega''(1-u)} + (1 \mp e^{\omega''})\ \text{ſin.}\, u\omega'' + (1 \pm e^{\omega''})\ \text{coſ.}\, u\omega''\right) \\
& \qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

vbi ſignorum ambiguorum ſuperiora valent pro iis angulis ω, ω', ω'', quorum ſinus ſunt poſitiui, inferiora autem pro negatiuis.

Euolutio

Euolutio casus IV.

quo virgae vterque terminus simpliciter stylo est fixus.

Problema.

§. 35. *Si virgae elasticae tam terminus* E *quam* F *simpliciter fuerit fixus, inuestigare omnes motus, quibus ea contremiscere potest.*

Solutio.

Posito igitur tam $s = o$ quam $s = a$, vtroque casu fieri oportet et $y = o$ et $(\frac{ddy}{ds^2}) = o$; ex priore casu hae deducuntur aequationes:

$$1°)\ \alpha + \beta + \delta = o, \text{ et } 2°)\ \alpha + \beta - \delta = o,$$

ex quibus statim colligitur

$$\alpha + \beta = o \text{ et } \delta = o, \text{ ideoque } \beta = -\alpha.$$

Alter vero casus, quo $s = a$, ponendo $\frac{a}{f} = \omega$, has suppeditat aequationes:

$$3°)\ \alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \text{ fin. } \omega + \delta \text{ cof. } \omega = o \text{ et}$$

$$4°)\ \alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} - \gamma \text{ fin. } \omega - \delta \text{ cof. } \omega = o,$$

quae, superioribus valoribus substitutis, reducuntur ad has:

$$\alpha (e^{\omega} - e^{-\omega}) + \gamma \text{ fin. } \omega = o \text{ et } \alpha (e^{\omega} - e^{-\omega}) - \gamma \text{ fin. } \alpha\, \omega = o,$$

quarum summa praebet

$$2\,\alpha (e^{\omega} - e^{-\omega}) = o, \text{ ideoque } \alpha = o,$$

differentia vero dat $2\gamma \text{ fin. } \omega = o$, vnde si sumeremus $\gamma = o$, tota virga in quiete esset mansura; necesse igitur

est

eſt vt ſit ſin. $\omega = 0$. Hinc ergo ſtatim innoteſcunt omnes valores pro angulo ω, quippe qui ſunt:

$$\omega = 0,\ \omega = \pi,\ \omega = 2\pi,\ \omega = 3\pi,\ \omega = 4\pi \text{ etc.}$$

quorum primus locum habet in ſtatu quietis, ſecundus autem ſonum fundamentalem hoc caſu exhibet, ex quo, vt in praecedentibus caſibus, oriuntur ſequentes ſoni:

$$\frac{\pi c\sqrt{2gb}}{aa},\ \frac{4\pi c\sqrt{2gb}}{aa},\ \frac{9\pi c\sqrt{2gb}}{aa},\ \frac{16\pi c\sqrt{2gb}}{aa} \text{ etc.}$$

qui igitur ſoni ſecundum numeros quadratos 1, 4, 9, 16 aſcendunt, ita vt, ſi fundamentalis fuerit C, iſti ſoni conſtituant hanc ſeriem: C, $\overline{c}$, $\overline{\overline{d}}$, $\overline{\overline{\overline{c}}}$, $\overline{\overline{\overline{\overline{gis}}}}$, $\overline{\overline{\overline{d}}}$, etc. Quod ſi ergo omnes iſtos motus generaliter coniungamus, formula generalis, omnes plane motus, quos virga noſtra recipere poteſt, complectens, erit

$$y = C \sin.\left(\zeta + t\frac{\pi\pi c\sqrt{2gb}}{aa}\right)\sin.\pi u + C' \sin.\left(\zeta' + t\frac{4\pi\pi c\sqrt{2gb}}{aa}\right)\sin.2\pi u$$
$$+ C'' \sin.\left(\zeta'' + t\frac{9\pi\pi c\sqrt{2bg}}{aa}\right)\sin.3\pi u + C''' \sin.\left(\zeta''' + t\frac{16\pi\pi c\sqrt{2gb}}{aa}\right)\sin.4\pi u$$
$$+ \text{ etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

vbi ſcripſimus u loco $\frac{s}{a}$.

Corollarium 1.

§. 36. Quando ergo virga ſonum edit fundamentalem, eandem recipiet curuaturam quam chordae ſimpliciter vibrantes, quippe quae erit linea ſinuum, qualem figura prima refert. Pro ſono autem ſimplici ſecundo, quo $\omega = 2\pi$, figura chordae erit (fig. 2), habens vnum nodum in medio O. Pro ſequentibus autem ſonis ſimplicibus numerus nodorum ſemper vnitate augetur. Tab. III. Fig. 1.

Corollarium 2.

§. 37. Quodsi sonos fundamentales omnium horum quatuor casuum, quos hactenus tractauimus, inter se comparemus, iam vidimus, si sonus primi casus exprimatur per $\overline{gis}$, pro secundo casu eum fore $\overline{d}$, ac pro tertio C, qui soni his numeris exprimuntur: $\frac{9}{4}$, $\frac{25}{16}$, $\frac{9}{25}$. Hinc cum praesenti casu quarto sonus fundamentalis exprimatur vnitate, sonus erit *fis*; seriem igitur hoc modo referamus:

I. $\frac{9}{4}$.	II. $\frac{25}{16}$.	III. $\frac{9}{25}$.	IV. 1.
$\overline{gis}$	$\overline{d}$	C	*fis*

Scholion.

§. 38. Hic igitur casus, quo vterque virgae terminus simpliciter est fixus, prae reliquis hac insigni gaudet praerogatiua, quod omnes valores anguli ω accurate sine vllo errore definire licuit, propterea quod formulae exponentiales, quae hanc determinationem turbabant et non parum irregularem reddebant, penitus ex calculo euanuerunt; vnde soni hoc casu editi multo magis ad harmoniam sunt accommodati, et quidem adhuc magis quam in chordis simplicibus vsu venit. Cum enim soni ab eadem chorda editi secundum numeros 1, 2, 3, 4 etc. progrediantur, fere semper plures horum sonorum simul audiuntur, inter quos etiam non parum dissoni occurrere possunt. Verum quia a nostra virga alii soni edi non possunt, nisi qui numeris 1, 4, 9, 16, 25 exprimuntur, praeter fundamentalem potissimum exaudietur eius duplex octaua, harmoniam nihil turbans, postea vero sequetur sonus numero 9 respondens, qui, cum funda-

menta-

mentalem vltra tres octauas ſuperet, ob nimium acumen vix vnquam audietur, ita vt tantum duplex octaua ſimul cum fundamentali tinniat. Talis igitur virga ſonos multo puriores reddere eſt cenſenda quam chordae ſimplices, vnde etiam ſoni hoc modo editi in muſica peculiarem ſuauitatem habere debebunt.

Euolutio caſus V.

quo virgae elaſticae alter terminus ſimpliciter eſt fixus, alter vero quaſi muro firmiter infixus.

Problema.

§. 39. *Si virgae elaſticae terminus* E *fuerit ſimpliciter fixus, alter vero* F *prorſus infixus, inueſtigare omnes motus, quibus ea contremiſcere poteſt.*

Solutio.

Quia terminus E, vbi fit $s = 0$, ſimpliciter eſt fixus, habebimus ſtatim, vti in caſu praecedente, $\beta = -\alpha$ et $\delta = 0$; pro altero autem termino, vbi $s = a$, erit tam $y = 0$ quam $\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0$, vnde poſito $\frac{a}{f} = \omega$ oriuntur hae duae aequationes:

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \text{ ſin. } \omega + \delta \text{ coſ. } \omega = 0,$$
$$\alpha e^{\omega} - \beta e^{-\omega} + \gamma \text{ coſ. } \omega - \delta \text{ ſin. } \omega = 0,$$

quae, ſubſtitutis praecedentibus valoribus, abeunt in has:

$$\alpha (e^{\omega} - e^{-\omega}) + \gamma \text{ ſin. } \omega = 0 \text{ et}$$
$$\alpha (e^{\omega} + e^{-\omega}) + \gamma \text{ coſ. } \omega = 0.$$

Ex

Ex priore fit

$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{-\sin.\omega}{e^{\omega} - e^{-\omega}}$, ex altera vero $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{-\cos.\omega}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$;

ex quibus porro colligitur tang. $\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$, quae formula plane conuenit cum ea, quam casu secundo inuenimus, eritque idcirco, vt ibi, vel

$$\sin.\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}} \text{ et } \cos.\omega = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}}, \text{ vel}$$

$$\sin.\omega = \frac{-e^{\omega} + e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}} \text{ et } \cos.\omega = \frac{-e^{\omega} - e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}}.$$

Ex prioribus valoribus elicitur $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{-1}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}}$, ex alteris autem valoribus fit $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{+1}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}}$; vnde his binis casibus coniungendis habebimus $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \mp\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}$ et $\delta = 0$; vbi vt hactenus signorum ambiguorum superius valet, si anguli ω tam sinus quam cosinus fuerint positiui, inferius autem si ambo fuerint negatiui, vnde pro quouis valore ω habebitur

$$y = C\sin.(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}})(e^{u\omega} - e^{-u\omega} \mp \sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}\sin.u\omega);$$

praeterea vero vt hactenus erit $\frac{\sqrt{2g}}{k} = \frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa}$, tempus vnius oscillationis $= \frac{\pi aa}{\omega\omega c\sqrt{2gb}}$ et sonus editus $= \frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{\pi aa}$.

Corollarium 1.

§. 40. Quia aequatio resoluenda: tang. $\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$ prorsus conuenit cum ea, quam casu secundo iam resoluimus

mus omnes valores anguli ω erunt, vt ibi, ſequentes:

$$\omega = \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \text{ etc.}$$

vnde etiam omnes ſoni ſimplices, quos haec virga edere poteſt, ſequentibus numeris exprimentur:

$$\frac{25\pi c\sqrt{2gb}}{16aa};\ \frac{81\pi c\sqrt{2gb}}{16aa};\ \frac{169\pi c\sqrt{2gb}}{16aa};\ \frac{289\pi c\sqrt{2gb}}{16aa};\ \text{etc.}$$

quorum primus etiam pro fundamentali habetur, et ſecundum ſuperiorem determinationem reſpondet claui $\overline{\overline{d}}$ (vide §. 32.)

Corollarium 2.

§. 41. Quanquam autem hic caſus eosdem plane ſonos ſimplices producit, quos caſu ſecundo inuenimus, tamen ipſa virga maxime diuerſas recipit figuras. Ita pro ſono fundamentali, vbi $\omega = \frac{5\pi}{4}$, ideoque tam ſinus quam coſinus ſunt negatiui, ſcilicet ſin. $\omega =$ coſ. $\omega = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, omiſſo coefficiente erit

$$y = - - - - e^{u\omega} - e^{-u\omega} + \sqrt{2}\,(e^{2\omega} + e^{-2\omega})\ \text{ſin.}\ u\omega,$$

qui valor pro vtroque termino $u = 0$ et $u = 1$ fit $= 0$. Pro reliqua figura cognoſcenda, quia ſupra iam vidimus eſſe $e^{2\omega} = e^{\frac{5}{2}\pi} = 2576$, erit $\sqrt{2}\,(e^{2\omega} + e^{-2\omega}) = 72$, proxime. Tribuamus igitur literae u ſequentes valores: $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$, et pro ſingulis ſequentes valores ipſius y prodibunt:

I. Si $u = \frac{1}{5}$, erit $u\omega = \frac{\pi}{4} = 45°$ et $y = 1,7374 + \frac{72}{\sqrt{2}} = 58$ proxime;
II. Sit $u = \frac{2}{5}$, erit $u\omega = \frac{\pi}{2} = 90°$ et $y = 4,6025 + 72 = 76$ proxime;
III. Si $u = \frac{3}{5}$, erit $u\omega = \frac{3\pi}{4} = 135°$ et $y = 10,46 + \frac{72}{\sqrt{2}} = 61$ proxime; Tab. III. Fig. 3.
IV. Sit $u = \frac{4}{5}$, erit $u\omega = \pi = 180°$ et $y = 23,10 + 0 = 23$ proxime.

Iſta figura repraeſentatur per figuram tertiam.

Scholion.

§. 42. Vt iam omnes plane motus ex inuentis ſimplicibus concinne repraeſentemus; pro formula irrationali $\sqrt{2(e^{2\omega}+e^{-2\omega})}$ ſcribamus characterem Ω, cui pro variis valoribus ω, ω', ω'', ω''' etc. tribuamus valores Ω, Ω', Ω'', Ω''' etc. et ſcribendo, vt hactenus, u loco $\frac{s}{a}$, aequatio generalis erit:

$$\begin{aligned} y = {} & C \text{ ſin.} \left(\zeta + \tfrac{\omega\omega c \sqrt{2gb}}{aa} t\right) \left(e^{\omega} - e^{-\omega} \mp \Omega \text{ ſin. } u\,\omega\right) \\ & + C' \text{ ſin.} \left(\zeta' + \tfrac{\omega'\omega' \sqrt{2gb}}{aa} t\right) \left(e^{\omega'} - e^{-\omega'} \mp \Omega' \text{ ſin. } u\,\omega'\right) \\ & + C'' \text{ ſin.} \left(\zeta'' + \tfrac{\omega''\omega'' \sqrt{2gb}}{aa} t\right) \left(e^{\omega''} - e^{-\omega''} \mp \Omega'' \text{ ſin. } u\,\omega''\right) \\ & + C''' \text{ ſin.} \left(\zeta''' + \tfrac{\omega'''\omega''' \sqrt{2gb}}{aa} t\right) \left(e^{\omega'''} - e^{-\omega'''} \mp \Omega''' \text{ ſin. } u\,\omega'''\right) \\ & \quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

vbi ſignum ſuperius valet pro angulis ω, ω', ω'' etc. quorum ſinus et coſinus ſunt poſitiui, inferius autem vbi ſunt negatiui.

Euolutio caſus VI.

quo virgae elaſticae vterque terminus firmiter quaſi muro eſt infixus.

Problema.

§. 43. *Si virgae elaſticae vterque terminus firmiter fuerit infixus, inueſtigare motus, quibus ea contremiſcere poteſt.*

Solutio.

Hoc igitur caſu pro vtroque termino debet eſſe tam $y = 0$ quam $\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0$; pro priore termino ergo habebibebimus has aequationes:

$$\alpha + \beta + \delta = 0 \text{ et } \alpha - \beta + \gamma = 0,$$

vnde conſequimur $\delta = -\alpha - \beta$ et $\gamma = -\alpha + \beta$; poſterior vero, quo $s = a$ et $\frac{a}{f} = \omega$, praebet

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \,\text{ſin.}\, \omega + \delta \,\text{coſ.}\, \omega = 0 \text{ et}$$
$$\alpha e^{\omega} - \beta e^{-\omega} + \gamma \,\text{coſ.}\, \omega - \delta \,\text{ſin.}\, \omega = 0;$$

vbi ſi priores valores ſubſtituantur, orientur hae aequationes:

$$\alpha (e^{\omega} - \text{ſin.}\, \omega - \text{coſ.}\, \omega) + \beta (e^{-\omega} + \text{ſin.}\, \omega - \text{coſ.}\, \omega) \text{ et}$$
$$\alpha (e^{\omega} - \text{coſ.}\, \omega + \text{ſin.}\, \omega) - \beta (e^{-\omega} - \text{coſ.}\, \omega - \text{ſin.}\, \omega);$$

vnde duplici modo colligitur

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-e^{-\omega} - \text{ſin.}\, \omega + \text{coſ.}\, \omega}{e^{\omega} - \text{ſin.}\, \omega - \text{coſ.}\, \omega} = \frac{e^{-\omega} - \text{ſin.}\, \omega - \text{coſ.}\, \omega}{e^{\omega} + \text{ſin.}\, \omega - \text{coſ.}\, \omega},$$

qui valores cum prorſus conueniant cum iis, quos caſu primo ſumus nacti, inde etiam ſequitur fore $\text{coſ.}\, \omega = \frac{2}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$; ſicque etiam omnes valores anguli ω iidem erunt, qui primo caſu iam ſunt exhibiti, ſcilicet $\omega = \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$, etc. vnde etiam iſta virga eosdem edet ſonos, qui erunt:

$$\frac{9\pi c\sqrt{2gb}}{4aa};\ \frac{25\pi c\sqrt{2gb}}{4aa};\ \frac{49\pi c\sqrt{2gb}}{4aa};\ \frac{81\pi c\sqrt{2gb}}{4aa};\ \text{etc.}$$

Praeterea vero etiam erit $\text{ſin.}\, \omega = \pm \frac{(e^{\omega} - e^{-\omega})}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$, vbi ſignum ſuperius valet pro caſibus vbi ſinus eſt poſitiuus, inferius ſi negatiuus; vnde porro obtinemus $\alpha = 1$, $\beta = \mp e^{\omega}$, hincque porro $\gamma = -(1 \pm e^{\omega})$ et $\delta = -(1 \mp e^{\omega})$. Aequatio igitur pro motu a caſu primo in eo tantum differt, quod hic coefficientes γ et δ contraria ſigna ſunt nacti;

ſicque

ſicque, ſi ω, ω', ω'', ω''' denotent omnes valores ipſius ω, aequatio generalis, omnes motus virgae complectens, erit:

$$y = C \sin.\left(\zeta + t\,\frac{\omega\omega c \sqrt{2gb}}{aa}\right)$$
$$\left(e^{u\omega} \mp e^{\omega(1-u)} - (1 \pm e^{\omega}) \sin. u\omega - (1 \mp e^{\omega}) \cos. u\omega\right)$$
$$+ C' \sin.\left(\zeta' + t\,\frac{\omega'\omega' c \sqrt{2gb}}{aa}\right)$$
$$\left(e^{u\omega'} \mp e^{\omega'(1-u)} - (1 \pm e^{\omega'}) \sin. u\omega' - (1 \mp e^{\omega'}) \cos. u\omega'\right)$$
$$+ C'' \sin.\left(\zeta'' + t\,\frac{\omega''\omega'' c \sqrt{2gb}}{aa}\right)$$
$$\left(e^{u\omega''} \mp e^{\omega''(1-u)} - (1 \pm e^{\omega''}) \sin. u\omega'' - (1 \mp e^{\omega''}) \cos. u\omega''\right).$$

etc. etc. etc.

Corollarium I.

§. 44. Quanquam autem omnes motus cum caſu primo perfecte conueniunt: tamen figura, quam virga inter vibrandum recipit, toto coelo eſt diuerſa. Ad quod oſtendendum euoluamus figuram pro ſono fundamentali, vbi eſt $\omega = \frac{3\pi}{2}$, cuius ſinus cum ſit negatiuus, ſigna valebunt inferiora, eritque omiſſo coefficiente

$$y = - - - - e^{u\omega} + e^{\omega(1-u)} - (1 - e^{\omega}) \sin. u\omega - (1 + e^{\omega}) \cos. u\omega,$$

vbi eſt $e^{\omega} = 111$. Nunc autem ipſi ω tribuamus duos valores $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, ac reperiemus:

I. Si $u = \frac{1}{3}$, $u\omega = \frac{1}{2}\pi = 90°$ et $e^{u\omega} = 4,8104$ et $e^{-u\omega} = 0,2079$

hincque $y = 4,8104 + 23,0769 + 110 = 138$.

II. Si $u = \frac{2}{3}$, erit $u\omega = \pi = 180°$ et $e^{u\omega} = 23,140$ et $e^{\omega(1-u)} = 4,810$,

hincque $y = 23,140 + 4,810 + 112 = 140$. Hi autem duo valores, ſi calculum accuratius inſtituiſſemus, prodiiſſent aequales. Curua igitur, quam virga hoc caſu induit, habebit figuram $ErsF$, fig. 4 repraeſentata. Pro ſequentibus

Tab. III. Fig. 4.

tibus autem ſonis ſimplicibus vel vnus nodus, vel duo, vel tres ſucceſſiue ingredientur.

Corollarium 2.

§. 45. Ope formularum, quas pro ſingulis his caſibus eruimus, non ſolum omnes ſoni, quos eadem virga elaſtica, diuerſimode conſtituta, edere valet, inter ſe comparari poſſunt, ſed etiam ſoni diuerſarum virgarum, quae tam longitudine quam craſſitie inter ſe diſcrepant, diiudicari poſſunt, dummodo craſſities in omnibus fuerit ſimilis: veluti ſi virgae fuerint cylindricae, quo caſu craſſities cuiusque circulo repraeſentatur; ſi enim talium virgarum diameter craſſitiei fuerit $= c$, longitudo $= a$, tum ſub ſimilibus circumſtantiis ſoni erunt vt $\frac{c}{aa}$, hoc eſt directe vt diameter craſſitiei et reciproce vt quadratum longitudinis, ita vt quo craſſior fuerit virga pro eadem longitudine, ſonus edatur tanto acutior; contra vero quo longior fuerit virga pro eadem craſſitie, eo grauior ſonus ſit prodíturus, idque in ratione duplicata.

Scholion.

§. 46. Hic ſcilicet aſſumſimus, in diuerſis virgis craſſitiem ſimilem figuram habere, veluti circularem, quippe quo caſu virgae ſunt cylindricae et verſus omnes plagas aequaliter inflexioni reſiſtunt. Verum etiam noſtrae formulae ad eiusmodi virgas applicari poſſunt, quarum craſſities alia quacunque figura exhibetur. Ad quod oſtendendum conſideremus eiusmodi virgam, cuius ſectiones transuerſales ad longitudinem normaliter factae ſint parallelogramma rectangula A B C D, in quibus ergo duplex Tab. III. Fig. 5.

 po-

potissimum inflexio locum habere potest, quarum altera fit secundum axem A B, quando scilicet lineae A C et B D circa hunc axem inflectuntur; altera autem inflexio principalis fieri potest circa axem A C. Illo casu litera nostra c, quae in superioribus formulis inest, aequabitur lateri A C, posteriore vero casu lateri A B, vtroque vero casu alterum latus plane non in computum venitur. Litera enim b pendet, vti iam supra notauimus, ab elasticitate absoluta materiae, ex qua virgae sunt fabricatae. Ita si virga, cuius longitudo est $= a$, incuruetur circa axem A B, sonus editus erit vt $\frac{AC}{aa}$; at si virga incuruetur circa axem
Tab. III. Fig. 6. A C, sonus editus erit vt $\frac{AB}{aa}$, si scilicet reliquae circumstantiae fuerint pares. At si sectio virgae transversalis fuerit circulus, diametro A B descriptus (fig. 6.), tum pro formulis nostris erit $c = \frac{3}{4}$ A B; vbi perinde est, circa quemnam axem fiat incuruatio. Hic quidem alios casus non sumus contemplati, nisi in quibus ambo virgae termini vel sunt liberi, vel simpliciter fixi, vel firmiter infixi. Fieri autem posset vt eadem virga insuper in vno vel pluribus locis mediis simpliciter figatur, quandoquidem hoc pacto communicatio inter motus diuersarum partium non tolleretur: sed omnium huiusmodi casuum euolutio requireret tractationem infinitam. Vt autem ratio, calculum ad huiusmodi casum applicandi, intelligatur, sufficiet vnum talem casum hic subiunxisse.

Problema.

Fig. 7. §. 47. *Si virga elastica non solum in vtroque termino E et F fuerit simpliciter fixa, sed etiam in puncto quocunque medio L ope styli figatur, inuestigare omnes motus, quibus ista virga contremiscere potest.*

So-

Solutio.

Maneat virgae tota longitudo $EF = a$, ac vocetur portio $EL = \lambda a$, ita vt λ denotare possit fractionem quamcunque vnitate minorem. Ac primo quidem patet, si virga in puncto L firmiter esset infixa, omnem plane communicationem inter ambas portiones EL et FL tolli, ita vt vtriusque motus a motu alterius neutiquam perturbetur. Verum si in puncto L tantum stylo figatur, circa quem virga gyrari possit, tum neutra pars motum recipere potest, quin cum altera is certo modo communicetur. Interim tamen hoc stilo continuitas curuae per ambas portiones interrumpitur, ita, vt portio $E\,m\,L$ alia aequatione exprimatur atque altera portio $L\,n\,F$: scilicet dum hic etiam principio tantum motus regulares inuestigamus, qui conformes sunt pendulo simplici $= k$, pro motu vtriusque portionis primus factor $C\,\text{fin.}\,(\zeta + t\sqrt{\frac{g}{k}})$ necessario idem manere debet, quoniam ambae portiones suas vibrationes eodem tempore similique modo peragere debent. Alteri autem factores diuersi esse poterunt ratione coëfficientium α, β, γ, δ. Omisso igitur primo factore vt hactenus faciamus $\frac{\alpha}{f} = \omega$ et $\frac{\beta}{a} = u$; tum vero pro portione EL statuamus

$$y = \ldots\ldots \alpha\, e^{u\omega} + \beta\, e^{-u\omega} + \gamma\,\text{fin.}\,u\omega + \delta\,\text{cof.}\,u\omega,$$

pro altera portione LF statuamus

$$y + \ldots\ldots \alpha'\, e^{u\omega} + \beta'\, e^{-u\omega} + \gamma'\,\text{fin.}\,u\omega + \delta'\,\text{cof.}\,u\omega,$$

qui coëfficientes a prioribus vtcunque discrepare possunt, dummodo obseruetur, pro puncto L, vbi fit $u = \lambda$, ex vtraque formula eosdem valores tam pro $(\frac{dy}{ds})$ quam pro $(\frac{ddy}{ds^2})$ prodire debere, quandoquidem anguli, quos vtraque portio

portio in L cum axe facit, necessario aequales esse debent; neque vero etiam radius osculi in hoc puncto L vtrinque diuersus esse potest. His obseruatis pro hoc puncto L, vbi fit $u = \lambda$, quia vtraque applicata y euanescere debet, habebimus sequentes quatuor aequationes:

$$\text{I. } \alpha e^{\lambda\omega} + \beta e^{-\lambda\omega} + \gamma \sin.\lambda\omega + \delta \cos.\lambda\omega = 0.$$

$$\text{II. } \alpha' e^{\lambda\omega} + \beta' e^{-\lambda\omega} + \gamma' \sin.\lambda\omega = \delta' \cos.\lambda\omega = 0.$$

$$\text{III. } \alpha e^{\lambda\omega} - \beta e^{-\lambda\omega} + \gamma \cos.\lambda\omega - \delta \sin.\lambda\omega$$
$$= \alpha' e^{\lambda\omega} - \beta' e^{-\lambda\omega} + \gamma' \cos.\lambda\omega - \delta' \sin.\lambda\omega. \text{ siue}$$

$$\text{III. } (\alpha - \alpha') e^{\lambda\omega} - (\beta - \beta') e^{-\lambda\omega} + (\gamma - \gamma') \cos.\lambda\omega$$
$$- (\delta - \delta') \sin.\lambda\omega = 0.$$

$$\text{IV. } (\alpha - \alpha') e^{\lambda\omega} + (\beta - \beta') e^{-\lambda\omega} - (\gamma - \gamma') \sin.\lambda\omega$$
$$- (\delta - \delta') \cos.\lambda\omega = 0.$$

Nunc igitur ad vtrumque quoque terminum spectemus, vnde etiam quatuor resultabunt aequationes, prouti fuerit vel $\lambda = 0$ vel $\lambda = 1$; terminus scilicet E, vbi $u = 0$, praebet:

$$\text{V. } \alpha + \beta + \delta = 0 \text{ et VI. } \alpha + \beta - \delta = 0,$$

terminus autem F, vbi $u = 1$, dat

$$\text{VII. } \alpha' e^{\omega} + \beta' e^{-\omega} + \gamma' \sin.\omega + \delta' \cos.\omega = 0 \text{ et}$$

$$\text{VIII. } \alpha' e^{\omega} + \beta' e^{-\omega} - \gamma' \sin.\omega - \delta' \cos.\omega = 0.$$

Nacti scilicet sumus octo aequationes pro definiendis octo coëfficientibus, α, β, γ, δ et α', β', γ', δ'; ac tum supererit adhuc aequatio, vnde angulum ω definiri apportebit. Incipiamus ab aequatione V et VI, ex quibus statim colligitur $\beta = -\alpha$ et $\delta = 0$; deinde VII et VIII, inuicem additae dant $\alpha' e^{\omega} + \beta' e^{-\omega} = 0$, subtractae vero dant

γ' sin.

$$\gamma' \sin.\omega + \delta' \cos.\omega = 0, \text{ vnde fit}$$

$$\beta' = -\alpha' e^{2\omega} \text{ et } \delta' = -\gamma' \text{tang.}\,\omega.$$

Hi valores in prima et secunda substituti praebent

$$\text{I. } \alpha(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}) + \gamma \sin.\lambda\omega = 0 \text{ et}$$

$$\text{II. } \alpha'(e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)}) + \gamma' \sin.\lambda\omega - \gamma' \cos.\lambda\omega \,\text{tang.}\,\omega = 0,$$

ex quibus aequationibus reperiuntur valores:

$$\gamma = -\alpha \frac{(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega})}{\sin.\lambda\omega} \text{ et } \gamma' = -\frac{\alpha(e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)})}{\sin.\lambda\omega - \cos.\lambda\omega\,\text{tang.}\,\omega},$$

vnde fit

$$\delta' = \frac{\alpha'(^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)})\,\text{tang.}\,\omega}{\sin.\lambda\omega - \cos.\lambda\omega\,\text{tang.}\,\omega}.$$

Ex his valoribus nunc pro reliquis aequationibus colligimus: $\beta - \beta' = -\alpha + \alpha' e^{2\omega}$ et

$$\gamma - \gamma' = -\frac{\alpha(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega})}{\sin.\lambda\omega} + \frac{\alpha'(e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)})}{\sin.\lambda\omega - \cos.\lambda\omega\,\text{tang.}\,\omega} \text{ et}$$

$$\delta - \delta' = -\frac{\alpha'(e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)})\,\text{tang.}\,\omega}{\sin.\lambda\omega - \cos.\lambda\omega\,\text{tang.}\,\omega}.$$

Nunc autem fit

$$\text{III. } \alpha((e^{\lambda\omega} + e^{-\lambda\omega}) - (e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega})\cot.\lambda\omega))$$
$$= \alpha'(e^{\lambda\omega} + e^{\omega(2-\lambda)}) - (e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)})\left(\frac{\cos.\lambda\omega + \sin.\lambda\omega\,\text{tang.}\,\omega}{\sin.\lambda\omega - \cos.\lambda\omega\,\text{tang.}\,\omega}\right),$$

quae aequatio contrahitur in sequentem formam:

$$\alpha(e^{\lambda\omega} + e^{-\lambda\omega}) - (e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega})\cot.\lambda\omega)$$
$$= \alpha'((e^{\lambda\omega} + e^{\omega(2-\lambda)}) + e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)}\cot.(1-\lambda)\omega)),$$

quarta vero aequatio praebet istam:

$$2\alpha(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}) = 2\alpha'(e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)});$$

ex hac poſtrema deducitur

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)}}{e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}},$$

vnde capere licebit

$$\alpha = e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)} \text{ et } \alpha' = e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega},$$

quos valores iam in tertia aequatione ſubſtitui oportet: vnde facta reductione prodibit

$$0 = 2 - 2e^{2\omega} - \left(e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)}\right)\left(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}\right)\left(\cot.\lambda\omega + \cot.(1-\lambda)\omega\right)$$

ſiue

$$0 = 2 - 2e^{2\omega} - \left(e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)}\right)\left(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}\right)\frac{\sin.\omega}{\sin.\lambda\omega\sin.(1-\lambda)\omega}.$$

Sicque totum negotium huc eſt perductum, vt ex iſta aequatione valores anguli ω eliciantur, quem quidem laborem, ob formulas tantopere complicatas, ſuſcipere non auſim, ſi quidem hoc loco ſufficit methodum tradidiſſe, qua huiusmodi quaeſtiones arduae ſint tractandae. Caeterum patet, ſi fuerit $\lambda = 0$, vt portio E L fiat infinite parua, nullum motum communem inter ambas partes exiſtere poſſe, id quod etiam calculus oſtendet, quippe qui praebet

$$0 = 2(1 - e^{2\omega}),$$

vnde ſequitur $e^{2\omega} = 1$, ideoque $\omega = 0$, quo valore ſtatus quietis innuitur, quod idem eueniet, ſi ſtatuatur $\lambda = 1$, tum enim terminus F erit quaſi muro infixus. At caſus, quo $\lambda = \frac{1}{2}$, ſingularem euolutionem meretur.

Euolu-

Euolutio casus,

quo virga elastica EF non solum in vtroque termino E et F, sed etiam in eius medio L stylo est fixa.

§. 48. Cum igitur hoc casu fit $\lambda = \frac{1}{2}$, aequatio finalis hanc induet formam: Tab. III. Fig. 8.

$$0 = 2 - 2e^{2\omega} - (e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{\frac{3}{2}\omega})(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}) \frac{\text{fin.}\,\omega}{\text{fin.}\,\frac{1}{2}\omega^2},$$

quae reducitur ad hanc:

$$0 = 2(1 - e^{2\omega})\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\omega^2 - (1 - e^{\omega})(e^{\omega} - 1)\,\text{fin.}\,\omega,$$

quae per factorem communem $1 - e^{\omega}$ diuisa, (quippe ex quo oriretur $e^{\omega} = 1$, hinc $\omega = 0$,) pro statu quietis producit hanc aequationem:

$$0 = 2(1 + e^{\omega})\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\omega^2 - (e^{\omega} - 1)\,\text{fin.}\,\omega,$$

quae, si loco $\text{fin.}\,\omega$ scribatur $2\,\text{fin.}\,\frac{1}{2}\omega\,\text{cof.}\,\frac{1}{2}\omega$, abit in hanc:

$$0 = (1 + e^{\omega})\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\omega^2 - (e^{\omega} - 1)\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\omega\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}\omega,$$

quae manifesto duos habet factores, alterum $\text{fin.}\,\frac{1}{2}\omega$, alterum vero

$$(1 + e^{\omega})\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\omega - (e^{\omega} - 1)\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}\omega,$$

quorum vterque nihilo aequatus praebet solutionem: ambas igitur seorsim perpendamus.

§. 49. Pro priore igitur casu statuamus $\text{fin.}\,\frac{1}{2}\omega = 0$, eritque in genere $\frac{1}{2}\omega = i\pi$, denotante i numerum integrum quemcunque, ita vt hic iam innumerabiles motus regulares contineantur; ac manifestum est hunc casum prorsus conuenire cum casu quarto supra euoluto, nisi quod hic fit $\frac{1}{2}\omega$ quod ibi erat ω; fcilicet hic pro vtraque portione longitudo tantum eft $\frac{1}{2}a$. Vtraque igitur femiffis eodem modo fuas vibrationes peragit, ac fi feorfim exifteret et in vtroque termino ftylo fimpliciter effet fixa; quamobrem omnes foni fimplices, quos vtraque portio edere poteft, fequentibus numeris exprimentur:

$$\frac{4\pi c\sqrt{2gb}}{aa};\ \frac{16\pi c\sqrt{2gb}}{aa};\ \frac{36\pi c\sqrt{2gb}}{aa};\ \frac{64\pi c\sqrt{2gb}}{aa};$$

qui ergo omnes duplici octaua altiores funt quam cafu IV; cuius difcriminis ratio in hoc eft fita, quod longitudo hoc cafu tantum femiffis eft illius.

§. 50. Hoc igitur cafu coëfficientes α, β, γ, δ, et α', β', γ', δ', fequenti modo determinabuntur:

$$\alpha = e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{\frac{3}{2}\omega};\ \beta = e^{\frac{3}{2}\omega} - e^{\frac{1}{2}\omega};\ \gamma = -\frac{\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{\frac{3}{2}\omega}\right)\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)}{\text{fin.}\ \frac{1}{2}\omega};\ \delta = 0$$

$$\alpha' = e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega};\ \beta' = -e^{2\omega}\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}\right);\ \gamma' = -\frac{\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{\frac{3}{2}\omega}\right)}{\text{fin.}\frac{1}{2}\omega - \text{cof.}\frac{1}{2}\omega\,\text{tang.}\,\omega}\ \text{et}$$

$$\delta' = \frac{\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{\frac{3}{2}\omega}\right)\text{tang.}\,\omega}{\text{fin.}\,\frac{1}{2}\omega - \text{cof.}\,\frac{1}{2}\omega\,\text{tang.}\,\omega}.$$

Eft vero

$$\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\omega - \text{cof.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,\omega = \frac{\text{fin.}\,\frac{1}{2}\omega\,\text{cof.}\,\omega - \text{cof.}\,\frac{1}{2}\omega\,\text{fin.}\,\omega}{\text{cof.}\,\omega} = -\frac{\text{fin.}\,\frac{1}{2}\omega}{\text{cof.}\,\omega},$$

vbi, quia eft $\omega = 2i\pi$, erit cof. $\omega = 1$, at fin. $\frac{1}{2}\omega = 0$. Multiplicemus igitur omnes hos coëfficientes per fin. $\frac{1}{2}\omega$ eritque

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = -(1 - e^{\omega})(e^{\omega} - 1)\ \text{et}\ \delta = 0;$$

porro

porro

$$\alpha' = 0, \; \beta' = 0, \; \gamma' = (e^{\omega} - 1)(1 - e^{\omega}), \text{ et } \delta' = 0.$$

Quia igitur omnes euanescunt praeter γ et γ', ac praeterea est $\gamma' = -\gamma$, si ponamus $\gamma = 1$ erit $\gamma' = -1$; pro portione E L igitur aequatio motum exprimens erit

$$y = C \text{ fin. } (\zeta + t \tfrac{\omega\omega c \sqrt{2gb}}{aa}) \text{ fin. } u\omega$$

et pro altera portione L F

$$y = -C \text{ fin. } (\zeta + t \tfrac{\omega\omega c \sqrt{2gb}}{aa}) \text{ fin. } u\omega,$$

vbi est $u = \frac{s}{a}$.

§. 51. Praeterea vero datur adhuc alia solutio ex altero factore oriunda, ex quo fit

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\omega = \frac{e^{\omega} - 1}{1 + e^{\omega}} = \frac{e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}}{e^{\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}},$$

qui valor congruit cum eo, qui supra, casu quinto, est erutus: totum enim discrimen in hoc consistit, quod hic sit $\frac{1}{2}\omega$ quod ibi erat ω, quemadmodum rei natura postulat, quoniam hic vtriusque portionis longitudo tantum est $\frac{1}{2}a$. Hinc ergo intelligimus, vtramque portionem E L et L F perinde contremiscere posse ac si vtraque in E et F stylo simpliciter esset fixa, in L vero firmiter prorsus infixa. Hic autem valores pro ω erunt $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$, $\frac{13\pi}{2}$, $\frac{17\pi}{2}$, $\frac{21\pi}{2}$, etc. sicque hinc soni orientur duabus octauis altiores quam casu quinto. Hic igitur maxime notatu dignum contigit, quod ambas portiones E L et L F duplici modo contremiscere possunt, altero, qui cum casu superiore quarto, altero vero, qui cum casu quinto congruit. Caeterum valores coëfficientium perinde se habebunt, vti iam supra sunt euoluti, nisi quod pro hoc casu non sit sin. $\frac{1}{2}\omega = 0$.

Scholion.

§. 52. Hactenus perpetuo assumsimus, virgam elasticam in statu naturali esse rectam. Nihilo vero difficilior euadit investigatio, si virga in statu naturali habuerit figuram quamcunque incuruatam. Veluti si eius figura naturalis fuerit curua quaecunque E X F, totum discrimen huc reducetur, vt ipsam hanc lineam curuam E X F pro axe accipiamus, dum ante axis nobis erat linea recta cum figura curuae congruens. Hic scilicet sumta portione quacunque $EX = x = s$, punctum virgae X alium motum recipere nequit, nisi in directione X Y, ad ipsam curuam normali. Quare si concipiamus durante motu punctum X translatum esse in Y, ac vocemus hanc applicatam $XY = y$, formulae differentiales, quas theoria nobis suggessit etiam hic locum habebunt, atque adeo formula $-\frac{ddy}{ds^2}$, hic iam excessum curuaturae in Y supra curuaturam naturalem in X exprimet; quo obseruato aequatio motum determinans manebit prorsus vt ante, scilicet

Tab. III. Fig. 9.

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bcc\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right),$$

vnde etiam pro singulis motibus regularibus habebitur eadem aequatio integralis:

$$y = C\,\text{sin.}\left(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma\,\text{sin.}\tfrac{s}{f} + \delta\,\text{cos}.\tfrac{s}{f}\right)$$

existente $f^4 = bcck$. Quare si tota virgae longitudo E X F statuatur $= a$, omnes casus, quos supra pertractauimus etiam hic sine vlla mutatione locum habebunt, et ista virga ga omnes illos sonos edere poterit, quos supra assignauimus, prouti scilicet virgae termini fuerint liberi, vel simpliciter fixi, vel etiam firmiter infixi, ita vt pro talibus virgis naturaliter incuruatis nulla noua inuestigatione sit opus. Interim tamen hinc ii casus sunt excipiendi, quibus virga ita est incuruata, vt figuram in se redeuntem referat, quandoquidem similis casus in virgis naturaliter rectis locum habere nequit, quamobrem istum casum coronidis loco hic subiungamus.

Euolutio casus,

quo virga elastica in statu naturali figuram in se redeuntem habet, siue de sonis annulorum elasticorum.

§. 53. Sit igitur figura virgae elasticae circulus Tab. III. Fig. 10.
A X B C, siue alia quaecunque curua in se rediens, cuius tota peripheria sit $= a$, crassities vero et elasticitas virgae maneant eaedem vt ante sunt stabilitae; tum vero pro motibus regularibus, quos haec virga recipere potest, sit k longitudo penduli simplicis isochroni, vnde formetur quantitas $f = \sqrt[4]{bcck}$; tum pro quacunque portione indefinita $AX = s$ sit Y punctum, in quod praesenti tempore $= t$ punctum X sit translatum, et iam vidimus, aequationem integralem in genere fore,

$$Y = C \text{ sin.} (\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}) (\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma \text{ sin.} \tfrac{s}{f} + \delta \text{ cos.} \tfrac{s}{f}).$$

Sicque totum negotium iam huc est perductum, vt coëfficientibus α, β, γ, δ debiti valores assignentur, vbi res longe

longe aliter se habere deprehenditur ac supra, quoniam hic neque termini liberi, neque simpliciter fixi, neque firmiter infixi occurrunt.

§. 54. At vero ipsa indoles, qua figura virgae in se rediens assumitur facilem viam nobis aperit hos coëfficientes determinandi. Consideremus enim ipsum punctum A, vbi est $s = 0$, quod ita accipi potest, vt ibi fiat etiam $y = 0$. Pro hoc ergo puncto, omisso factore partim constante partim a tempore pendente, fieri debet $0 = \alpha + \beta + \delta$. Iam statuamus $s = a$, et quia iterum in idem punctum A incidimus ponendo breuitatis gratia $\frac{a}{f} = \omega$, fieri oportet

$$0 = \alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \sin. \omega + \delta \cos. \omega,$$

atque idem euenire debet, si ponamus $s = 2a$, siue $3a$, siue $4a$ etc., vnde nascentur sequentes aequationes:

$$0 = \alpha e^{2\omega} + \beta e^{-2\omega} + \gamma \sin. 2\omega + \delta \cos. 2\omega,$$

$$0 = \alpha e^{3\omega} + \beta e^{-3\omega} + \gamma \sin. 3\omega + \delta \cos. 3\omega,$$

etc. etc.

quibus omnibus simul satisfieri nequit, nisi sit $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\delta = 0$; tum vero necesse est, vt simul fiat

$$\sin. \omega = 0, \ \sin. 2\omega = 0, \ \sin. 3\omega = 0 \text{ etc.}$$

quod in genere eueniet, sumendo $\omega = i\pi$, denotante i numerum integrum quemcunque; vnde vt supra oritur sonus $= \frac{ii\pi c\sqrt{2gb}}{aa}$, ita vt soni simplices progrediantur in hac progressione:

$$\frac{\pi c\sqrt{2gb}}{aa}, \ \frac{4\pi c\sqrt{2gb}}{aa}, \ \frac{9\pi c\sqrt{2gb}}{aa}, \ \frac{16\pi c\sqrt{2gb}}{aa} \text{ etc.}$$

§. 55.

§. 55. Sonus igitur principalis, quem talis virga edere potest, continetur in formula $\frac{\pi c \sqrt{2gb}}{aa}$; reliqui vero soni simplices secundum numeros quadratos 4, 9, 16, 25, progrediuntur, qui cum mox nimis fiant alti quam vt exaudiri queant, praeter sonum fundamentalem plerumque alius non sentietur, nisi duplex octaua, quo ipso harmonia gratissima percipietur. Tales igitur annuli elastici prae chordis musicis hac insigni proprietate sunt praediti, vt sonos multo puriores reddant, id quod etiam in integris discis et catinis campaniformibus euenire debere videtur, cuiusmodi corpora inter instrumenta musica iam sunt recepta, quorumque soni singulari suauitate sensum auditus afficere feruntur. Caeterum manente eadem elasticitate hi soni tenent rationem reciprocam duplicatam totius perimetri a, prorsus vti iam supra circa virgas rectas obseruauimus.