1781

Essai d'une théorie de la résistance qu'éprouve la proue d'un vaisseau dans son mouvement

Leonhard Euler

ESSAI D'UNE THÉORIE

De la Résistance qu'éprouve la Proue d'un Vaisseau dans son mouvement.

Par M. LÉONARD EULER.

Lû le 24 Févr. 1781.

COMME la Théorie ordinaire est uniquement fondée sur l'effet du choc de l'eau contre la proue, quoique son frottement sur la surface du Vaisseau doive produire un effet très-considérable, comme j'ai fait voir dans un Mémoire, inséré au *Volume VI* des *Nouveaux Commentaires*, sous le titre: *Tentamen Theoriæ de frictione fluidorum*, il n'est pas surprenant que cette théorie donne toujours la résistance trop petite, & qu'elle s'écarte d'autant plus de la vérité, que l'obliquité du choc est grande. Je crois donc qu'en tenant compte de l'effet du choc de l'eau, & de celui de son frottement, on s'approchera beaucoup plus de la vraie théorie; car on verra, par l'expression pour la résistance que je vais déduire de ces deux effets réunis, que lorsque le choc de l'eau est à peu-près perpendiculaire, la résistance sera aussi à peu-près comme le carré du sinus d'incidence, & que dans le choc oblique, elle approche de plus en plus de la raison du simple sinus, comme elle a été conclue par les expériences faites par M.rs d'Alembert, le Marquis de Condorcet & l'abbé Bossut.

Pour combiner cette double source de la résistance, je vais considérer une proue angulaire, dont la section faite à fleur d'eau soit le triangle isocèle ABB, auquel toutes les autres sections horizontales soient égales. Soit AC l'axe de la proue qui partage la largeur BB en deux également au point C; & en mettant cet axe $AC = a$, les côtés $AB = b$, l'angle $BAC = \alpha$, & la profondeur ou flottaison $Aa = Bb = Cc = c$, on aura $BC = b$ sin. α. Fig. 1.

Fig. 1. Que la proue se meuve dans la direction CA avec une vîtesse égale v, où v marque l'espace parcouru en une seconde de temps, & en mettant g pour la hauteur par laquelle un corps tombe dans le même temps, la hauteur qui répond à la vîtesse v, sera exprimée par $\frac{vv}{4g}$; ainsi, si l'eau choquoit perpendiculairement, avec cette vîtesse v, sur la face $ABba$, dont l'aire est bc, la force du choc seroit égale au poids d'un volume d'eau égal à $\frac{bcvv}{4g}$. Mais puisque le choc se fait sous un angle α, sa force sera exprimée par $\frac{bcvv \text{ sin. } \alpha^2}{4g}$, & sa direction MN perpendiculaire à la face AB; de-là il naît une force selon la direction AC égale à bc sin. $\alpha \cdot \frac{vv \text{ sin. } \alpha^2}{4g}$, où bc sinus α exprime la moitié de la plus grande largeur BB. Le double de cette force $2bc$ sin. $\alpha \cdot \frac{vv \text{ sin. } \alpha^2}{4g}$, donnera la partie de la résistance causée par le seul choc de l'eau sur la proue, & cette expression convient avec la théorie ordinaire.

Pour déterminer l'effet du frottement, je remarque d'abord qu'on ne sauroit douter que le frottement ne soit égal à une partie aliquote de toute la pression que l'eau exerce sur la surface entière de la proue: or cette pression est produite par une double cause, dont l'une est la propre pesanteur de l'eau, & qui sur la face $ABab$ est égale à $\frac{1}{2}bcc$; l'autre partie est la pression que le choc exerce sur la même face, qui est, comme j'ai fait voir, $\frac{bcvv \text{ sin. } \alpha^2}{4g}$. En prenant donc la fraction λ pour la partie de la pression égale au frottement, la force qui en résulte sera $\frac{1}{2}\lambda bcc + \frac{\lambda bcvv \text{ sin. } \alpha^2}{4g}$, dont la direction est la droite AB, ce qui donne pour la direction AC la force $\frac{1}{2}\lambda bcc$ cos. $\alpha + \frac{\lambda bcvv \text{ sin. } \alpha^2 \text{ cos. } \alpha}{4g}$, dont le double donne l'effet du frottement sur l'une & l'autre face.

Enfin la baſe de la proue, dont l'aire eſt ab ſin. α & la profondeur C, éprouve la preſſion abc ſin. α; d'où il naît un frottement dans la direction même du mouvement, égal à λabc ſin. α; la ſomme de toutes les forces qu'éprouve la proue entière, tant du choc que du frottement de l'eau, contraires au mouvement du Vaiſſeau, ſera donc Fig. 1.

$$\frac{bc\,\text{ſin.}\,\alpha}{2g}\cdot vv\left(\text{ſin.}\,\alpha^2+\lambda\,\text{ſin.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\alpha\right)+\lambda bc\left(c\,\text{coſ.}\,\alpha+a\,\text{ſin.}\,\alpha\right).$$

Pour faciliter l'application de cette formule aux expériences, on pourra mettre $v=\frac{s}{t}$, où s marque l'eſpace parcouru par le Vaiſſeau, & t le temps exprimé en ſecondes; & puiſque le poids moteur doit être égal à la réſiſtance, pour produire ce mouvement, en le déſignant par la lettre P, on aura cette équation,

$$P=\frac{bc\,\text{ſin.}\,\alpha}{2g}\cdot\frac{ss}{tt}\left(\text{ſin.}\,\alpha^2+\lambda\,\text{ſin.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\alpha\right)+\lambda bc\left(c\,\text{coſ.}\,\alpha+a\,\text{ſin.}\,\alpha\right),$$

où P doit être exprimé par un volume d'eau du même poids; de ſorte qu'en mettant 140 marcs pour le poids d'un pied cube d'eau, on aura à peu-près

$$\frac{P}{140}=\frac{bc\,\text{ſin.}\,\alpha}{2g}\cdot\frac{ss}{tt}\left(\text{ſin.}\,\alpha^2+\lambda\,\text{ſin.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\alpha\right)+\lambda bc\left(c\,\text{coſ.}\,\alpha+a\,\text{ſin.}\,\alpha\right).$$

En ſuppoſant le choc direct, de ſorte qu'on puiſſe regarder l'angle α ſenſiblement égal à 90 degrés, & ſon coſinus évanouiſſant, il y aura $\frac{P}{140}=\frac{bc\,\text{ſin.}\,\alpha^3}{2g}\cdot\frac{ss}{tt}+\lambda abc\,\text{ſin.}\,\alpha$; & en négligeant le dernier terme, qui ſera très-petit par rapport à l'autre, toutes les fois que la vîteſſe $\frac{s}{t}$ eſt conſidérable, la réſiſtance, rapportée à la plus grande largeur de la proue, ſera $bc\,\text{ſin.}\,\alpha\cdot\frac{ss}{2gtt}\cdot\text{ſin.}\,\alpha^2$, & par conſéquent proportionnelle au carré du ſinus d'incidence, tout comme dans l'hypothèse commune. Mais en supposant l'angle d'incidence très-petit, & $\text{cos.}\,\alpha = 1$, à peu-près, on aura

$$\frac{p}{140} = \frac{bc\,\text{sin.}\,\alpha}{2g} \cdot \frac{ss}{tt}(\text{sin.}\,\alpha^2 + \lambda\,\text{sin.}\,\alpha) + \lambda bc(c + a\,\text{sin.}\,\alpha);$$

d'où l'on voit, qu'à cause de la petitesse de $\text{sin.}\,\alpha$, cette résistance approche à la raison du simple sinus; au moins s'écartera-t-elle beaucoup plus de la raison du carré, tout comme on a vû par les expériences. L'expression qui vient d'être trouvée pour la résistance, se rapporte donc uniquement à la figure de la proue du Vaisseau, & j'ai même supposé que la pression de l'eau contre la poupe, contre-balance parfaitement celle qui agit sur la proue, tout comme il arrive dans l'état de repos: mais il est clair, que plus le mouvement d'un Vaisseau est rapide, plus l'eau aura de la peine à le suivre, & partant la pression sur la poupe pourra devenir considérablement plus petite que celle que la proue soutient; il en doit résulter une augmentation de la résistance d'autant plus grande, que le mouvement est plus rapide. Outre cela, la poupe éprouvera aussi un frottement de la part de l'eau qui glisse sur sa surface: or il semble trop difficile de déterminer cet effet par aucune théorie; je me contente donc d'avoir assigné la résistance que l'eau exerce sur la seule proue.

Tout reviendroit ici à connoître la juste valeur de la lettre λ, & il me semble qu'on pourroit la déterminer assez exactement, moyennant quelques expériences faites de la manière que je vais indiquer.

Fig. 2. Soit AA, BB, un grand vase rempli d'eau, & muni en bas d'un petit tuyau ouvert bc, auquel on puisse ajuster le tuyau CE, moyennant le col BC, qui, sans laisser sortir l'eau, doit glisser aussi légèrement qu'il est possible sur le petit tuyau bc du vase; & il est clair que l'eau, en coulant par le grand tuyau BE, exercera, pour l'entraîner & pour le détacher du vase, une force qui pourra aisément surpasser le petit frottement du col BC sur l'orifice bc. Qu'on attache à ce tuyau un fil qui, en passant sur la poulie F, porte un poids p, capable

capable de retenir le tuyau, & de vaincre la force de l'eau, ce poids se trouvera facilement par quelques expériences, & diminué de l'effet du frottement du grand tuyau sur le petit, il donnera la fraction λ, puisque tant la pression de l'eau dans le tuyau, que sa surface intérieure, peut être exactement assignée : pour faciliter cette recherche, on tiendra le vase toujours rempli d'eau, afin que le mouvement soit uniforme aussi-bien que la pression.

Après avoir établi ici les vrais principes, d'où il faut tirer la détermination de la résistance qu'éprouve la proue d'un Vaisseau, sans entrer dans la discussion de ce que la poupe y peut contribuer, je vais terminer ce petit *Mémoire* par l'application de ces principes à une proue de figure quelconque, déterminée par une équation entre trois variables.

Soit la ligne AB sur la surface de l'eau, l'axe de la proue & la direction de son mouvement, dont la vîtesse $= v$; soient les trois ordonnées $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, & l'équation pour la figure de la proue $\partial z = p\partial x + q\partial y$; considérons la section verticale de la proue EZ, faite perpendiculairement à YX; soit ZE perpendiculaire sur EZ, & on aura la sous-normale $YL = \frac{z\partial z}{\partial x} = pz$; donc, si LN est parallèle à Yx, ou perpendiculaire à la section, chaque droite NZ sera aussi perpendiculaire à EZ. Concevons de la même manière une section verticale FZ, faite selon XY, & perpendiculaire à AX, de sorte que Zn soit perpendiculaire sur FZ, & la sous-normale YM sera $= -\frac{z\partial z}{\partial y} = -qz$; & en tirant la droite MN, perpendiculaire à ce plan, toutes les droites ZN seront aussi perpendiculaires à la courbe FZ. Fig. 3.

En complétant donc le parallélogramme $MYLN$, la droite ZN, perpendiculaire sur les courbes EZ & FZ, sera aussi perpendiculaire à la surface de la proue au point Z, & partant $MN = YL = pz$, & $LN = YM = -qz$; donc $ZL = \sqrt{(YZ^2 + YL^2)} = z\sqrt{(1 + pp)}$; il y aura donc dans le triangle rectangle ZLN, la droite

Fig. 3. $ZN = z(1 + pp + qq)$, selon laquelle la pression de l'eau agit sur la proue.

Soit l'angle $MNZ = \varphi$, & on aura $\text{cos.}\,\varphi = \frac{p}{\sqrt{(1+pp+qq)}}$ & l'angle, sous lequel la direction de la course est inclinée sur la proue en $Z = 90^d - \varphi$. La force de l'eau selon ZN, sera $\frac{vv}{4g}\,\text{cos.}\,\varphi^2 = \frac{vv}{4g} \cdot \frac{pp}{1+pp+qq}$, & l'élément de la proue, qui répond à l'élément $\partial x \partial y$, sera $\partial x \partial y \sqrt{(1 + pp + qq)}$; d'où l'on tire la résistance qui naît du choc de l'eau $= \frac{vv}{4g} \iint \frac{p^3 \partial x \partial y}{1+pp+qq}$.

Soit ensuite la pression en Z, égale à π, & on aura $\pi = z + \frac{vv\,\text{cos.}\,\varphi^2}{4g}$; & puisque la friction $= \lambda\pi$, son effet contraire au mouvement sera $\frac{\lambda \pi q}{\sqrt{(pp+qq)}}$, & l'effet total de la friction sera exprimé par

$$\lambda \iint \frac{q \partial x \partial y \sqrt{(1+pp+qq)}}{\sqrt{(pp+qq)}} \left(z + \frac{vv}{4g} \cdot \frac{pp}{1+pp+qq}\right),$$

qui, ajoutée à l'effet du choc, donne la résistance totale de la proue en question.

Fig. 4. Si l'on veut appliquer cette expression à une proue pyramidale $ABCD$, dont la longueur $AB = a$, la demi-largeur $BD = b$, & la profondeur $CD = c$, on a l'équation $\frac{z}{c} = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$, & partant $p = \frac{c}{a}$, & $q = -\frac{c}{b}$.

Donc, puisque p & q sont des constantes, l'expression pour la résistance totale sera

$$\frac{vv}{4g} \cdot \frac{b^3 c^3}{aa+bb+aacc+bbcc} + \frac{\lambda ac\sqrt{(aabb+aacc+bbcc)}}{\sqrt{(aa+bb)}} \left(\frac{z}{b} + \frac{vv}{4g} \cdot \frac{bbc}{aa+bb+aacc+bbcc}\right)$$