



1781

# Solutio gemina problematis, quo motus corporis, filo alicubi alligati, super plano horizontali quaeritur

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

## Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Solutio gemina problematis, quo motus corporis, filo alicubi alligati, super plano horizontali quaeritur" (1781). *Euler Archive - All Works*. 518.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/518>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).

SOLVTIO GEMINA  
**P R O B L E M A T I S,**

QVO

MOTVS CORPORIS, FILO ALICVBI ALLIGATI, SV-  
 PER PLANO HORIZONTALI QVAERITVR.

Auctore

L. E U L E R O.

§. I.

**C**um nuper hanc quaestionem tractassem, perueni ad  
 aequationem differentialem primi gradus, inter binas varia-  
 biles, non nimis complexam, quae autem ita erat compa-  
 rata, vt omnia Calculi artificia adhuc cognita ei resoluen-  
 dae non sufficere viderentur. Postquam autem rem plu-  
 ribus modis tentassem, tandem per longas ambages ad eius  
 integrationem sum perductus, atque adeo summa admira-  
 tione deprehendi, eius integrate algebraice exprimi posse.  
 Tum vero temporis contentus fui, ipsam tantum aequa-  
 tionem integram cum publico communicare, simul pol-  
 licitus, totam Analysis, qua eo sum deductus, alia occasione  
 ob oculos ponere, quod igitur nunc praestare constitui.  
 Deinde vero aliam solutionem eiusdem quaestionis multo  
 simpliciorum sum adeptus, quam hic etiam expositurus ero.

Solutio prior Problematis.

§. 2. Sit BCD corpus propositum, cuius massa sit = M, et centrum gravitatis in C, cuius respectu momentum inertiae sit Mkk, hocque corpus in B alligatum sit filo BA = a, in puncto A fixo; puncti porro B distantia a centro gravitatis sit BC = b, quibus positis elapso tempore = t referatur corpus ad axem fixum AE, ponaturque angulus EAB = Φ, et, producta recta CB vsque ad hunc axem in L, vocetur angulus ELB = Ψ, qui ergo superat angulum priorem Φ angulo ABL = ω, ita ut sit ω = Ψ - Φ.

Tab. III.  
Fig. 2.

§. 3. Calculo igitur secundum principia motus ad haec elementa applicato, posui porro celeritatem angularem puncti B circa A = u, puncti vero C circa B = v, ita ut sit  $u = \frac{d\Phi}{dt}$  et  $v = \frac{d\Psi}{dt}$ . Deinde posui  $u = p \cdot v$  et  $b \cos \omega = z$ , ac brevitatis gratia feci  $bb + kk = bc$ , hincque aequatio differentialis prodit ista:

$a(1-p)(bc-zz)dp + (bc + aap^2 + apz(1+p))dz = 0$   
 quae autem, posito  $z = as$  et  $\frac{bc}{aa} = nn$ , ad hanc formam simpliciore[m] reducitur:

$dp(1-p)(nn - ss) + ds(nn + p^2 + ps(1+p)) = 0$   
 vbi ergo est  $s = \frac{b \cos \omega}{a}$  et  $nn = \frac{bb + kk}{aa}$ ; sicque in hanc aequationem inter binas variables p et s vnica quantitas constans, et quidem data, nn ingreditur. In ad igitur mihi erat incumbendum, vt istius aequationis integrale inuestigarem.

§. 4. Quoniam in hac aequatione quatuor terminorum species reperiuntur, vbi scilicet binae variables p

X 2

et

et  $s$  vel unicam tantum dimensionem, vel duas, vel tres, vel quatuor, obtinent; has quatuor partes seorsim repraesentato:

$$\begin{array}{ll} \text{I. } n n (d p + d s) & \text{III. } p s d s - s s d p \\ \text{II. } - n n p d p & \text{IV. } p s s d p + p p (p + s) d s. \end{array}$$

§. 5. Incipiamus nunc a parte vltima, quam autem, ponendo  $s = p q$ , primo in hanc formam transfundamus: IV. =  $p^3 q (2 q + 1) d p + p^4 (1 + q) d q$ . Iam si haec forma diuidatur per  $p^4 q (2 q + 1)$ , fiet integrabilis; erit enim  $\frac{\text{IV}}{p^4 q (2 q + 1)} = \frac{d p}{p} + \frac{(1 + q) d q}{q (2 q + 1)}$ ; unde integrando colligitur  $\int \frac{\text{IV}}{p^4 q (2 q + 1)} = l \frac{p q}{\sqrt{(2 q + 1)}}$ . Hinc, retrogrediendo ad differentialia, erit

$$\text{IV} = p^4 q (2 q + 1) d. l \frac{p q}{\sqrt{(2 q + 1)}}$$

Quare si breuitatis gratia ponatur  $\frac{p q}{\sqrt{(2 q + 1)}} = r$ , vt fit

$$p = \frac{r \sqrt{(2 q + 1)}}{q} \text{ erit } \text{IV} = \frac{r^3 (2 q + 1)^{\frac{3}{2}}}{q} d r.$$

Posito porro  $\frac{r \sqrt{(2 q + 1)}}{q} = t$ , ob

$$r = \frac{q t}{\sqrt{(2 q + 1)}}, \text{ erit } \text{IV} = t^3 d r = t^3 d. \frac{q t}{\sqrt{(2 q + 1)}}.$$

§. 6. Formula tertia  $p s d s - s s d p$ , ita repraesentata:  $p s s (\frac{d s}{s} - \frac{d p}{p})$ , statim dat hanc expressionem: III =  $p s s. d. l \frac{s}{p}$ , siue, loco  $s$  et  $p$  substitutis valoribus,

$$\text{III} = p^3 q q. d. l p = \frac{t^3 q}{(2 q + 1)^{\frac{3}{2}}} d q \text{ (ob } p = \frac{t}{\sqrt{(2 q + 1)}}).$$

Erit ergo

$$\frac{\text{III}}{t^3} = \frac{q d q}{(2 q + 1)^{\frac{3}{2}}} = d. \frac{q + 1}{\sqrt{(2 q + 1)}}, \text{ ideoque } \text{III} = t^3. d. \frac{q + 1}{\sqrt{(2 q + 1)}}.$$

§. 7. Colligamus iam tertiam et quartam partem, quarum summa erit  $III + IV = t^2 \cdot d \left( \frac{qt}{2q+1} + \frac{q+1}{\sqrt{(2q+1)}} \right)$ . Reliquae duae partes facili negotio eruentur. Cum enim fit  $II = -nnp dp = -\frac{n}{2} d \cdot pp$ , loco  $p$  scribendo valorem inuentum  $\frac{t}{\sqrt{(2q+1)}}$ , erit  $II = -\frac{1}{2} nn \cdot d \cdot \frac{tt}{2q+1}$ . Prima denique, quae est  $nn \cdot (dp + ds) = nn \cdot d \cdot (p + s)$ , erit

$$I = nn \cdot d \cdot p(1+q) = nn \cdot d \cdot \frac{(1+q)t}{\sqrt{(2q+1)}}$$

Ergo colligendo fiet

$$I + II = \frac{1}{2} nn \cdot d \cdot \left( \frac{2(1+q)t}{\sqrt{(2q+1)}} - \frac{tt}{2q+1} \right)$$

§. 8. Ponatur nunc

$$\frac{qt}{2q+1} + \frac{q+1}{\sqrt{(2q+1)}} = P \text{ et } \frac{2(1+q)}{\sqrt{(2q+1)}} - \frac{t}{2q+1} = Q,$$

eritque  $I + II = \frac{1}{2} nn t d \cdot Q$  et  $III + IV = t^2 \cdot d \cdot P$ , ideoque habebimus

$$I + II + III + IV = 0 = t^2 dP + \frac{1}{2} nn (t dQ + Q dt).$$

Cum autem fit

$$P - \frac{1}{2} Q = \frac{qt}{2q+1} + \frac{q+1}{\sqrt{2q+1}} - \frac{q+1}{\sqrt{2q+1}} + \frac{t}{2(2q+1)} = \frac{t}{2}$$

erit  $Q = 2P + t$ , quo substituto aequatio proposita tandem in hanc simpliciore transmutatur:

$$t(nn + tt) dP + nnP dt - nnt dt = 0$$

siue in hanc:

$$dP + \frac{nnP dt}{t(nn + tt)} - \frac{nnt dt}{nn + tt} = 0$$

§. 9. Consideretur iam coefficientis ipsius  $P$ , qui est  $\frac{nn dt}{t(nn + tt)} = \frac{dt}{t} - \frac{tdt}{nn + tt}$ , cuius integrale est  $\int \frac{t}{\sqrt{(nn + tt)}}$ . Quamobrem tota aequatio, si per fractionem  $\frac{t}{\sqrt{(nn + tt)}}$  multiplicetur, fiet integrabilis. Prodit enim

$$\frac{t dP}{\sqrt{nn+tt}} + \frac{nnP dt}{(nn+tt)^{\frac{3}{2}}} = \frac{nn t dt}{(nn+tt)^{\frac{3}{2}}},$$

cuius integrale est

$$\frac{Pt}{\sqrt{nn+tt}} = -\frac{nn}{\sqrt{nn+tt}} + C,$$

vnde colligitur  $Pt = C\sqrt{nn+tt} - nn$ . Cum igitur posuerimus

$$P = \frac{qt}{2q+1} + \frac{q^{q+1}}{\sqrt{(2q+1)}}, \text{ erit etiam}$$

$$Pt = \frac{qt^2}{2q+1} + \frac{t(q+1)}{\sqrt{(2q+1)}},$$

vnde nascitur haec aequatio algebraica:

$$C\sqrt{nn+tt} - nn = \frac{qt^2}{2q+1} + \frac{t(q+1)}{\sqrt{(2q+1)}},$$

quae, substituendo loco  $t$  valorem  $p\sqrt{(2q+1)} = \sqrt{p(2s+p)}$ , ad hanc reducitur:

$$C\sqrt{nn+2ps+pp} - nn = p+s+ps,$$

sive ad hanc:

$$C = \frac{nn+p+s+ps}{\sqrt{(nn+2ps+pp)}},$$

quod est integrale completum aequationis differentialis propositae:

$$dp(x-p)(nn-s s) + ds(nn+p^2 + p s (1+p)) = 0$$

Altera solutio multo simplicior et elegantior.

§. 10. Hanc solutionem mihi immediate ex primis formulis differentio-differentialibus deriuare licuit, quae, positis coordinatis  $AX = x$  et  $XC = y$  et tensione  $AB = T$ , sunt:

$$I. \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{T \cos \Phi}{M}; \quad II. \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{T \sin \Phi}{M};$$

$$III. \frac{d^2 \psi}{dt^2} = -\frac{T b \sin \omega}{M};$$

vbi

vbi  $a$  denotat celeritatem, lapſu grauium libero vno minuto ſecundo acquiſitam. Coordinatae autem  $x$  et  $y$  ita per angulos  $\Phi$  et  $\Psi$  definiuntur, vt ſit

$$x = a \cos. \Phi + b \cos. \Psi \text{ et } y = a \sin. \Phi + b \sin. \Psi,$$

vnde differentiando ſit

$$\begin{aligned} dx &= -a d\Phi \sin. \Phi - b d\Psi \sin. \Psi \\ dy &= +a d\Phi \cos. \Phi + b d\Psi \cos. \Psi \\ ddx &= -a dd\Phi \sin. \Phi - a d\Phi^2 \cos. \Phi - b dd\Psi \sin. \Psi - b d\Psi^2 \cos. \Psi \\ ddy &= +a dd\Phi \cos. \Phi - a d\Phi^2 \sin. \Phi + b dd\Psi \cos. \Psi - b d\Psi^2 \sin. \Psi \end{aligned}$$

§. 11. Iam formulae ita combinentur; primo ſcilicet  $I \sin. \Phi - II \cos. \Phi = 0$ , quae ergo, facta ſubſtitutione, dabit hanc aequationem:

$$a d d \Phi + b d d \Psi \cos. \omega - b d \Psi^2 \sin. \omega = 0.$$

Deinde fiat iſta combinatio;  $I \cos. \Phi + II \sin. \Phi = -\frac{T}{M}$ , vnde ergo naſcitur haec aequatio:

$$a d \Phi^2 + b d d \Psi \sin. \omega + b d \Psi^2 \cos. \omega = \frac{T}{M}.$$

At, vero ex tertia formula eſt  $\frac{T}{M} = \frac{k k d d \Psi}{b \sin. \omega}$ , vnde ſubſtituto hoc valore in ſuperiore aequatione erit

$$k k d d \Psi + a b d \Phi^2 \sin. \omega + b b d d \Psi \sin. \omega^2 + b b d \Psi^2 \sin. \omega \cos. \omega = 0.$$

§. 12. Duas igitur naſti ſumus aequationes differentiales ſecundi gradus, quas hoc modo per litteras A et B indicemus:

$$A = a d d \Phi + b d d \Psi \cos. \omega - b d \Psi^2 \sin. \omega = 0,$$

$$B = k k d d \Psi + a b d \Phi^2 \sin. \omega + b b d d \Psi \sin. \omega^2 + b b d \Psi^2 \sin. \omega \cos. \omega = 0,$$

in quas tantum bini anguli  $\Phi$  et  $\Psi$ , vna cum  $\omega = \Psi - \Phi$  ingrediuntur, et nunc totum negotium eo redit, vt eiusmodi

di combinatio harum aequationum instituat, quae ad formulam integrabilem perducatur. Hoc autem praestabit ista combinatio:  $B + A (a + b \cos. \omega) = 0$ , unde oritur ista aequatio

$$\left. \begin{aligned} & k k d d \psi + a b d \Phi^2 \sin. \omega + b b d d \psi \sin. \omega^2 + b b d \psi^2 \sin. \omega \cos. \omega \\ & + a a d d \Phi - a b d \psi^2 \sin. \omega + b b d d \psi \cos. \omega^2 - b b d \psi^2 \sin. \omega \cos. \omega \\ & \qquad \qquad \qquad + a b d d \psi \cos. \omega \\ & \qquad \qquad \qquad + a b d d \Phi \cos. \omega \end{aligned} \right\} = 0.$$

§. 13. In hac aequatione occurrit terminus  $a b \sin. \omega$ , qui ob  $d \psi - d \Phi = d \omega$  praebet hoc membrum:

$$- a b d \omega (d \Phi + d \psi) \sin. \omega,$$

ficque nunc nostra aequatio, ulterius reducta, erit:

$$\left. \begin{aligned} & k k d d \psi + a a d d \Phi - a b d \omega \sin. \omega (d \Phi + d \psi) \\ & + b b d d \psi + a b d d \Phi \cos. \omega \\ & + a b d d \psi \cos. \omega \end{aligned} \right\} = 0$$

siue

$$\begin{aligned} & a a d d \Phi + a b (d d \Phi + d d \psi) \cos. \omega + (b b + k k) d d \psi \\ & - a b d \omega (d \Phi + d \psi) \sin. \omega = 0. \end{aligned}$$

Vbi iam manifestum est, huius aequationis integrale esse

$$a b (d \Phi + d \psi) \cos. \omega + a a d \Phi + (b b + k k) d \psi = C d t.$$

Quia enim elementum  $d t$  constans est assumptum, id propter homogeneitatem constanti est adiungendum.

§. 14. Egregie autem haec aequatio integralis conuenit cum ea quam methodo priore inuenimus; ad quod ostendendum introducamus celeritates angulares  $u$  et  $v$ , et cum sit  $\frac{d \Phi}{d t} = u$  et  $\frac{d \psi}{d t} = v$ , habebitur ista aequatio:

Iam



$$ab \cos. \omega (u + v) + aa u + (bb + kk) v = C.$$

Iam haec aequatio, per  $aa$  diuisa, et posito vt supra fecimus

$$\frac{b \cos. \omega}{a} = s \text{ et } \frac{bb + kk}{aa} = nn, \text{ hanc induet formam:}$$

$$s(u + v) + u + nnv = C.$$

Nunc fiat  $up = v$ , eritque  $vs(p + 1) + pv + nnv = C$ .

At vero principium conseruationis virium viuarum in praecedente dissertatione perduxit ad hanc aequationem:

$$ff = aa vv (nn + pp + 2ps),$$

vnde deducitur  $v = \frac{f}{a \sqrt{(nn + pp + 2ps)}}$ , qui valor in nostra aequatione substitutus suppeditat sequentem:

$$C = \frac{f}{a} \frac{nn + p + s + ps}{\sqrt{(nn + pp + 2ps)}} \text{ siue } \frac{nn + p + s + ps}{\sqrt{(nn + pp + 2ps)}} = \frac{Ca}{f},$$

quae est ea ipsa aequatio, ad quam nos praecedens integratio perduxit. Manifestum igitur est, hanc posteriorem integrationem priore multo esse simpliciore et elegantiore.