1781

De problemate quodam mechanico, satis obvio, at solutu difficillimo

Leonhard Euler

DE PROBLEMATE QVODAM MECHANICO, SATIS OBVIO, AT SOLVTV DIFFICILLIMO.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Consideranti mihi hunc versum Virgilii saepius occurrentem:

Anchora de prora iacitur, stant littore puppes.

obtulit se ista quaestio: quomodo nauis, postquam anchora de prora fuerit iacta, motum suum sit prosecutura; vbi quidem euidens est, proram alium motum recipere non posse, praeter circularem circa anchoram. At vero tota nauis interea circa proram motu quodam rotatorio feretur, quem autem tam ob ipsam resistentiam aquae, quam ob eius continuam mutationem, nullo modo per principia mechanica determinare licet.

§. 2.

§. 2. Remotis autem his impedimentis quaestio ad hanc formam simplicissimam redigatur:

Si corpus quodcunque B C D, plano horizontali politissimo incumbens, (vt omnis frictio remoueatur) de puncto B, ope fili B A in puncto A, fixum retineatur, eique motus quicunque imprimatur, inuestigare motum, quo istud corpus deinceps est progressurum. Tab. III. Fig. 2.

Tentamen Solutionis.

§. 3. Sit massa corporis propositi B C D $= M$, eiusque centrum grauitatis sit in C, momentum vero inertiae, respectu axis verticalis puncto C insistentis, ponatur $= M\,k\,k$; longitudo fili sit A B $= a$ et interuallum B C $= b$. Per punctum A iam ducatur recta fixa A E $= e$, ad quam motus corporis quouis tempore referatur, atque elapso tempore $= t$ teneat corpus cum filo situm in figura expressum, ponaturque primo angulus E A B $= \Phi$, et, producta recta C B vsque ad rectam A E in L, vocetur angulus E L B $= \psi$; ita vt tota quaestio eo reducatur, vt ad quoduis tempus t isti bini anguli Φ et ψ determinentur. Ponatur autem quoque breu. gr. differentia horum angulorum $\psi - \Phi =$ A B L $= \omega$.

§. 4. His factis denominationibus determinationem motus aggrediamur; et quia corpus nullas alias vires sollicitantes sustinet, praeter tensionem fili A B, ponamus istam tensionem pro hoc tempore $= T$, ita vt corpus in puncto B vi ista T in directione B A sollicitetur. Nunc vt prima principia Mechanicae applicare queamus, pro motu corporis progressiuo ex centro C ad axem A E ducatur

ducatur normalis C X et vocentur binae coordinatae A X $= x$ et X C $= y$, tumque ex figura erit

$$x = a \cos. \Phi + b \cos. \psi \quad \text{et} \quad y = a \sin. \Phi + b \sin. \psi,$$

vnde differentiando colligimus

$$d x = - a\, d \Phi \sin. \Phi - b\, d \psi \sin. \psi$$

$$d y = + a\, d \Phi \cos. \Phi + b\, d \psi \cos. \psi$$

$$d d x = - a\, d d \Phi \sin. \Phi - a\, d \Phi^2 \cos. \Phi - b\, d d \psi \sin. \psi - b\, d \psi^2 \cos. \psi$$

$$d d y = + a\, d d \Phi \cos. \Phi - a\, d \Phi^2 \sin. \Phi - b\, d d \psi \cos. \psi - b\, d \psi^2 \sin. \psi.$$

§. 5. Hinc iam ad motum centri grauitatis C definiendum ei tensio fili T immediate applicata concipiatur, quae secundum directiones coordinatarum resoluta dabit pro directione X A vim $= T \cos. \Phi$ et pro directione C X vim $= T \sin. \Phi$, vnde principia motus has duas aequationes suppeditant:

$$\frac{d d x}{\alpha\, d t^2} = - \frac{T \cos. \Phi}{M} \quad \text{et} \quad \frac{d d y}{\alpha\, d t^2} = - \frac{T \sin. \Phi}{M},$$

vbi elementum temporis $d t$ constans est assumtum, et α denotat celeritatem lapsu libero grauium per vnum minutum secundum acquisitam; siquidem tempora in minutis secundis, celeritates vero per spatia, vno minuto secundo percursa, exprimere velimus.

§. 6. Quoniam autem tensio fili T penitus est incognita, vt eam eliminemus primam aequationem ducamus in $\sin. \Phi$ secundam vero in $\cos. \Phi$ atque differentia dabit: $d d x \sin. \Phi - d d y \cos. \Phi = 0$, quae aequatio loco $d d x$ et $d d y$ substitutis valoribus modo ante traditis, induet hanc formam satis simplicem, ob $\psi - \Phi = \omega$; scilicet:

$$a\, d d \Phi + b\, d d \psi \cos. \omega - b\, d \psi^2 \sin. \omega = 0.$$

Simili

Simili modo primae aequationis, ductae in cos. Φ, et secundae in sin. Φ, summa dabit ipsam tensionis quantitatem

$$T = - M \frac{(d\,d\,x\,\text{cos.}\,\Phi + d\,d\,y\,\text{sin.}\,\Phi)}{\alpha\,d\,t^2},$$

vnde facta substitutione erit:

$$\frac{T}{M} = \frac{a\,d\,\Phi^2 + b\,d\,d\,\psi\,\text{sin.}\,\omega + b\,d\,\psi^2\,\text{cos.}\,\omega}{\alpha\,d\,t^2},$$

quam autem cognoscere non datur, antequam totus motus fuerit exploratus.

§. 7. Praeterea etiam plurimum iuuabit istam combinationem in vsum vocare, dum prima per $d\,x$, altera vero per $d\,y$ multiplicatur, vt horum productorum summa praebeat hanc aequalitatem:

$$\frac{d\,x\,d\,d\,x + d\,y\,d\,d\,y}{\alpha\,d\,t^2} = - \frac{T}{M}(d\,x\,\text{cos.}\,\Phi + d\,y\,\text{sin.}\,\Phi).$$

At vero est $d\,x\,\text{cos.}\,\Phi + d\,y\,\text{sin.}\,\Phi = - b\,d\,\psi\,\text{sin.}\,\omega$, vnde fit

$$\frac{d\,x\,d\,d\,x + d\,y\,d\,d\,y}{\alpha\,d\,t^2} = \frac{T}{M}\,b\,d\,\psi\,\text{sin.}\,\omega,$$

quae aequatio ideo summum vsum praestabit, quia membrum sinistrum absolute integrari potest, cum eius integrale sit $\frac{d\,x^2 + d\,y^2}{2\,\alpha\,d\,t^2}$, vbi notetur esse

$$d\,x^2 + d\,y^2 = a\,a\,d\,\Phi^2 + b\,b\,d\,\psi^2 + 2\,a\,b\,d\,\Phi\,d\,\psi\,\text{cos.}\,\omega.$$

§. 8. Expedito motu progressiuo motum quoque gyratorium nostri corporis circa centrum grauitatis C inuestigemus, qui oritur ex mutatione anguli $ELC = \psi$, quippe cuius mutatio dabit quantitatem motus gyratorii. Cum igitur nulla alia vis adsit, praeter tensionem fili $BA = T$, cuius momentum respectu centri grauitatis C est $b\,T\,\text{sin.}\,\omega$, quod tendit ad angulum ψ imminuendum, eius mutatio reperietur, si istud momentum diuidatur per

 momen-

momentum inertiae corporis, Mkk, vnde fecundum principia motus oritur ifta aequatio: $\frac{dd\psi}{\alpha dt^2} = -\frac{bT\,\text{fin.}\,\omega}{Mkk}$. Hac igitur formula continetur determinatio motus gyratorii.

§. 9. Quodfi hanc aequationem multiplicemus per $d\psi$, orietur

$$\frac{d\psi\, dd\psi}{\alpha dt^2} = -\frac{bT\, d\psi\,\text{fin.}\,\omega}{Mkk}.$$

Supra autem vidimus effe

$$\frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{\alpha dt^2} = \frac{bT\, d\psi\,\text{fin.}\,\omega}{M}.$$

Quare cum nunc fit

$$\frac{kk\, d\psi\, dd\psi}{\alpha dt^2} = -\frac{bT\, d\psi\,\text{fin.}\,\omega}{M},$$ hinc fequitur fore

$$\frac{dx\,ddx + dy\,ddy + kk\,d\psi\,dd\psi}{\alpha dt^2} = 0,$$

cuius integrale eft

$$\frac{dx^2 + dy^2 + kk\,d\psi^2}{2\alpha dt^2} = \text{Conft.}$$

quae aequatio, loco $dx^2 + dy^2$ fubftituto valore ante dato, induet hanc formam:

$$\frac{aa\,d\Phi^2 + (bb + kk)\,d\psi^2 + 2ab\,d\Phi\,d\psi\,\text{cof.}\,\omega}{2\alpha dt^2} = C.$$

§. 10. Euidens eft hanc aequationem inuoluere vim viuam, quae in corpore ineft, cum $\frac{dx^2 + dy^2}{\alpha dt^2}$ exprimat quadratum celeritatis, qua centrum grauitatis corporis C promouetur, et $\frac{d\psi^2}{\alpha dt^2}$ exprimat quadratum celeritatis angularis; vnde patet, in corpore femper eandem quantitatem vis viuae conferuari, quae ergo femper manebit aequalis illi vi vivae, quae corpori initio fuerit impreffa.

§. 11. Iam igitur affecuti fumus duas aequationes a tenfione fili T liberas, quarum prior, §. 6 inuenta, eft eſt differentialis ſecundi gradus; poſteriorem vero modo inuentam ad primum gradum reducere licuit, atque hae duae aequationes totam problematis ſolutionem complectuntur, quae ſunt:

$$\text{I. } a\,dd\Phi + b\,dd\psi \text{ coſ. } \omega - b\,d\psi^2 \text{ ſin. } \omega = 0$$

$$\text{II. } \frac{aa\,d\Phi^2 + (bb + kk)\,d\psi^2 + 2ab\,d\Phi\,d\psi \text{ coſ. } \omega}{dt^2} = ff.$$

His enim ad quoduis tempus t bini anguli Φ et ψ determinari debent, namque praeter tempus t ambo tantum anguli Φ et ψ in his aequationibus inſunt, propter $\omega = \psi - \Phi$.

§. 12. Nunc autem loco angulorum Φ et ψ introducamus in calculum ipſas celeritates angulares, quibus corpus partim circa punctum fixum et partim circa proprium centrum grauitatis C gyratur, ponamusque celeritatem angularem circa punctum A $= \frac{d\Phi}{dt} = u$, et circa centrum grauitatis C celeritatem angularem $\frac{d\psi}{dt} = v$, hocque modo poſterior aequatio iam penitus ad quantitates finitas reducetur, quippe quae erit:

$$aauu + (bb + kk)vv + 2abuv \text{ coſ. } \omega = ff.$$

Pro priore vero aequatione, cum ſit $d\Phi = u\,dt$ et $d\psi = v\,dt$, ob dt ſumtum conſtans, erit $dd\Phi = du\,dt$ et $dd\psi = dv\,dt$. Quia vero eſt $dt = \frac{d\Phi}{u}$, itemque $dt = \frac{d\psi}{v}$, eliminando tempuſculum dt, erit

$$dd\Phi = \frac{d\Phi\,du}{u} \text{ et } dd\psi = \frac{d\psi\,dv}{v},$$

hincque prior aequatio reducetur ad hanc formam:

$$\frac{a\,d\Phi\,du}{u} + \frac{b\,d\psi\,dv}{v} \text{ coſ. } \omega - b\,d\psi^2 \text{ ſin. } \omega = 0.$$

§. 14. Quia autem haec aequatio praeter celeritates u et v adhuc elementa $d\,\Phi$ et $d\,\psi$ continet, ea ex calculo expelli oportet. Cum ergo fit $d\,\Phi = u\,d\,t$ et $d\,\psi = v\,d\,t$, erit $d\,\psi - d\,\Phi = d\,\omega = (v-u)\,d\,t$, vnde fiet

$$d\,t = \frac{d\,\omega}{v-u},\ \text{hincque}\ d\,\Phi = \frac{u\,d\,\omega}{v-u}\ \text{et}\ d\,\psi = \frac{v\,d\,\omega}{v-u},$$

quibus valoribus fubftitutis erit aequatio poftrema.

$$a\,d\,u + b\,d\,v\ \text{cof.}\ \omega - \frac{b\,v\,v\,d\,\omega\,\text{fin.}\,\omega}{v-u} = 0.$$

Sicque duas habemus aequationes inter ternas variabiles v, u, et ω; vnde totum negotium eo redit, vt binae per tertiam definiantur. Quem in finem in eo eft elaborandum, vt, vna harum trium quantitatum elifa, ad vnicam aequationem, binas tantum variabiles inuoluentem, folutio perducatur.

§. 15. Hic quidem primo videtur ex aequatione finita quaeri poffe valorem cof. ω, qui cum fuo differentiali in altera aequatione fubftitutus produceret aequationem differentialem inter binas celeritates u et v, quae autem tantopere erit perplexa, vt nihil plane inde concludi queat. Verum in alium modum incidi, ad duas tantum variabiles perueniendi, per aequationem multo fimpliciorem, quae autem nihilominus ita eft comparata, vt omnia artificia analytica adhuc cognita fruftra pro ea euoluenda in fubfidium vocentur. Interim tamen haud inutile videtur, hanc ipfum operationem hic ob oculos exponere, quo clarius pateat, cuiusmodi incrementis Analyfis adhuc indigeat.

§. 16. Hic primo ftatim ponatur $u = p\,v$ et aequatio iam erit:

$(a\,a\,p\,p$

$$(aapp + bb + kk + 2abp \operatorname{cof.} \omega) vv = ff,$$

quae, pofito porro $bb + kk = bc$, fit fimplicior, fcil.

$$vv(aapp + bc + 2abp \operatorname{cof.} \omega) = ff,$$

vbi notaffe iuuabit, fi corpus ex ipfo puncto B fufpenderetur, diftantiam centri ofcillationis ab hoc puncto futuram effe $= b + \frac{kk}{b} = c$. Praeterea vero faciamus $b \operatorname{cof.} \omega = z$, et aequatio noftra induet hanc formam:

$$vv(aapp + bc + 2apz) = ff,$$

quae per logarithmos dat

$$2lv + l(aapp + bc + 2apz) = 2lf,$$

vnde differentiando fit

$$\frac{dv}{v} = \frac{-aapdp - a(pdz + zdp)}{aapp + bc + 2apz}.$$

§. 17. Simili modo etiam in altera aequatione differentiali, pofito $u = vp$ et $b \operatorname{cof.} \omega = z$, vt fiat $b d\omega \operatorname{fin.} \omega = -dz$, habebimus,

$$a(pdv + vdp) + 2dv + \frac{vdz}{1-p} = 0,$$

quae per v diuifa praebet

$$\frac{dv}{v} = -\frac{adp}{ap+z} - \frac{dz}{(1-p)(ap+z)}.$$

Hic iam loco $\frac{dv}{v}$ fubftituatur valor ante inuentus, orieturque fequens aequatio inter binas variabiles p et z:

$$\frac{adp}{ap+z} + \frac{dz}{(1-p)(ap+z)} = \frac{aapdp + a(pdz + zdp)}{aapp + bc + 2apz},$$

quae fublatis fractionibus reducitur ad hanc:

$$a(1-p)(bc - zz)dp + (bc + aap^2 + apz(1+p))dz = 0.$$

§. 18. Ecce ergo tota Problematis nostri Solutio perducta est ad hanc aequationem differentialem primi gradus, parum complicatam, inter binas variabiles p et z, vnde si licuerit z per p modo finito definire, etiam quadratum vv per p definiretur, hincque porro altera celeritas $u = pv$; quam ob rem plurimum optandum esset vt Geometrae vires suas excercerent in ista aequatione resoluenda. Vbi notasse iuuabit, si vltimum membrum $pz(1+p)$ abesset, totam aequationem nulla difficultate esse laboraturam, quia separationem variabilium sponte admitteret: foret enim $\frac{(1-p)\,dp}{bc+aap^3} = \frac{dz}{bc-zz}$. Ante autem quam haec inuentio fuerit facta, vlterius progredi non licet.

Supplementum.

continens Solutionem perfectam Problematis.

§. 19. Postquam praecedens scriptum absolueram, prorsus desperans de resolutione aequationis differentialis, ad quam sum perductus, nihilo tamen minus rem variis modis deinceps tentaui, et tandem per longas ambages contigit mihi eruere aequationem integralem, atque adeo algebraicam, quam hic comunicaturus sum; ipsam autem Analysin, qua sum vsus, in aliam occasionem reseruare est visum.

§. 20. Perueneram autem ad hanc aequationem differentialem primi gradus:

$$a(1-p)(bc-zz)\,dp + bc + aap^3 + apz(1+p)\,dz = 0,$$

vbi

vbi ex praecedentibus elementis erat $p = \frac{u}{v}$, $z = b$ cof. ω et $bc = bb + kk$. Hanc aequationem porro, ponendo $z = as$ et $\frac{bb + kk}{aa} = nn$, ita vt fit $s = \frac{b}{a}$ cof. ω, ad hanc formam fimpliciorem reduxi:

$$dp(1-p)(nn-ss) + ds(nn+p^2+ps(1+p)) = 0,$$

quippe quae, praeter binas variabiles p et s, vnicam conftantem nn involvit, atque huius aequationis integrale completum inueni effe

$$\frac{nn + ps + p + s}{\sqrt{nn + pp + 2ps}} = C.$$

§. 21. Quoniam autem Analyfin, quae me huc perduxit, exponendam in aliud tempus referuo, hic fufficiet veritatem huius integralis demonftrare. Oftendam enim, fi haec formula differentietur, tum ipfam aequationem integrandam renera refultare. Euidens autem eft, differentiale huius formulae fore fractionem, cuius denominator eft $(nn + pp + 2ps)^{\frac{3}{2}}$, per quam ergo fi aequatio propofita diuidatur, integrabilis euadat neceffe eft.

§. 22. Numerator iftius differentialis duabus conftabit partibus, altera per dp altera per ds affecta; vtramque igitur feorfim inueftigemus. Ac prior quidem pars erit

$$dp(s+1)(nn+pp+2ps) - dp(p+s)(nn+ps+p+s)$$

quae reducitur ad hanc formam: $dp(1-p)(nn-ss)$, quae eft ipfa pars prior aequationis propofitae. Simili modo reperitur altera pars

$$= ds(p+1)(nn+pp+2ps) - p\,ds(nn+ps+p+s),$$

quae

quae reducitur ad $ds(nn+p^3+ps(1+p))$, id quod cum membro secundo aequationis propositae conuenit.

§. 23. Ex hac igitur aequatione integrali definiri poterit s per p, cuius valor ita se habet:

$$s = \frac{CCp-(p+1)(p+nn) \pm C\surd(CCpp+(pp-1)(pp-nn))}{(p+1)^2};$$

vnde, ob $s = \frac{b\,\mathrm{cof.}\,\omega}{a}$, angulus ω per variabilem p exprimitur. Deinde vero aequatio integralis primum inuenta

$$ff = (aapp + bc + 2abp\,\mathrm{cof.}\,\omega)\,vv,$$

ob $\frac{bc}{aa} = nn$, dabit $vv = \frac{ff}{aa(nn+pp+2ps)}$, ideoque etiam v per p definitur, cum sit $v = \frac{f}{a\surd(nn+pp+2ps)}$, vnde ob positum $u = pv$ erit etiam $u = \frac{fp}{a\surd(nn+pp+2ps)}$. Hinc porro etiam ipsi anguli ψ et Φ per has formulas integrandas inuestigantur: $\Phi = \int\frac{u\,d\omega}{v-u}$ et $\psi = \int\frac{v\,d\omega}{v-u}$; ac denique, cum sit $\frac{d\Phi}{u} = dt$, vel etiam $\frac{d\psi}{v} = dt$, ipsum quoque tempus t per eandem variabilem p determinabitur. Erit enim $t = \int\frac{d\omega}{v-u}$, sicque omnia sunt determinata quae ad perfectam Problematis solutionem spectant.

§. 24. Praeterea vero etiam notasse iuuabit inter ternas variabiles v, u et ω duas aequationes algebraicas dari posse; si enim in integrali aequatione inuenta loco p scribatur $\frac{u}{v}$, ob $\surd(nn+pp+2ps) = \frac{f}{av}$ et $s = \frac{b\,\mathrm{cof.}\,\omega}{a}$, erit illa aequatio

$$Cf = b\,\mathrm{cof.}\,\omega\,(v+u) + a(u+nnv).$$

Ante autem iam inueneramus esse

$$\frac{ff}{aa} = nnvv + uu + \frac{2b}{a}uv\,\mathrm{cof.}\,\omega.$$

§. 25.

§. 25. Initio vero iam inueneramus aequationem differentialem inter easdem ternas variabiles v, u, ω, quae erat: $a\,du + b\,dv \cos.\omega = \frac{b\,v\,v\,d\omega \sin.\omega}{v-\omega}$. Haec ergo cum binis praecedentibus integralibus conuenire debet, quae, si constantes per integrationem ingressas paulisper mutemus, ponendo $\frac{f}{a} = g$ et $\frac{fC}{a} = h$, erunt:

$$g\,g = u\,u + n\,n\,v\,v + \frac{2\,b\,u\,v}{a}\cos.\omega$$

$$h = \frac{b\cos.\omega}{a}(v+u) + u + n\,n\,v,$$

atque hanc conuenientiam contemplanti haud difficile erit viam multo planiorem inuenire, quae ad eandem integrationem, tanto labore erutam, perducat.

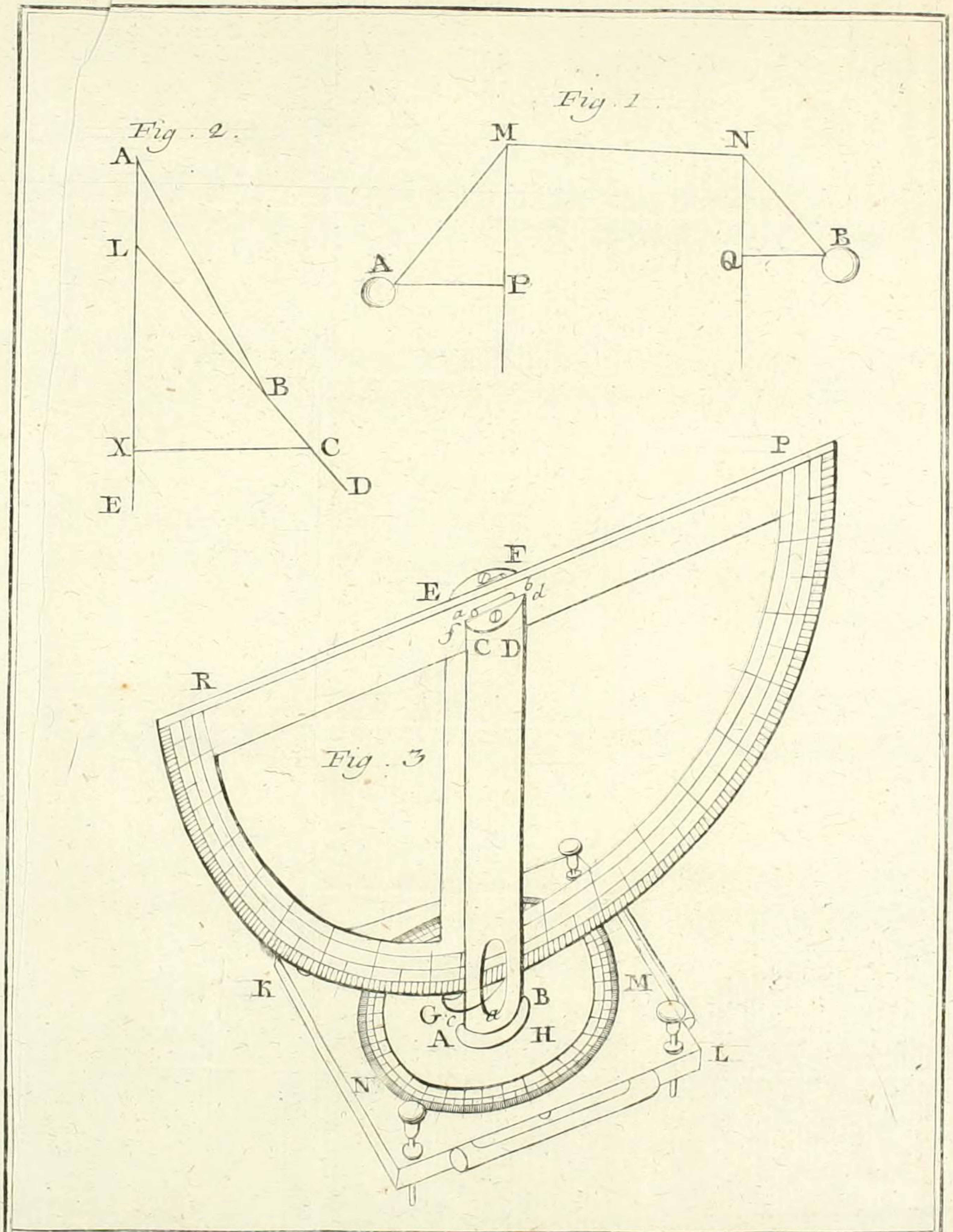

Fig. 1.
M
N
A
P
Q
B
Fig. 2.
A
L
B
X
C
D
E
Fig. 3.
P
F
E
a
b
d
f
C
D
R
K
M
B
G
c
a
A
H
L
N