1781

De casibus quibusdam maxime memorabilibus in analysi indeterminata, ubi imprimis insignis usus calculi angulorum in analysi Diophantea ostenditur

Leonhard Euler

DE CASIBVS QVIBVSDAM MAXIME MEMORABILIBVS IN ANALYSI INDETERMINATA; VBI IMPRIMIS INSIGNIS VSVS CALCVLI ANGVLORVM IN ANALYSI DIOPHANTAEA OSTENDITVR.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Quaestionum, quas hic sum tractaturus, iam olim mentionem feci, in Dissertatione, Tomo VI. Nouor. Comm. inserta sub titulo: *De Problematibus indeterminatis, quae videntur plusquam determinata*; vbi ostendi, quomodo vnica aequatione, inter quantitates indeterminatas constituta, plurima Problemata Diophantaea facili calculo simul resolui queant; id quod vtique maxime Paradoxon videbatur, cum vulgo numerus conditionum propositarum numerum quantitatum incognitarum superare non soleat. Quam ob caussam argumentum ibi tractatum vtique in Analysi maximi momenti est censendum. Tum temporis autem in eiusmodi aequationibus subsistere fui coactus, in quibus quantitates indeterminatae non vltra secundam dimensionem ascendant. Nunc autem tales aequationes sum contemplaturus, vbi indeterminatae adeo ad quartam dimensioſionem aſſurgunt, quarum reſolutio fines Analyſeos tranſcendere videatur, quandoquidem hic tantum de ſolutionibus per numeros rationales agitur.

§. 2. Prima igitur aequatio quarti gradus, quam hic tractabo, hoc Problemate continetur.

Problema I.

Inuenire quatuor numeros rationales x, y, z, v, *vt huic aequationi ſatisfiat:*

$$\left.\begin{matrix} x^4+y^4+z^4-2xxyy-2xxzz-2yyzz \\ +2xxvv+2yyvv+2zzvv+v^4 \end{matrix}\right\} = 0$$

cuius formulae, ſatis prolixae, loco hic breuitatis gratia in ſequentibus ſcribam litteram V.

§. 3. Pro his autem litteris x, y, z, v, inuentis idoneis valoribus, ſimul ſequentes ſeptem formulae ſponte euadent numeri quadrati, quae ſunt:

I. $xxyy-zzvv=\frac{1}{4}(xx+yy-zz+vv)^2$
II. $xxzz-yyvv=\frac{1}{4}(xx+zz-yy+vv)^2$
III. $yyzz-xxvv=\frac{1}{4}(yy+zz-xx+vv)^2$
IV. $xxyy-vv(xx+yy)=\frac{1}{4}(xx+yy-zz-vv)^2$
V. $xxzz-vv(xx+zz)=\frac{1}{4}(xx+zz-yy-vv)^2$
VI. $yyzz-vv(yy+zz)=\frac{1}{4}(yy+zz-xx-vv)^2$
VII. $xxyy+xxzz+yyzz=\frac{1}{4}(xx+yy+zz+vv)^2$.

Ratio per ſe eſt manifeſta, cum quarta pars formulae noſtrae V, cuius valor per hypotheſin $=0$, ſingulis his ſeptem formulis addita, producat reuera quadrata, quorum radices hic aſſignauimus.

§. 4. Quodsi autem duae tantum huiusmodi formulae, vel adeo tres proponantur, quae quadrata reddi debeant, per praecepta communia methodi Diophanteae negotium difficillime confici poterit, etiamsi quis maxime prolixos calculos expediuerit; vnde intelligitur, si quatuor pluresue tales formulae ad quadrata reducendae proponantur, solutionem ne tentari quidem posse. Tanto magis igitur erit mirandum, quando omnium harum septem formarum reductionem ad quadrata vnico quasi labore assignabimus.

Solutio Problematis propositi.

§. 5. Totam autem solutionem ex duabus tantum prioribus formulis deduci posse obseruaui, quemadmodum ex sequente Analysi intelligetur. Facile autem apparet, primam formulam $xxyy - zzvv$ quadratum reddi, si sumatur $xy = zv\frac{(pp+rr)}{2pr}$; tum enim huius formulae radix erit $= \frac{zv(pp-rr)}{2pr}$, quae igitur aequalis erit quantitati $\frac{1}{2}(xx+yy-zz+vv)$. Simili modo secunda formula euadit quadratum, si sumatur

$$xz = \frac{yv(qq+ss)}{2qs};$$

tum enim eius radix erit

$$\frac{yv(qq-ss)}{2qs} = \frac{1}{2}(xx+zz-yy+vv),$$

ex quibus conditionibus iam liquet, omnes quatuor quantitates x, y, z, v, determinari posse, ita vt non opus sit ad reliquas formulas respicere.

§. 6. Cum igitur sit

$$\frac{xy}{zv} = \frac{pp+rr}{2pr} \text{ et } \frac{xz}{yv} = \frac{qq+ss}{2qs},$$

prior

prior per posteriorem multiplicata dabit hanc aequationem:

$$\frac{xx}{vv}=\frac{(pp+rr)(qq+ss)}{4prps}.$$

Prior autem per posteriorem diuisa dat

$$\frac{yy}{zz}=\frac{qs(pp+rr)}{pr(qq+ss)};$$

vnde patet, istam solutionem absolui non posse, nisi pro literis p, r, q, s, tales numeri exhiberi queant, vt ista formula: $\frac{(pp+rr)(qq+ss)}{4prqs}$ euadat quadratum. Hoc autem praestito quoque altera expressio, pro $\frac{yy}{zz}$ inuenta, fiet quadratum. Infra autem fusius ostendemus, quomodo tales numeri p, r, q, s, quotcunque libuerit, inuestigari queant.

§. 7. Hic igitur assumemus tales numeros nobis iam esse cognitos, indeque reperiri

$$\frac{xx}{vv}=\frac{aa}{bb} \text{ et } \frac{yy}{zz}=\frac{cc}{dd};$$

inde ergo statuatur

$$x=at;\ v=bt;\ y=cu \text{ et } z=du,$$

et iam has duas literas t et u ex radicibus ante exhibitis sequenti modo facile eruere licebit. His enim valoribus substitutis prior radix praebebit

$$\frac{bdtu(pp-rr)}{pr}=(aa+bb)tt+(cc-dd)uu.$$

Simili modo ex altera radice nanciscimur

$$\frac{bctu(qq-ss)}{qs}=(aa+bb)tt-(cc-dd)uu.$$

Sufficeret autem vnica harum duarum aequationum, quandoquidem per extractionem radicis quadratae ambae quantitates t et u, atque adeo duplici modo definiri possent, nisi forte ad irrationalia delaberemur. Hoc autem fieri non posse ex sequenti Analysi patescet.

Formu-

§. 8. Statuamus hic breu. gr.

$$\frac{pp - rr}{2pr} = m \text{ et } \frac{qq - ss}{2qs} = n,$$

vbi notetur, pro radicibus quadratis etiam sumi potuisse

$$\frac{rr - pp}{2pr} \text{ et } \frac{ss - qq}{2qs};$$

vnde patet, ambas literas m et n tam positiue quam negatiue accipi posse. Hoc modo habebimus has aequationes:

$$2mbdtu = (aa + bb)tt + (cc - dd)uu$$
$$2nbctu = (aa + bb)tt - (cc - dd)uu;$$

quae duae aequationes, additae, dabunt hanc:

$$b(md + nc)tu = (aa + bb)tt,$$

quae praebet

$$\frac{t}{u} = \frac{b(md + nc)}{aa + bb}.$$

Eodem modo, si posterior a priore subtrahatur, prodibit ista aequalitas:

$$b(md - nc)tu = (cc - dd)uu,$$

vnde iterum deducitur

$$\frac{t}{u} = \frac{cc - dd}{b(md - nc)};$$

qui duo valores certe inter se conuenire debent. Vtamur igitur posteriore forma, et quia literas m et n pro lubitu siue positiue siue negatiue accipere licet, statuamus

$$t = cc - dd \text{ et } u = b(md \pm nc);$$

vbi iam duplex solutio inuoluitur.

§. 9. Substituamus igitur hos valores, atque omnes nostrae quatuor quantitates incognitae x, y, z, v, sequenti modo prodibunt determinatae:

 $x = a$

$$x = a(cc - dd);\; v = b(cc - dd)$$
$$y = bc(md \pm nc);\; z = bd(md \pm nc),$$

vbi vel figna fuperiora vel inferiora vbique capi debebunt. Atque nunc certo affeuerare poffumus, his valoribus literarum x, y, z, v, omnes feptem formulas fupra memoratas quadrata reddi, quamuis tantum duas priores hic in computum duxerimus.

§. 10. Ante autem quam methodum fumus traditúri, numeros idoneos pro literis p, r, q, s inueftigandi, conueniet hanc folutionem per aliquot exempla illuftrare, in quo negotio quidem neceffe erit, ex iis, quae deinceps tradentur, valores idoneos pro literis p, r, q, s, depromere.

Exemplum I.

vbi $p = 5$, $r = 1$, $q = 8$, $s = 1$.

§. 11. Ex his igitur valoribus habebimus ftatim

$$\frac{xy}{zv} = \frac{13}{5} \text{ et } \frac{xz}{yv} = \frac{65}{16};$$

hinc iam fequitur, fore

$$\frac{xx}{vv} = \frac{13^2}{4^2} \text{ et } \frac{yy}{zz} = \frac{4^2}{5^2};$$

quamobrem ftatuamus

$$x = 13t;\; v = 4t;\; y = 4u;\; z = 5u,$$

ita vt fit

$$a = 13;\; b = 4;\; c = 4;\; d = 5.$$

Iam porro quia eft

$$m = \frac{12}{5} \text{ et } n = \frac{63}{16},$$

ex his iam valoribus namiscemur

$$x = 39;\ v = 12;\ y = 16\,(4 \pm \tfrac{21}{4});\ z = 20\,(4 \pm \tfrac{21}{4}).$$

Prouti igitur vel superiora signa vel inferiora valent, obtinebimus duas sequentes solutiones ad minimos terminos reductas, si forte habuerint inter se comunem factorem:

$$\text{I. } x = 39;\ v = 12;\ y = 20;\ z = 25.$$

$$\text{II. } x = 39;\ v = 12;\ y = 148;\ z = 185.$$

quarum solutionum prior sine dubio simplices satis numeros Problemati satisfacientes suppeditat.

§. 12. Videamus, quomodo prior Solutio omnibus septem formulis supra allatis satisfaciat

$$\text{I. } \sqrt{(xxyy - zzvv)} = \tfrac{1}{2}(xx + yy - zz + vv) = 720.$$

$$\text{II. } \sqrt{(xxzz - yyvv)} = \tfrac{1}{2}(xx + zz - yy + vv) = 945.$$

$$\text{III. } \sqrt{(yyzz - xxvv)} = \tfrac{1}{2}(yy + zz - xx + vv) = 176.$$

$$\text{IV. } \sqrt{(xxyy - vv(xx + yy))} = \tfrac{1}{2}(xx + yy - zz - vv) = 576.$$

$$\text{V. } \sqrt{(xxzz - vv(xx + zz))} = \tfrac{1}{2}(xx + zz - yy - vv) = 801.$$

$$\text{VI. } \sqrt{(yyzz - vv(yy + zz))} = \tfrac{1}{2}(yy + zz - xx - vv) = 320.$$

$$\text{VII. } \sqrt{(xxyy + xxzz + yyzz)} = \tfrac{1}{2}(xx + yy + zz + vv) = 1345.$$

Exemplum II.

quo $p = 5$, $r = 1$, $q = 13$, $s = 9$.

§. 13. Hic igitur erit

$\frac{xy}{zv} = \frac{13}{5}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{125}{117}$, hinc $\frac{xx}{vv} = \frac{5^2}{3^2}$ et $\frac{yy}{zz} = \frac{39^2}{25^2}$, ideoque

$\frac{x}{v} = \frac{5}{3}$ et $\frac{y}{z} = \frac{39}{25}$.

 Fiat

Fiat ergo

$$x = 5\,t;\ v = 3\,t;\ y = 39\,u;\ z = 25\,u,$$

ita vt ſit

$$a = 5;\ b = 3;\ c = 39;\ d = 25.$$

Porro autem erit

$$m = \tfrac{12}{5} \text{ et } n = \tfrac{44}{117}, \text{ ex quibus valoribus fiet}$$

$$x = 5 \cdot 896;\ v = 3 \cdot 896;$$

$$y = 3 \cdot 39 \cdot 60 \pm 39 \cdot 44;\ z = 3 \cdot 25 \cdot 60 \pm 25 \cdot 44.$$

Hinc ergo ſequentes duae ſolutiones deducuntur:

I. $x = 112;\ v = 672;\ y = 39;\ z = 25.$

II. $x = 112;\ v = 672;\ y = 39 \cdot 89;\ z = 25 \cdot 89.$

Exemplum III.

quo $p = 8,\ r = 1;\ q = 13;\ s = 9.$

§. 14. Hoc caſu erit

$$\frac{xy}{zv} = \tfrac{65}{16} \text{ et } \frac{xz}{yv} = \tfrac{125}{117}, \text{ hincque}$$

$$\frac{xx}{vv} = \frac{25^2}{12^2} \text{ et } \frac{yy}{zz} = \frac{39^2}{20^2}.$$

Sumto igitur

$$x = 25\,t;\ v = 12\,t;\ y = 39\,u;\ z = 20\,u \text{ erit}$$

$$a = 25;\ b = 12;\ c = 39;\ d = 20.$$

Porro fit

$$m = \tfrac{65}{16} \text{ et } n = \tfrac{44}{117}.$$

Hinc iam colligitur

$$x = 25 \cdot 1121;\ v = 12 \cdot 1121$$

$$y = 39\,(945 \pm 176);\ z = 20\,(945 \pm 176);$$

has

has ergo nanciscimur solutiones:

I. $x = 25 . 1121$; $v = 12 . 1121$; $y = 39 . 769$; $z = 20 . 769$

II. $x = 25$; $v = 12$; $y = 39$; $z = 20$.

Exemplum IV.

quo $p = 3$, $r = 1$; $q = 15$; $s = 8$.

§. 15. Fiet igitur

$\frac{xy}{zv} = \frac{5}{3}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{289}{240}$, ideoque

$\frac{xx}{vv} = \frac{17^2}{12^2}$ et $\frac{yy}{zz} = \frac{20^2}{17^2}$. Hinc sumto

$x = 17\,t$; $v = 12\,t$; $y = 20\,u$; $z = 17\,u$ erit

$a = 17$; $b = 12$; $c = 2$; $d = 17$.

Deinde fiet

$m = \frac{4}{3}$ et $n = \frac{161}{240}$, vnde colligitur

$x = 17 . 111$; $v = 12 . 111$

$y = 20\,(272 \pm 161)$; $z = 17\,(272 \pm 161)$.

Hinc sequentes solutiones:

I. $x = 17 . 111$; $v = 12 . 111$; $y = 20 . 433$; $z = 17 . 433$

II. $x = 17$; $v = 12$; $y = 20$; $z = 17$

quae solutio posterior sine dubio omnium est simplicissima.

Exemplum V.

quo $p = 5$, $r = 2$, $q = 9$, $s = 8$

§. 16. Hic erit

$\frac{xy}{zv} = \frac{29}{20}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{145}{144}$, hinc

$\frac{xx}{vv} = \frac{29^2}{24^2}$ et $\frac{yy}{zz} = \frac{6^2}{5^2}$.

Sumatur ergo

$a = 29$; $b = 24$; $c = 6$; $d = 5$; et cum sit

$m = \frac{21}{20}$ et $n = \frac{17}{144}$, valores quaesiti erunt

$x = 29 . 11$; $y = 6\ (126 \pm 17)$

$v = 24 . 11$; $z = 5\ (126 \pm 17)$.

Ambae ergo solutiones erunt

I. $x = 29 . 11$; $v = 24 . 11$; $y = 6 . 109$; $z = 5 . 109$

II. $x = 29$; $v = 24$; $y = 78$; $z = 65$

Alia Solutio eiusdem Problematis, per Calculum angulorum deducta.

§. 17. Cum formula $xxyy - zzvv$ debeat esse quadratum, hoc eueniet, si sumatur $xy \text{ fin. } \alpha = vz$; tum enim erit $\sqrt{(xxyy - zzvv)} = xy \text{ cof. } \alpha$, quae ergo quantitas aequalis est huic formulae:

$$\tfrac{1}{2}(xx + yy - zz + vv).$$

Simili modo, posito

$$yv = xz \text{ fin. } \beta, \text{ fiet } \sqrt{(xxzz - yyvv)} = xz \text{ cof. } \beta$$
$$= \tfrac{1}{2}(xx + zz - yy + vv).$$

§. 18. Cum igitur sit

$\frac{xy}{zv} = \frac{1}{\text{fin. } \alpha}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{1}{\text{fin. } \beta}$, productum dabit

$\frac{xx}{vv} = \frac{1}{\text{fin. } \alpha \text{ fin. } \beta}$;

quamobrem statuamus $x = t$ et $v = t \sqrt{\text{fin. } \alpha \text{ fin. } \beta}$. Prior vero per posteriorem diuisa dat $\frac{yy}{zz} = \frac{\text{fin. } \beta}{\text{fin. } \alpha}$; vnde statuamus

$$y = u \sqrt{\text{fin. } \beta} \text{ et } z = u \sqrt{\text{fin. } \alpha}.$$

Substi-

Subſtituantur nunc hi valores in ſuperiore radice extracta ſiue in hac aequatione:

$$2\,x\,y\,\text{cof.}\,\alpha = x\,x + y\,y - z\,z + v\,v,$$

orieturque iſta:

$$2\,t\,u\,\text{cof.}\,\alpha\,\sqrt{\text{fin.}\,\beta} = t\,t(1 + \text{fin.}\,\alpha\,\text{fin.}\,\beta) + u\,u(\text{fin.}\,\beta - \text{fin.}\,\alpha),$$

ex qua aequatione quadratica quaeratur u, fietque

$$u = \frac{t\,\text{cof.}\,\alpha\,\sqrt{\text{fin.}\,\beta} \pm t\,\text{cof.}\,\beta\,\sqrt{\text{fin.}\,\alpha}}{\text{fin.}\,\beta - \text{fin.}\,\alpha};$$

quamobrem ſumi poterit

$$t = \text{fin.}\,\beta - \text{fin.}\,\alpha \text{ et } u = \text{cof.}\,\alpha\,\sqrt{\text{fin.}\,\beta} \pm \text{cof.}\,\beta\,\sqrt{\text{fin.}\,\alpha}.$$

§. 19. Subſtitutis igitur his valoribus loco t et u, quatuor quantitates quaeſitae x, y, z, v ita determinabuntur, vt ſit

$$x = \text{fin.}\,\beta - \text{fin.}\,\alpha;\; v = (\text{fin.}\,\beta - \text{fin.}\,\alpha)\sqrt{\text{fin.}\,\alpha\,\text{fin.}\,\beta}$$
$$y = \text{cof.}\,\alpha\,\text{fin.}\,\beta \pm \text{cof.}\,\beta\sqrt{\text{fin.}\,\alpha\,\text{fin.}\,\beta};\; z = \text{cof.}\,\beta\,\text{fin.}\,\alpha + \text{cof.}\,\alpha\sqrt{\text{fin.}\,\alpha\,\text{fin.}\,\beta}.$$

Cum igitur hoc modo aequationi

$$2\sqrt{(x\,x\,y\,y - z\,z\,v\,v)} = x\,x + y\,y - z\,z + v\,v,$$

ſatisfiat, ſumtis vtrinque quadratis ipſa aequatio biquadradica propoſita V oritur, cui ergo etiam his valoribus ſatisfiet, conſequenter etiam omnes ſeptem formulae ſupra allatae ſimul fient quadrata, etiamſi in hac Analyſi binas tantum priores ſimus contemplati.

§. 20. Vt igitur valores pro x, y, z, v inuenti fiant rationales, ante omnia ſinus et coſinus angulorum α et β debent eſſe rationales, id quod fiet, ſi ſumamus

$$\text{fin.}\,\alpha = \frac{2\,p\,r}{p\,p + r\,r} \text{ et fin.}\,\beta = \frac{2\,q\,s}{q\,q + s\,s};$$

tum

tum enim erit

$$\cos.\,\alpha = \frac{pp - rr}{pp + rr} \text{ et } \cos.\,\beta = \frac{qq - ss}{qq + ss}.$$

Praeterea vero hic imprimis requiritur, vt productum finuum, fcilicet:

$$\sin.\,\alpha \sin.\,\beta = \frac{4pr\,qs}{(pp + rr)(qq + ss)} = \square,$$

quae eft ea ipfa conditio, quae in folutione praecedente poftulabatur, ita vt ifta folutio ab illa non aliter nifi modo inueftigationis difcrepet. Hic vero fundamentum totius folutionis multo clarius perfpicitur. Nunc igitur eam inueftigationem aggrediamur, quam fupra fumus polliciti; quemadmodum fcilicet binae tales formulae indagari queant, quarum productum quadratum efficiat.

Quaeftio.

Inueftigare binas huiusmodi formulas:

$$\frac{pp + rr}{2pr} \text{ et } \frac{qq + ss}{2qs},$$

quarum productum fiat quadratum.

Solutio.

§. 21. Cum igitur iftud productum debeat fieri quadratum, per quadratum $4pprrqqss$ multiplicando etiam hoc productum quadratum reddi debet:

$$pr(pp + rr) \times qs(qq + ss);$$

vbi id commodum fumus adepti, vt prior factor tantum literas p et r, pofterior vero folas q et s contineat, cui conditioni vtique perfectiffime fatisfieret, fi vtraque formula $pr(pp + rr)$ et $qs(qq + ss)$ feorfim quadratum effici poffet. Verum iam dudum demonftratum eft, hoc pror-

prorſus eſſe impoſſibile. Quia enim producti prioris factores p, r, $(pp + rr)$ ſunt primi inter ſe, neceſſe foret, vt ſinguli eſſent quadrata. Poſito ergo $p = tt$ et $r = uu$, tertius factor quadratus efficiendus foret $t^4 + u^4$. Demonſtratum autem eſt, ſummam duorum biquadratorum quadratum reddi nunquam poſſe.

§. 22. Cum igitur ambae hae formulae:

$$pr(pp + rr) \text{ et } qs(qq + ss)$$

ipſae quadrata eſſe nequeant, neceſſe eſt, vt ſint *numeri planiſimiles*, vti ab *Euclide* vocantur. Quanquam autem ad hoc efficiendum quatuor habemus quantitates indeterminatas p, r, q, s, tamen nullo modo ſolutio generalis adhuc inueſtigare potuit; quam ob cauſſam tantum ſolutionibus particularibus contenti eſſe debemus, quae etiam maximas difficultates inuoluunt, niſi iſtas formulas in aliam ſpeciem tranſmutemus, quod commodiſſime hoc modo fiet. Ponatur $p = 2fg$ et $r = ff - gg$; ſimilique modo $q = 2hk$ et $s = hh - kk$, hocque modo ambae noſtrae formulae euadent

$$2fg(ff - gg)(ff + gg)^2 \text{ et } 2hk(hh - kk)(hh + kk)^2.$$

Quia igitur poſtremi factores ſponte ſunt quadrata, ſupereſt, vt hoc productum:

$$2fg(ff - gg) \times 2hk(hh - kk)$$

reddatur quadratum, ſiue, quod eodem redit, hoc:

$$fg(ff - gg) . hk(hh - kk),$$

et quia hic etiam quatuor literae inſunt, vt eas ad pauciorem numerum reducamus, ſtatuamus $h = g$ et $k = f - g$; hoc modo poſterior formula erit $fg(f - g)(2g - f)$, quae

 per

per priorem multiplicata, omiſſis factoribus quadratis, praebet hoc productum: $(f+g)(2g-f)$ quadratum efficiendum. Hunc in finem ponatur

$$f = \frac{2mm - nn}{3} \text{ et } g = \frac{mm + nn}{3}.$$

ſiue, quia vtriusque literae aeque multipla ſumere licet, ſumamus

$$f = 2mm - nn \text{ et } g = mm + nn, \text{ vnde fiet}$$
$$h = mm + nn \text{ et } k = mm - 2nn.$$

§. 23. Hinc ergo pro lubitu innumerabilia paria binarum talium formularum:

$$fg(ff-gg) \text{ et } hk(hh-kk)$$

erui poterunt, quarum productum certe erit quadratum. Veluti ſi ſumamus $m = 2$ et $n = 1$, habebimus hos valores:

$$f = 7;\ g = 5;\ h = 5;\ k = 2.$$

Hinc enim fit

$$fg(ff-gg) = 840 \text{ et } hk(hh-kk) = 210,$$

quarum productum eſt $4 \cdot 210^2$.

§. 24. Verum hoc modo valores literarum p, r, q, s, mox prodirent ſatis enormes, quia poſuimus

$$p = 2fg,\ r = ff-gg;\ q = 2hk \text{ et } s = hh-kk,$$

qui in exemplo allato fierent

$$p = 70;\ q = 20;\ r = 24;\ s = 21,$$

vbi bini p et r per 2 depreſſi euadent $p = 35$ et $r = 12$; ita vt noſtrum productum vtique ſit quadratum, ſcilicet:

$$3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 29^2 \cdot 37^2.$$

Verum

Verum quia hi numeri ex casu simplicissimo, pro m et n sumto, sunt orti, facile intelligitur, ex maioribus valoribus, pro m et n ortis, pro literis p, r, q, s mox maximos numeros esse prodituros.

§. 25. Cum igitur pro nostro Problemate Solutiones potissimum simpliciores intendamus, istae formulae, ad quas sumus perducti, ad hunc scopum neutiquam sunt accommodatae; vnde longe aliam viam inire conueniet, quae ita sit comparata, vti non ad numeros nimis magnos pro literis p, r, q, s, perducat, et quae simul simplicissimas solutiones certissime exhibeat, id quod sequenti modo commodissime praestabitur. Cum $ab(aa+bb)$ sit forma vtriusque formulae, qua indigemus, pro a et b successiue accipiamus numeros simpliciores, et productum reuocemus ad hanc formam: $A^2 F$, vbi A^2 complectatur omnes factores quadratos, F vero sit productum ex factoribus non quadratis. Pro nostro igitur instituto eiusmodi duae pluresue formulae requiruntur, quae pro F eundem valorem praebeant, quandoquidem tales pro binis nostris formulis $pr(pp+rr)$ et $qs(qq+ss)$ accipere licebit. Hunc in finem sequentem tabulam adiungimus, quae pro singulis valoribus literarum a et b numeros litera F indicatos exhibeat, et quoniam consultum est in valoribus simplicioribus subsistere, hinc omittamus omnes numeros primos maiores quam 13.

a	b	F
2	1	2.5
3	1	2.3.5
3	2	2.3.13
4	3	3
5	1	2.5.13
7	1	2.7
7	4	5.7.13
8	1	2.5.13
9	7	2.5.7.13
11	2	2.5.11
11	3	2.3.5.11.13
12	5	3.5
13	9	2.5.13
15	8	2.3.5
18	1	2.13

§. 26. Hanc autem tabulam vlterius continuare licet, ſtatuendo $a = 2fg$ et $b = ff - gg$; tum enim tantum formulam $2fg(ff - gg)$ examinare ſufficiet. Hinc ergo ſimilem tabulam pro numeris f et g ſubiungamus, adſcriptis ſimul valoribus litterarum a et b, et vltima columna valores literae F indicabit:

f	g	a	b	F	f	g	a	b	F
2	1	4	3	3	8	1	16	63	7
3	2	12	5	3.5	8	3	48	55	3.5.11
4	1	8	15	2.3.5	8	5	80	39	3.5.13
4	3	24	7	2.3.7	8	7	112	15	3.5.7
5	2	20	21	3.5.7	9	2	36	77	7.11
5	4	40	9	2.5	9	4	72	65	2.5.13
6	1	12	35	3.5.7	10	1	20	99	5.11
6	5	60	11	3.5.11	10	3	60	91	3.5.7.13
7	2	28	45	5.7	11	2	44	117	11.13
7	4	56	33	2.3.7.11	11	4	88	105	2.3.5.7.11
7	6	84	13	3.7.13	11	10	220	21	3.5.7.11

§. 27. Iam ex his duabus tabulis coniunctis excerpamus eos casus, quibus eadem litera F conuenit.

F	a	b	F	a	b
2.5	2	1	2.5.13	5	1
	40	9		8	1
2.3.5	3	1		13	9
	15	8		72	65
			3.5.7	21	20
				35	12
				112	15
			3.5.11	60	11
				55	48

§. 28. Ex his iam casibus plurimae Solutiones nostri Problematis, quo quaeruntur quatuor numeri x, y,

z, v,

z, v, quibus formula biquadratica, in Problemate propoſita, ſigno V indicata, reuera ad nihilum redigitur, deduci posſunt, quarum iam plures in exemplis allatis ſunt datae, quas igitur hic conſpectui coniunctim exponamus:

x	20	39	185	672	78	39.89	25.1121	20.433	6.109
y	17	25	148	112	65	25.89	12.1121	17.433	5.109
z	17	20	39	39	29	672	39.769	17.111	29.11
v	12	12	12	25	24	112	20.769	12.111	24.11

vbi, quia literae x, y, z, inter ſe permutari poſſunt, maximos valores ipſi x tribuimus, hincque deſcendentes pro y et z ſcripſimus. Semper autem minimus valor literae v competit.

Problema II.

Propoſita formula biquadratica

$$V = x^4 + y^4 + z^4 + v^4 - 2xxyy - 2xxzz - 2xxvv$$
$$- 2yyzz - 2yyvv - 2zzvv$$

inueſtigare valores quatuor numerorum x, y, z, v. *vt iſta formula nihilo fiat aequalis.* Quod Problema etiam ita enunciari poteſt: *Quaerantur quatuor quadrata*, xx, yy, zz, vv, *quorum ſi ponatur ſumma* $= \Sigma$, *et ſumma factorum ex binis* $= \Pi$, *vt ſit* $\Sigma^2 = 4\,\Pi$.

§. 29. Quod ſi tales valores pro literis x, y, z, v fuerint inuenti, ſimul ſequentes formulae reddentur quadrata, quorum radices ita ſe habebunt:

I. $2\sqrt{(xxyy + zzvv)} = xx + yy - zz - vv$

II. $2\sqrt{(xxzz + yyvv)} = xx + zz - yy - vv$

III.

III. $2\sqrt{(xxvv+yyzz)}=xx+vv-yy-zz$

IV. $2\sqrt{(xxyy+xxzz+yyzz)}=xx+yy+zz-vv$,

V. $2\sqrt{(xxyy+xxvv+yyvv)}=xx+yy+vv-zz$

VI. $2\sqrt{(xxzz+xxvv+zzvv)}=xx+zz+vv-yy$

VII. $2\sqrt{(yyzz+yyvv+zzvv)}=yy+zz+vv-xx$

quibus addi poteſt

VIII. $2\sqrt{\mathrm{II}}=xx+yy+zz+vv.$

In hoc igitur Problemate quaterni numeri x, y, z, v, aequaliter ingrediuntur, cum in priore Problemate quadrati vv ratio fuiſſet diuerſa.

Solutio huius Problematis.

§. 30. Solae priores formulae hic iterum ſufficiunt ad totam ſolutionem abſoluendam. Cum enim formula $xxyy+zzvv$ debeat reddi quadratum, hoc eueniet, ſumendo

$$xy=zv\frac{(pp-rr)}{2pr};$$

tum enim erit

$$\sqrt{(xxyy+zzvv)}=\frac{zv(pp+rr)}{2pr},$$

ideoque

$$=\tfrac{1}{2}(xx+yy-zz-vv).$$

Simili modo pro ſecunda formula ſi ſumatur

$$xz=\frac{yv(qq-ss)}{2qs} \text{ erit}$$

$$\sqrt{(xxzz+yyvv)}=\frac{yv(qq+ss)}{2qs}=$$

$$\tfrac{1}{2}(xx+zz-yy-vv).$$

§. 31.

§. 31. Cum igitur habeamus has duas aequationes:

$$\frac{xy}{zv} = \frac{pp - rr}{2pr} \text{ et } \frac{xz}{yv} = \frac{qq - ss}{2qs}$$

earum productum dabit

$$\frac{xx}{vv} = \frac{(pp - rr)(qq - ss)}{4prqs};$$

prior vero per posteriorem diuisa dabit

$$\frac{yy}{zz} = \frac{qs(pp - rr)}{pr(qq - ss)},$$

atque nunc vtrique conditioni satisfiet, dummodo fuerit

$$\frac{(pp - rr)(qq - ss)}{prqs} = \square.$$

Quomodo igitur hoc effici debeat in sequentibus fusius docebimus. Interim vero hic assumamus, tales valores pro literis p, q, r, s, nobis esse cognitos.

§. 32. Statuere igitur poterimus

$$\frac{xx}{vv} = \frac{aa}{bb} \text{ et } \frac{yy}{zz} = \frac{cc}{dd},$$

vbi ergo numeri a, b, c, d, vt cogniti spectantur. Quamobrem hinc ponamus $x = at$, $v = bt$, $y = cu$, $z = du$, sicque totum negotium nunc eo est reductum, vt ambo numeri t et u debite assignentur. Pro priore igitur radice quadrata $\frac{zv(pp + rr)}{2pr}$ habebimus $zv = bdtu$; vnde si statuamus breu. gr. $\frac{bd(pp + rr)}{2pr} = m$, similique modo pro altera radice (ob $yv = bctu$) $\frac{bc(qq + ss)}{2qs} = n$, ambo radices erunt mtu et ntu.

§. 33. Pro priore igitur radice habebimus

$$2mtu = xx + yy - zz - vv;$$

pro altera vero

$$2ntu = xx + zz - yy - vv,$$

qua-

quarum summa dabit

$$(m+n)tu = xx - vv = (aa - bb)tt,$$

vnde statim deducitur $\frac{t}{u} = \frac{m+n}{aa-bb}$. Simili modo differentia dabit

$$(m-n)tu = yy - zz = (cc - dd)uu,$$

vnde etiam deducimus $\frac{t}{u} = \frac{cc-dd}{m-n}$, qui duo valores per ipsam quaestionis naturam inter se congruere debebunt. At vero quia m et n per extractionem radicis sunt natae, eas tam negatiue quam positiue accipere licebit, vnde simul gemini valores pro t et u reperientur, quibus inuentis tota Problematis Solutio ita se habebit:

$$x = a(m+n);\ v = b(m+n);$$

$$y = c(aa-bb);\ z = d(aa-bb);$$

vnde facile erit exempla quotcunque euoluere.

Exemplum 1.

quo sumitur $p = 5$, $r = 2$, $q = 6$ et $s = 1$.

§. 34. Hic igitur erit

$$\frac{xy}{zv} = \frac{21}{20} \text{ et } \frac{xz}{yv} = \frac{35}{12};$$

vnde oritur

$$\frac{xx}{vv} = \frac{7^2}{4^2}, \text{ ideoque } a = 7 \text{ et } b = 4;$$

tum vero erit

$$\frac{yy}{zz} = \frac{3^2}{5^2}, \text{ ergo } c = 3 \text{ et } d = 5;$$

vnde fiet $m = 29$ et $n = 37$. Cum autem sit $m = \pm 29$, duplex solutio ita se habebit:

$$x = 7(37 \pm 29);\ v = 4(37 \pm 29);\ y = 99;\ z = 165.$$

Signa igitur ſuperiora praebent hanc ſolutionem:

$$x = 14;\ v = 8;\ y = 3;\ z = 5;$$

inferiora vero

$$x = 56;\ v = 32;\ y = 99;\ z = 165.$$

Exemplum 2.

quo $p = 5,\ r = 2,\ q = 8,\ s = 7.$

§. 35. Hic erit

$$\frac{xy}{zv} = \frac{21}{20} \text{ et } \frac{xz}{yv} = \frac{15}{112},$$

vnde oritur

$$\frac{xx}{vv} = \frac{3^2}{8^2} \text{ et } \frac{yy}{zz} = \frac{14^2}{5^2}.$$

Sumatur ergo $a = 3;\ b = 8;\ c = 14;\ d = 5$, fietque $m = 58$ et $n = 113$. Verum ob $m = \pm 58$ duplex oritur ſolutio, ſcilicet:

$$x = 3(113 \pm 58);\ v = 8(113 \pm 58);$$
$$y = 14.55 \text{ et } z = 5.55.$$

Hinc hae duae ſolutiones:

$$x = 3;\ v = 8;\ y = 14;\ z = 5.$$
$$x = 3.171;\ v = 8.171;\ y = 14.55;\ z = 5.55.$$

Exemplum 3.

quo $p = 6;\ r = 1;\ q = 8;\ s = 7.$

§. 36. Hoc caſu fit

$$\frac{xy}{zv} = \frac{35}{12} \text{ et } \frac{xz}{yv} = \frac{15}{112}, \text{ ideoque}$$
$$\frac{xx}{vv} = \frac{5^2}{4^2} \text{ et } \frac{yy}{zz} = \frac{14^2}{3^2}.$$

Sum-

Sumto igitur

$a = 5$; $b = 8$; $c = 14$; $d = 3$ erit

$m = \pm 74$ et $n = 113$, hincque

$x = 5(113 \pm 74)$ et $v = 8(113 \pm 74)$;

vnde hae duae ſolutiones oriuntur:

$x = 5$; $v = 8$; $y = 14$; $z = 3$.

$x = 5 \cdot 187$; $v = 8 \cdot 187$; $y = 14 \cdot 39$; $z = 3 \cdot 39$.

Exemplum 4.

quo $p = 6$, $r = 5$; $q = 8$; $s = 3$.

§. 37. Cum hinc ſit

$\frac{xy}{zv} = \frac{11}{80}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{55}{48}$, erit

$\frac{xx}{vv} = \frac{11^2}{24^2}$ et $\frac{yy}{zz} = \frac{2^2}{5^2}$, ideoque

$a = 11$; $b = 24$; $c = 2$; $d = 5$;

hinc ob $m = 122$ et $n = 73$, erit

$x = 11(122 \pm 73)$ et $v = 24(122 \pm 73)$;

vnde ſequentes deducuntur ſolutiones:

$x = 11 \cdot 49$; $v = 24 \cdot 49$; $y = 2 \cdot 455$; $z = 5 \cdot 455$;

$x = 33$; $v = 72$; $y = 14$; $z = 35$.

§. 38. Si quis plura huiusmodi exempla euoluere voluerit, quoniam totum negotium eo redit, vt pro p, r, q, s, idonei valores exhiberi queant, ad hoc efficiendum ſequentem regulam adiungamus.

Regula, pro inueniendis numeris idoneis, pro p, r, q, s.

§. 39. Si f et g denotent numeros quoscunque siue positiuos siue negatiuos, semper accipi poterit

$$p = fg \text{ et } r = (2g + f)(3g + 2f);$$

tum vero sumi poterunt duplici modo pro q et s valores debiti, scilicet:

$$q = (2g + f)(3g + f) \text{ et } s = f(f + g), \text{ vel}$$

$$q = (f + g)(3g + 2f) \text{ et } s = g(3g + f);$$

vbi notandum, si bini tales numeri habeant factorem communem, eum omitti posse; ac si eueniat, vt tales numeri prodeant negatiui, eorum loco semper positiuos scribere licebit. Ita si pro f et g vnitas accipiatur, erit $p = 1$ et $r = 15$; tum vero habebitur vel

$$q = 6 \text{ et } s = 1, \text{ vel } q = 5 \text{ et } s = 2,$$

vbi insuper notasse iuuabit, loco binorum talium numerorum etiam eorum semi-summam et semi-differentiam accipi posse. Ita loco $p = 1$ et $r = 15$ sumi poterit $p = 8$ et $r = 7$, quem casum in exemplis ante allatis expediuimus.

Solutio ex calculo angulorum petita.

§. 40. Pro hoc igitur Problemate statuamus

$\frac{xy}{zv} = \frac{\text{cos}.\,\alpha}{\text{sin}.\,\alpha}$; tum enim erit

$$\sqrt{(xxyy + zzvv)} = \frac{zv}{\text{sin}.\,\alpha} = \tfrac{1}{2}(xx + yy - zz - vv).$$

Tum vero statuatur

$\frac{xz}{yv} = \frac{\text{cos}.\,\beta}{\text{sin}.\,\beta}$, ac tum habebitur

$$\sqrt{(xxzz + yyvv)} = \frac{yv}{\text{sin}.\,\beta} = \tfrac{1}{2}(xx + zz - yy - vv).$$

§. 41.

§. 41. Iam his duabus formulis combinandis habebimus primo

$$\frac{xx}{vv} = \frac{\text{cof.}\,\alpha\,\text{cof.}\,\beta}{\text{fin.}\,\alpha\,\text{fin.}\,\beta} = \text{cot.}\,\alpha\,\text{cot.}\,\beta,$$

vnde ponatur $x = t\sqrt{\text{cot.}\,\alpha\,\text{cot.}\,\beta}$ et $v = t$. Simili modo habebitur

$$\frac{yy}{zz} = \frac{\text{cot.}\,\alpha}{\text{cot.}\,\beta}, \text{ vnde ponatur}$$

$$y = u\sqrt{\text{cot.}\,\alpha} \text{ et } z = u\sqrt{\text{cot.}\,\beta}.$$

Subſtituantur hi valores in priore aequatione radicali, fietque

$$\frac{2tu\sqrt{\text{cot.}\,\beta}}{\text{fin.}\,\alpha} = tt(\text{cot.}\,\alpha\,\text{cot.}\,\beta - 1) + uu(\text{cot.}\,\alpha - \text{cot.}\,\beta),$$

vnde colligitur

$$\frac{u}{t} = \frac{\frac{\sqrt{\text{cot.}\,\beta}}{\text{fin.}\,\alpha} \pm \frac{\sqrt{\text{cot.}\,\alpha}}{\text{fin.}\,\beta}}{\text{cot.}\,\alpha - \text{cot.}\,\beta}.$$

Statuatur ergo

$$u = \frac{\sqrt{\text{cot.}\,\beta}}{\text{fin.}\,\alpha} \pm \frac{\sqrt{\text{cot.}\,\alpha}}{\text{fin.}\,\beta} \text{ et } t = \text{cot.}\,\alpha - \text{cot.}\,\beta,$$

et quatuor valores quaeſiti erunt

$$x = \text{cot.}\,\alpha\sqrt{\text{cot.}\,\alpha\,\text{cot.}\,\beta} - \text{cot.}\,\beta\sqrt{\text{cot.}\,\alpha\,\text{cot.}\,\beta},$$

$$v = \text{cot.}\,\alpha - \text{cot.}\,\beta;\; y = \frac{\text{cot.}\,\alpha}{\text{fin.}\,\beta} + \frac{\sqrt{\text{cot.}\,\alpha\,\text{cot.}\,\beta}}{\text{fin.}\,\alpha}$$

$$z = \frac{\text{cot.}\,\beta}{\text{fin.}\,\alpha} + \frac{\sqrt{\text{cot.}\,\alpha\,\text{cot.}\,\beta}}{\text{fin.}\,\beta}.$$

§. 42. Vt igitur iſti valores fiant rationales, ante omnia neceſſe eſt, vt tam ſinus quam coſinus angulorum α et β, tum vero etiam, vt $\sqrt{\alpha\,\text{cot.}\,\beta}$, fiant rationales. Priori ſatisfit, ponendo

$$\text{ſin.}\,\alpha = \frac{2pr}{pp+rr} \text{ et } \text{ſin.}\,\beta = \frac{2qs}{qq+ss},$$

tum enim fiet

$$\text{coſ.}\,\alpha = \frac{pp-rr}{pp+rr} \text{ et } \text{coſ.}\,\beta = \frac{qq-ss}{qq+ss}$$

 ideo-

ideoque

$$\cot.\,\alpha = \frac{pp - rr}{2pr} \text{ et } \cot.\,\beta = \frac{qq - ss}{2qs}.$$

Quamobrem requiritur, vt productum $\frac{(pp-rr)(qq-ss)}{prqs}$ fiat quadratum, ſicque deducimur ad ipſam ſolutionem ante inuentam, et quia hoc modo ipſa aequatio biquadratica adimpletur, ſimul omnes ſeptem formulae ſupra memoratae euadent quadrata.

§. 43. Colligamus iam caſus in exemplis ſuperioribus euolutos, atque ſimul plures caſus habebimus, quibus huic aequationi biquadraticae ſatisfit, ſcilicet:

$$x^4 + y^4 + z^4 + v^4 - 2xxyy - 2xxzz - 2xxvv$$
$$- 2yyzz - 2yyvv - 2zzvv = 0,$$

et quia literae x, y, z, v, inter ſe permutari patiuntur, valores ſupra inuentos ſecundum ordinem magnitudinis diſponamus,

$x =$	14	72	165	8, 171	8, 187	5, 455
$y =$	8	35	99	14, 55	5, 187	24, 49
$z =$	5	33	56	3, 171	14, 39	2, 455
$v =$	3	14	32	5, 55	3, 39	11, 49

GEMINA