1780

De altitudine columnarum sub proprio pondere corruentium

Leonhard Euler

DE ALTITVDINE COLVMNARUM SVB PROPRIO PONDERE CORRVENTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum nuper hanc quaestionem resoluere essem conatus pro curua, ad quam columnam ante inflecti concepi, quam frangeretur, inter abscissam verticalem $AX = x$ et applicatam horizontalem $XY = y$, hanc inueneram aequationem: $\int x\,dy + \frac{E\,ddy}{dx^2} = 0$; vbi littera E momentum elasticitatis, quo columna inflexioni resistit, complectitur, vnde valor ipsius y per sequentem seriem infinitam exprimebatur: Tab. IV. Fig. 1.

$$\frac{y}{A} = x - \frac{1.\,x^4}{2.\,3.\,4.\,E} + \frac{1.\,4.\,x^7}{2.\ldots.7\,E^2} - \frac{1.\,4.\,7.\,x^{10}}{2.\ldots\ldots10\,E^3} + \text{etc.}$$

Hinc porro per constructionem nata est linea curua figurae prorsus mirabilis, innumerabiles applicatas, tam maximas quam minimas, continens, quae autem omnes ad eandem partem axis verticalis sitae videbantur, ita vt ista curua non nisi in infinitum continuata in ipsum axem incideret; quae circumstantia me seduxerat quasi, vt arbitrarer, columnarum altitudinem adeo sine periculo fractionis in infinitum augere posse. Postmodum vero ex aliis principiis clarissime ostendi, rem aliter se habere, et pro quouis columnarum robore certam altitudinem assignari posse, quam si superent, certe proprio ponderi succumberent.

§. 2. Cum autem aequatio ex certissimis principiis aequilibrii sit deducta, nullius erroris coargui potest, si modo omnes rationes, quibus innititur, probe perpenduntur, nullaeque circumstantiae immisceantur ipsis principiis huius calculi contrariae; quamobrem, antequam hinc conclusiones deducere liceat, omnia momenta, ex quibus ista singularis figura est deducta, accurate euoluere oportet. Ac primo quidem supremus columnae terminus A nulli prorsus actioni cuiusquam vis subiectus est assumtus, ita vt liberrime de suo loco moueri et reliquis viribus cedere posset, quae circumstantia iam a statu, quem in nostra quaestione contemplamur, prorsus discrepat. Quando enim quaerimus, in quanta altitudine columnae etiamnunc proprium pondus sustinere valeant, manifesto supponimus, supremum terminum A, perinde ac infimum B, constanter in eadem recta verticali A B retineri, neque ab actione virium, quibus pars media incuruatur, de hoc situ dimoueri posse. Sin autem ista circumstantia praetermitteretur et supremo termino A plena libertas relinqueretur, nihil prorsus absurdi in illa curua mirabili deprehendetur, sed potius semper eiusmodi casus assignari poterunt, quae cum ista curua pulcherrime conueniant, id quod paucis ostendere operae erit pretium.

§. 3. Ante omnia autem hic loco columnarum laminas elasticas eiusdem roboris, mente saltem, substitui

tui conueniet: ſemper enim concipi poteſt lamina elaſtica, quae inflexioni tantum reluctetur, quantum columna fractioni reſiſtit; totum autem diſcrimen in eo erit poſitum, quod lamina elaſtica a viribus ſollicitantibus reuera incurvetur, dum columna, ab iisdem viribus ſollicitata, disrumpitur. Hoc praemonito ſemper eiusmodi lamina elaſtica concipi poterit, quae, a ſolo ſuo pondere ſollicitata, ad eam ipſam curuam inflecti atque adeo in aequilibrio conſiſtere queat, quam ex aequatione initio allata deduximus; ſi modo obſeruemus, in calculo illo omnes huius curuae applicatas X Y tanquam infinite paruas ſpectari debere, etiamſi in noſtra figura multo maiores ſint repraeſentatae, quo variae inflexiones facilius perſpici poſſent. Abſciſſae autem huius curuae ad eo maiorem altitudinem aſſurgent, quo fortiores fuerint laminae noſtrae elaſticae: applicatae vero, ſingulis abſciſſis reſpondentes, perpetuo eandem inter ſe rationem tenere ſunt cenſendae.

§. 4. His notatis quaelibet portio huius curuae, veluti A Y, ſtatum aequilibrii cuiuspiam laminae elaſticae repraeſentabit: ſcilicet ſemper aſſignari poterit lamina elaſtica longitudinis A Y, quae, ſi in Y ſecundum directionem ſuam firmiter retineatur, atque ad figuram Y A inflectatur, ob ſolum proprium pondus in hoc ſtatu ſe conſeruare poſſit, hocque modo punctum Y, vbicunque libuerit, accipere licet. Hic primum occurrunt ea puncta curuae, quibus applicatae ſunt vel maximae vel minimae, vbi ergo tangentes ſunt verticales. Quod ſi ergo quodpiam horum punctorum pro infimo termino laminae elaſticae accipiatur, is pauimento quoque verticaliter infigi debebit, vt de hoc ſitu declinare nequeat; tum enim pars ſuperior Tab. IV. Fig. 2.

 figu-

figuram assignatam ob proprium pondus recipere simulque in aequilibrio consistere poterit.

§. 5. Praeterea vero in hac curua infinita dabuntur puncta, quae littera O designauimus, vbi datur punctum flexus contrarii, atque adeo curuatura prorsus euanescit; vnde si infimus laminae elasticae terminus in tali puncto accipiatur, non opus est, vt pauimento infigatur secundum suam directionem, sed sufficiet vt simpliciter insistat, et talis lamina ob proprium pondus figuram exhibitam recipere et in aequilibrio consistere poterit. Veluti si inferior laminae terminus in puncto O' capiatur, isque simpliciter pauimento E F insistat, tum ob solum proprium pondus lamina inflecti poterit secundum curuam O' N G M A, hocque statu in aequilibrio persistere, propterea quod totius huius laminae centrum grauitatis G perpendiculariter puncto O' imminebit; euidens autem est, hunc statum aequilibrii esse labilem, et laminam minima vi esse prolapsuram.

Tab. IV. Fig. 3.

§. 6. Hinc iam clarissime intelligimus, nullum horum casuum ad quaestionem propositam accommodari posse, quippe qua eiusmodi columna consideratur, cuius vterque terminus perpetuo in eadem recta verticali firmiter retineatur, dum in omnibus his casibus supremo termino A plena libertas conceditur; quamobrem, vt nostram quaestionem rite euoluamus, statum columnae, siue laminae elasticae, initialem aliter constituere debemus atque ante fecimus, scilicet praeter sollicitationes a grauitate oriundas supremo termino A certam quandam vim horizontalem applicatam concipere debemus, qua istud punctum A perpetuo in eadem recta verticali contineatur. Facile autem intellitelligitur, magnitudinem huius vis prius definiri non posse, quam totus calculus ad finem fuerit perductus; quandoquidem tum demum patebit, quanta vi opus sit, ad supremum terminum A in debito situ conseruandum. Quo autem haec noua inuestigatio clarius perspici queat, ipsi quaestioni principali maiorem extensionem tribuamus eamque sequenti modo constituamus.

Status Quaestionis.

§. 6. Proposita sit columna cylindrica, in situ verticali A B constituta, siue eius loco lamina elastica eiusdem roboris, cuius autem ambo termini A et B perpetuo in hoc situ ita retineantur, vt ab aliis viribus sollicitantibus inde neutiquam dimoueri queant. Huic iam laminae elasticae circa medium C quandam vim horizontalem C *c* applicatam concipiamus, qua laminae figura incuruata A B C tribuatur, quam mutationem autem tam exiguam esse statuamus, vt tota curua quasi infinite parum a recta verticali A B discrepet. Hoc posito quaeramus naturam huius curuae A C B, ad quam, tam ab ista vi, quam a proprio pondere inflectetur; hac enim quaestione resoluta facile patebit, vtrum, si vis sollicitans C *c* euanesceret, talis inflexio certo casu nihilominus locum habere queat; hoc enim ipso continebitur casus, quo columna a solo proprio pondere prosternetur, quandoquidem ne minimam quidem curuaturam pati potest. Tab. IV. Fig. 4.

§. 7. Quoniam vero haec quaestio non solum summam circumspectionem postulat, sed etiam plurimis difficultatibus est inuoluta, laborem nostrum ab euolutione casus simplicissimi inchoëmus, quo columnae omnis flexibilibilitas adimatur, eiusque loco in medio C eiusmodi iunctura tribuatur, quae cum certo elasticitatis momento flexurae resistat. Referat igitur recta verticalis A B talem columnam, cuius ambo termini A et B de suo loco amoueri nequeant; tum vero isti columnae in medio applicata sit vis horizontalis C c, qua haec columna in statum inflexum A C B sit perducta, atque tam ex pondere columnae quam vi applicata C c, ad momentum flexurae relata, quaeri debet status iste inflexus, siue anguli deflexionis a situ verticali C A O et C B O, qui quidem inter se erunt aequales, quia partes A C et B C aequales supponuntur.

Tab. IV. Fig. 5.

§. 8. Vt nunc solutionem huius casus ordine instituamus, primo omnes vires consideremus, quibus haec columna actu sollicitatur. Hic igitur occurrit pondus, quo vtrumque brachium C A et C B deorsum vrgetur. Posita igitur longitudine vtriusque C A et C B $= a$ vocetur pondus siue massa vtriusque $= M$, quae vis in vtriusque centro grauitatis seu medio applicata concipi potest; tum vero etiam actu sollicitatur a vi illa horizontali C c, quam vocemus $= C$. Praeterea vero, quatenus ambo brachia iam ad angulum A C e sunt inflexa, loco vis elasticae mente substituamus elastrum E e, quod vi sua contractiua conetur ambo brachia in directum extendere. Quod si ergo vocemus angulum C A B $=$ C B A $= \theta$, erit angulus E C $e = 2\,\theta$, cui proportionalis statui potest vis elastri, siquidem hunc angulum tanquam minimum spectemus. Hinc ergo, si vim elasticam absolutam littera E et interuallum C E $=$ C e littera e designemus, momentum huius elastri erit $2\,E\,e\,\theta$; vnde simul patet, si horizontalis C O ducatur, fore C O $= a \sin.\theta$ et A O $=$ B O $= a \cos.\theta$, sicque, quia angu-

angulus θ tanquam minimus ſpectatur, ſtatuere poterimus $CO = a\theta$ et $AO = BO = a$.

§. 9. His autem viribus praeterea adiungi debent eae vires, quae requiruntur, ad columnam in ſtatu, quem ſupponimus, retinendam. Primo igitur, quoniam terminus A perpetuo in recta verticali A B retineri debet, ibi applicemus vim horizontalem Aa, quae ſit $= A$, cuius valor autem nondum eſt cognitus, quandoquidem praeciſe tanta eſſe debet, vt punctum A in ſuo loco conſeruetur. Deinde quia terminus inferior B fundo ita inſiſtere aſſumitur, vt etiam de ſuo loco dimoueri nequeat, primo ipſum fundum ſuſtinebit totum columnae pondus, vnde ipſum punctum B ſurſum vrgeri cenſendum eſt vi $BO = 2M$; dein vero, ne de ſuo loco, ſiue dextrorſum ſiue ſiniſtrorſum, dimoueatur, illi vim horizontalem $Bb = B$ applicatam concipiamus, quae etiam inter incognita eſt referenda. Tota autem columna ſuo pondere ita aget, quaſi eius pondus in communi centro grauitatis G vtriusque brachii eſſet applicatum, quod quia in medium interualli C O cadit, erit $OG = \frac{1}{2} a \theta$, cuius ergo directio erit recta verticalis Gg.

§. 10. Cum nunc totum hoc ſyſtema in aequilibrio conſiſtere aſſumamus, primo omnes vires, ratione quantitatis, ſe mutuo deſtruere debent, vnde pro viribus horizontalibus habebimus hanc aequationem: $A + B = C$; vnde, ſimulac altera harum virium A et B fuerit cognita, etiam altera innoteſcet. Tum vero vires verticaliter agentes iam ſibi contrariae ſunt conſtitutae; tertio vero vires elaſtri, in puncta E et e agentis, ſe mutuo perfecte deſtru-

 unt.

unt. Praeterea autem ad aequilibrium requiritur, vt momenta omnium harum virium, respectu cuiuscunque axis, se mutuo destruant: constat enim, si hoc eueniat pro quolibet axe, id simul pro omnibus aliis locum habere. Consideremus igitur momenta harum virium respectu puncti A, vbi ergo vis $A a = A$ et vis $B O = 2 M$ momenta euanescent, quia directiones per ipsum punctum A transeunt; at vis horizontalis $B b = B$ dabit momentum sinistrorsum vergens $= 2 a B$, vis vero horizontalis $C c = C$ dabit momentum dextrorsum vrgens $= C a$; vis denique verticalis $G g$ gignit momentum sinistrorsum, quod erit $M a \theta$; vnde nanciscimur hanc aequationem: $2 a B + M a \theta = C a$. Quoniam igitur iam ante inuenimus $A + B = C$, nunc vtramque seorsim determinare valemus: reperimus enim

$$A = \tfrac{1}{2} C + \tfrac{1}{2} M \theta \text{ et } B = \tfrac{1}{2} C - \tfrac{1}{2} M \theta.$$

§. 11. His iam viribus determinatis ipsam resolutionem huius casus aggrediamur, quem in finem nostrum systema in puncto C fixum concipiamus, cuius ergo respectu vires, quae brachium C A seorsim sollicitant, se mutuo in aequilibrio seruare debent; tum enim vires, alterum brachium sollicitantes, se quoque sponte in aequilibrio continebunt. At vero brachium C A primo sollicitatur a vi $A a = A$, cuius momentum est $A a$, sinistrorsum tendens; in eandem vero etiam plagam tendet momentum, ex proprio pondere huius brachii ortum, quod est $\tfrac{1}{2} M a \theta$. In contrariam autem plagam hoc brachium ab elastro abripietur, cuius momentum est $2 E e \theta$, ideoque habebimus hanc aequationem: $A a + \tfrac{1}{2} M a \theta = 2 E e \theta$, quae, si loco A valor inuentus substituatur, dabit $\tfrac{1}{2} a C + M a \theta = 2 E e \theta$, in qua aequatione tota solutio nostri problematis continetur.

tur. Eadem autem aequatio etiam obtinetur ex confideratione alterius brachii. Primo enim hoc brachium vrgetur a vi $B b = B$, cuius momentum, finiftrorfum tendens, eft $B a$; deinde ex vi $B O = 2 M$, fiue reactione fundi, oritur momentum in eandem plagam vergens $= 2 M a \theta$; tum vero hoc brachium ob proprium pondus praebet momentum dextrorfum vergens $= \frac{1}{2} M a \theta$; denique vero ab elaftro in e applicato oritur momentum etiam dextrorfum tendens $= 2 E e \theta$; ficque hinc orietur ifta aequatio:

$$B a + 2 M a \theta = \tfrac{1}{2} M a \theta + 2 E e \theta,$$

in qua fi loco B fuus fcribatur valor, proueniet haec aequatio: $\frac{1}{2} C a + M a \theta = 2 E e \theta$.

§. 12. Cum igitur tota folutio cafus propofiti in hac aequatione contineatur: $2 E e \theta = \frac{1}{2} C a + M a \theta$, hinc ftatim angulus θ definiri poteft, ad quem noftra columna a propofita vi horizontali $C c$ deflecti poterit: erit enim $\theta = \frac{C a}{4 E e - 2 M a}$; vbi manifeftum eft, hunc cafum locum habere non poffe, nifi vis elaftica, in formula $E e$ contenta, multo maior fuerit quam $M a$, quandoquidem hic fupponimus, angulum θ valde effe exiguum. Hinc autem viciffim affignare poterimus vim horizontalem $C c = C$, quae valeat noftram columnam ad datum angulum $BAC = \theta$ deflectere: erit enim ifta vis $C = \frac{2 \theta}{a}(2 E e - M a)$. Hinc ftatim patet, dari eiusmodi cafus, quibus talis deflexio nullam vim horizontalem poftulat, atque adeo columna a proprio pondere ad hanc deflexionem vrgebitur; et quoniam angulus θ hic non determinatur, ifta columna a folo pondere continuo maiorem deflexionem recipiet, atque adeo penitus corruet. Hoc nempe toties eueniet, quoties fuerit

 Ma

$M a = 2 E e$, qui eſt ipſe ille caſus, quem hic euoluere nobis propoſuimus.

§. 13. Hunc igitur caſum diligentius perpendamus, ac primo quidem ponamus, totam huius columnae altitudinem eſſe $A B = b$, ita vt ſit $a = \frac{1}{2} b$; tum vero ſit amplitudo huius columnae $= d d$; atque hinc ſumi poterit $M = \frac{1}{2} d d b$, quia M denotabat dimidiae columnae pondus. Hinc ergo poſtrema aequatio dabit $\frac{1}{4} b b d d = 2 E e$, vnde altitudo huius columnae ita determinabitur, vt ſit $b = \sqrt{\frac{8 E e}{d d}}$. Quoties ergo talis columna, qualem hic aſſumimus, quae ſcilicet nullam inflexionem recipere queat, praeterquam in ſuo medio, vbi momentum inflexioni reſiſtens ſit $E e$, tantam habeat altitudinem, vel maiorem, tum certe proprium ſuum pondus ſuſtinere non valebit, ſed penitus proſternetur; vnde iam nouum argumentum habemus contra opinionem ſupra memoratam, qua arbitratus ſum, nullam columnam ſub proprio pondere occumbere poſſe. Hoc igitur caſu expedito multo facilius reſolutionem quaeſtionis §. 6. et ſeqq. deſcriptae ſuſcipere poterimus.

Reſolutio Quaeſtionis.

§. 14. Quoniam, ſi huic columnae vnica vis horizontalis in medio applicaretur, tota columna non in curuam continuam deflecteretur, totam iſtam vim horizontalem aequaliter per totam columnae altitudinem, quae ſit $A B = b$, diſtribuamus, ita vt, ſi tota illa vis horizontalis fuerit $= C$, elemento cuicunque $X x = d x$ applicari debeat vis horizontalis elementaris $= \frac{C d x}{b}$. Tales igitur vires horizontales ſingulis columnae elementis applicatae concipiantur. Deinde etiam ſingula elementa ob proprium pon-

Tab. IV Fig. 6.

pondus deorsum sollicitabuntur, viribus $\frac{M d x}{b}$, siquidem M denotet pondus totius columnae; sicque iam habemus omnes vires, quibus haec columna actu sollicitatur; siquidem iis adiungamus momentum elasticitatis, quo haec columna in singulis punctis pollere statuitur, quod, vt hactenus fecimus, per formulam $E k k$ repraesentemus.

§. 15. Praeterea vero, quoniam supremus columnae terminus A perpetuo in ea recta verticali retineri debet, ei horizontaliter applicatam concipiamus vim $A a = A$; tum vero termino inferiori B, ob eandem rationem, applicemus vim horizontalem $B b = B$. Porro vero iste terminus inferior, ob pondus columnae, verticaliter sursum vrgeri censendus est vi M; insuper autem in calculum introduci debebit centrum grauitatis columnae incuruatae, quod si ponamus cadere in punctum G, eius distantia ab axe reperietur $G O = \frac{\int y d x}{b}$. Posita enim abscissa $A X = x$ et applicata $X Y = y$, ob inflexionem infinite paruam, elementum $Y y$ ipsi elemento abscissae $X x$ aequale censeri potest. Cum igitur eius pondus sit $\frac{M d x}{b}$, eius momentum, respectu axis A B, erit $\frac{M y d x}{b}$, cuius integrale, per totam columnam extensum, erit $\frac{M}{b} \int y d x$, cui ergo aequale esse debet momentum totius columnae, si eius pondus in puncto G esset collectum, quod ergo erit $M.GO$; vnde manifesto sequitur interuallum $GO = \frac{1}{b} \int y d x$, pro quo ergo interuallo inueniendo area totius curuae A Y B inuestigari debet, sicque in hoc puncto G vis applicata est concipienda horizontalis $G g = M$.

§. 16. Quoniam nunc primo omnes iſtae vires ratione quantitatis ſe inuicem deſtruere debent, pro viribus horizontalibus hanc nanciſcimur aequationem: $A + B = C$; vires autem verticales iam ſe ſponte deſtruunt, cum ſit vis $B O = M$ et vis $G g = M$. Praeterea vero neceſſe eſt, vt omnium harum virium momenta reſpectu puncti A ſe deſtruant: vbi ergo virium $A a$ et $B O$ momenta per ſe ſunt nulla, vis autem $B b$ momentum ſiniſtrorſum vergens erit $B b$, atque in eundem ſenſum verget momentum, ex vi ſeu pondere columnae $G g = M$, ortum, quod ergo momentum, ob $G O = \frac{\int y d x}{b}$, erit $\frac{M}{b} \int y d x$, hoc ſcilicet integrali per totam columnam extenſo. Ne autem haec conditio calculum turbet, vocemus hoc intervallum $G O = g$, ita vt ſit $g = \frac{\int y d x}{b}$ et momentum hinc natum erit $= M g$. Supereſt igitur, vt omnia momenta ex omnibus viribus horizontalibus $Y V = \frac{C d x}{b}$ nata, colligantur; quare, cum ex iſta vi $Y V$ naſcatur momentum $\frac{C x d x}{b}$, ſumma omnium horum momentorum per totam altitudinem erit $\frac{1}{2} C b$, quod dextrorſum vergit, ita vt hinc obtineamus hanc aequationem: $B b + M g = \frac{1}{2} C b$, ex qua aequatione ſtatim colligimus $B = \frac{1}{2} C - \frac{M g}{b}$, hincque porro alteram vim incognitam $A = \frac{1}{2} C + \frac{M g}{b}$.

§. 17. Nunc iam totam columnam, quaſi in puncto Y eſſet fixa, contemplemur, atque ex omnibus viribus, arcum A Y ſollicitantibus, earum momenta inueſtigemus reſpectu huius puncti Y, quippe quorum ſumma aequalis eſſe debet momento elaſticitatis, quod quoniam a curuatura in hoc loco pendet, ſi radium oſculi in hoc loco ſtatuamus $= r$, ipſum elaſticitatis momentum erit $\frac{E k k}{r}$; praeterea

terea vero momentum vis $A a = A$, reſpectu huius puncti Y, eſt $A x$. Momenta autem, quae tam ex viribus horizontalibus quam verticalibus toti arcui $A Y$ ſunt applicatae, ſeorſim inueſtigari debent.

§. 18. Cum igitur hic punctum Y tanquam fixum ſpectetur, arcum $A Y$ ſecundum maiorem ſcalam hic ſeorſim repraeſentemus, ita vt ſit $A X = x$ et $X Y = y$, quas quantitates ergo tantisper quaſi conſtantes ſpectari licet; tum autem conſideretur huius arcus elementum quodcunque $U u$, per coordinates $A T = t$ et $T U = u$ determinatum, quae hic ſolae vt variabiles ſunt tractandae. Cum igitur, ob deflexionem minimam, ſit vt ſupra elementum $U u = T t = d t$, ei primo applicata erit vis horizontalis $U P = \frac{C d t}{b}$; praeterea vero eidem applicata eſt vis verticalis $U Q = \frac{M d t}{b}$. Illius igitur vis $U P = \frac{C d t}{b}$ momentum, reſpectu puncti Y, erit $\frac{C (x - t) d t}{b}$, cuius ergo integrale erit $\frac{C t}{b} (x - \frac{1}{2} t)$, quod ſumma horum momentorum per arcum $A U$ continet. Promoueatur nunc punctum U vſque in Y, atque ſumma omnium horum momentorum, ex arcu $A Y$ natorum, erit $\frac{\frac{1}{2} C x x}{b}$, cuius effectus dextrorſum tendit. Tab. IV. Fig. 7.

§. 19. At vero pro viribus verticalibus, vis $U Q = \frac{M d t}{b}$ momentum reſpectu puncti Y erit

$$\frac{M d t}{b} Q Y = \frac{M (y - u) d t}{b},$$

quod ſiniſtrorſum tendit, prorſus vt momentum vis $A a = A$. Integretur iam iſta formula, vt obtineatur momentum ex arcu cu A U oriundum, quod erit $\frac{M}{b}(yt - \int u\, dt)$. Promoueatur punctum u vſque in y, faciendo $t = x$ et $u = y$; atque totum momentum, ex arcu A Y ortum, erit $\frac{M}{b}(xy - \int y\, dx)$, quae formula manifeſto reducitur ad hanc: $\frac{M}{b}\int x\, dy$.

§. 20. Inuentis igitur his tribus momentis, quorum primum Ax ſiniſtrorſum, ſecundum $\frac{\frac{1}{2}Cxx}{b}$ dextrorſum, tertium vero modo inuentum, $\frac{M}{b}\int x\, dy$, iterum ſiniſtrorſum agit, totum momentum ſiniſtrorſum vrgens erit $Ax + \frac{M}{b}\int x\, dy - \frac{Cxx}{2b}$, cui ergo aequale eſſe debet momentum elaſticitatis $\frac{Ekk}{r}$, quippe quod dextrorſum vergit, vnde adipiſcimur hanc aequationem:

$$Ax + \frac{M}{b}\int x\, dy - \frac{Cxx}{2b} = \frac{Ekk}{r},$$

quae, ſi loco A valorem ante inuentum ſubſtituamus, induet hanc formam:

$$\tfrac{1}{2}Cx - \frac{Cxx}{2b} + \frac{Mgx}{b} + \frac{M}{b}\int x\, dy = \frac{Ekk}{r}.$$

In hac ergo aequatione omnia continentur, quae circa ſolutionem problematis propoſiti deſiderari poſſunt.

§. 21. Quoniam autem radius oſculi etiamnunc in hac aequatione reperitur, propter applicatas y vt infinite paruas ſpectandas ſtatui poterit $r = -\frac{dx^2}{ddy}$, ſi quidem elementum dx pro conſtante accipiatur. Hinc ergo noſtra aequatio erit:

$$\left(\tfrac{1}{2}C + \frac{Mg}{b}\right)x - \frac{Cxx}{2b} + \frac{M}{b}\int x\, dy + \frac{Ekk\, ddy}{dx^2} = 0;$$

quae per $\frac{M}{b}$ diuiſa euadit:

$$\left(\frac{Cb}{2M} + g\right)x - \frac{Cxx}{2M} + \int x\, dy + \frac{Ebkk\, ddy}{M\, dx^2} = 0,$$

vbi

vbi notetur, fractionem $\frac{M}{b}$ amplitudinem columnae exprimere, neque adeo ab altitudine columnae b pendere. Si enim amplitudo columnae ponatur $= b\,b$, statui poterit $M = b\,b\,b$; quo obseruato aequatio nostra hanc induet formam:

$$\left(\frac{C}{2bb} + g\right) x - \frac{Cxx}{2bbb} + \int x\,dy + \frac{Ekkddy}{bb.dx^2}.$$

Deinde etiam initio ostendimus, formulam $E\,k\,k$ quadrato amplitudinis, seu ipsi b^4, esse proportionalem, vnde statuere poterimus, $E\,k\,k = b^4 e$, vbi e est linea, vi elasticae absolute proportionalis. Hoc igitur valore introducto aequatio sequentem induet formam:

$$\left(\frac{C}{2bb} + g\right) x - \frac{Cxx}{2bbb} + \int x\,dy + e\,b\,b.\frac{ddy}{dx^2} = 0,$$

vnde ergo per geminam integrationem valor applicatae y, per abscissam x expressus, erui debet, quod aliter nisi per series infinitas praestari nequit.

§. 22. Vt autem istae integrationes rite ad statum quaestionis accommodentur, sequentia praecepta sunt tenenda:

1°. Formulae $\int x\,dy$ integrale ita capi debet, vt evanescat posito $x = 0$.

2°. Quia curua necessario per ipsum punctum A transit, altera aequationis nostrae integratio ita debet determinari, vt posito $x = 0$ fiat quoque $y = 0$.

3°. Altera vero integratio pro abscissis minimis dare debet talem aequationem: $y = \alpha\,x$; vbi ergo ista constans α designat tangentem anguli, quem curua cum axe in A constituit, vel adeo ipsum hunc angulum, siquidem vt infinite paruus eſt ſpectandus. Hic autem imprimis eſt obſeruandum, iſtum angulum α effectum totum exhibere, quem vis horizontalis C, columnae applicata, producere valet. Hoc igitur modo ſeries infinita reperiri poterit, quae pro qualibet abſciſſa x quantitatem applicatae y determinabit.

§. 23. Integratione autem hac lege inſtituta eam conditionem principalem adimpleri oportet, quae poſtulat, vt, poſita abſciſſa $x = b$, applicata y denuo euaneſcat. Hoc igitur modo obtinebitur aequatio, meras quantitates conſtantes inuoluens; eas ſcilicet, quae in aequatione differentiali continentur, ac praeterea angulum deflexionis α. Hinc autem ipſam hanc deflexionem α, quatenus a vi horizontali C producitur, nondum definire licet, quoniam in hac aequatione adhuc ineſt quantitas g, interuallum G O exprimens, cuius valor nunc demum per integrationem, ex aequatione inter x et y inuenta, definiri debet. Vidimus enim eſſe $g = \frac{\int y\,dx}{b}$, poſtquam ſcilicet integrale $\int y\,dx$ a termino $x = 0$ vſque ad terminum $x = b$ fuerit extenſum.

§. 24. Poſtquam igitur aequatio inter x et y fuerit inuenta, ex ea per integrationem euoluatur formula $\int y\,dx$, quae, per totam altitudinem extenſa, praebebit valorem producti $g\,b$; ſicque denuo hinc colligitur aequatio inter easdem quantitates conſtantes, quae ergo ſi cum ſuperiore aequatione combinetur, inde quantitas g eliminari poterit, quo facto habebitur noua aequatio, ex qua pro quauis vi horizontali C definiri poterit angulus deflexionis

xionis α, quandoquidem reliquae quantitates in aequatione contentae omnes tanquam datae ſpectari poſſunt.

§. 25. Ex hac autem vltima aequatione, vnde valorem ipſius α elici oportet, ſimul patebit, eiusmodi dari caſus, quibus eadem deflexio α oriri poteſt, etiamſi vis horizontalis C prorſus euaneſcat; atque hinc orietur caſus, quem hic praecipue examinare conſtituimus, quo ſcilicet in eam columnae altitudinem inquirimus, quam ſi columna attigerit, ob proprium pondus incuruari incipiat, atque adeo frangatur, quare ad hunc caſum analyſin ſuperiorem accommodabimus.

Inueſtigatio maximae altitudinis, qua columna adhuc proprium ſuum pondus ſuſtinere valet.

§. 26. Pro hoc ergo caſu ſtatim ponamus vim horizontaliter applicatam $C = 0$, et iam aequatio noſtra differentio-differentialis erit:

$$g\,x + \int x\,d\,y + e\,b\,b.\frac{d\,d\,y}{d\,x^2} = 0,$$

in qua loco $e\,b\,b$ br. gr. ſcribamus litteram m, pro cuius integrali ſi fingamus ſeriem

$$y = \alpha\,x + \beta\,x\,x + \gamma\,x^3 + \delta\,x^4 \text{ etc.}$$

mox patebit, fore $\beta = 0$, ſimulque omnes poteſtates ſequentes ipſius x, quarum exponentes ſunt formae $3\,n + 2$; tum vero poteſtatum, quarum exponentes ſunt formae $3\,n + 1$, coefficientes tantum per literam α determinari; at vero poteſtatum, quarum exponentes ſunt formae $3\,n$, coefficientes per ſolam litteram g definiri.

§. 27. Hinc ergo ſtatim valorem ipſius y in duas partes diuellere poterimus, quae ſint $y = \alpha p + g q$; hoc autem valore introducto aequatio noſtra erit

$$g x + \alpha \int x\, dp + g \int x\, dq + m\, \alpha . \frac{ddp}{dx^2} . m\, g . \frac{ddq}{dx^2} = 0.$$

vnde hae duae aequationes deriuantur:

$$\text{I. } \int x\, dp + m \frac{ddp}{dx^2} = 0.$$

$$\text{II. } x + \int x\, dq + m \frac{ddq}{dx^2} = 0.$$

Pro priore, quoniam nouimus, primum terminum ipſius p eſſe x, ſtatuamus $p = x - A x^4 + B x^7 + C x^{10} +$ etc. factaque ſubſtitutione perueniemus ad ſequentem aequationem:

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{m\, ddp}{dx^2} = -4.3 m A x^2 + 7.6 m B x^5 - 10.9 m C x^8 + 13.12. m D x^{11} \text{ etc.} \\ \int x\, dp = \frac{1}{2} x x \quad - \frac{4}{5} A x^5 \quad + \frac{7}{8} B x^8 \quad - \frac{10}{11} C x^{11} + \text{etc.} \end{array} \right.$$

vnde ergo coefficientes aſſumti ſequenti modo determinantur:

$$A = \frac{1}{2.3.4.m}; \quad B = \frac{4 A}{5.6.7.m} = \frac{1.4.}{2.3.\ldots.7 m^2},$$

$$C = \frac{7 B}{8.9.10.m} = \frac{1.4.7.}{2.3.\ldots 10. m^3}$$

$$D = \frac{10 C}{11.12.13.m} = \frac{1.4.7.10.}{2.3.\ldots.13. m^{4}}, \text{ etc.}$$

Pro valore ipſius q, ex altera aequatione eruendo, fingamus $q = -\mathfrak{A} x^3 + \mathfrak{B} x^6 - \mathfrak{C} x^9 + \mathfrak{D} x^{12} -$ etc. et facta ſubſtitutione perueniemus ad hanc aequationem:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{m\, ddq}{dx^2} = -3.2 m \mathfrak{A} x + 6.5 m \mathfrak{B} x^4 - 9.8 m \mathfrak{C} x^7 + 12.11 m \mathfrak{D} x^{10} - \text{etc.} \\ \int x\, dq = \quad - \frac{3}{4} \mathfrak{A} x^4 \quad + \frac{6}{7} \mathfrak{B} x^7 \quad - \frac{9}{10} \mathfrak{C} x^{10} \quad + \text{etc.} \\ + x = + 1. x \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \end{array} \right\} = 0$$

vnde ergo coefficientes aſſumti ſequenti modo determinabuntur:

$\mathfrak{A} =$

$\mathfrak{A} = \frac{1}{2.3.m}$; $\mathfrak{B} = \frac{3\mathfrak{A}}{4.5.6.m} = \frac{1.3}{2.3....6\,m^2}$; $\mathfrak{C} = \frac{1.3.6}{2.3...9\,m^3}$;
$\mathfrak{D} = \frac{1.3.6.9}{2.3.....12\,m^4}$; etc.

§. 28. Pro his igitur litteris p et q, habebimus iſtas ſeries infinitas:

$$p = x - \frac{x^4}{2.3.4.m} + \frac{1.4.x^7}{2.3....7.m^2} - \frac{1.4.7.x^{10}}{2.3.....10\,m^3} + \text{etc.}$$
$$q = -\frac{x^3}{2.3\,m} + \frac{1.3\,x^6}{2.3....6.m^2} - \frac{1.3.6.x^9}{2.3......9\,m^3} + \text{etc.}$$

quibus ſeriebus inuentis erit $y = \alpha p + g q$. Statuamus $x = b$, et quia fieri debet $y = 0$, habebimus hanc primam aequationem pro ſolutione noſtri problematis: $\alpha p + g q = 0$. At vero pro valore literae g eruendo, cum ſit $g b = \int y\,dx = \alpha \int p\,dx + g \int q\,dx$, his integralibus ab $x = 0$ ad $x = b$ extenſis, habebimus primo

$$\int p\,dx = \tfrac{1}{2} x^2 - \frac{x^5}{2.3.5\,m} + \frac{1.4\,x^8}{2.3....8\,m^2} - \frac{1.4.7.x^{11}}{2.3.....11\,m^3} + \text{etc. et}$$
$$\int q\,dx = -\frac{x^4}{2.3.4\,m} + \frac{1.3.x^7}{2.3....7.m^2} - \frac{1.3.6.x^{10}}{2.3.....10.m^3} + \text{etc.}$$

vbi ergo, poſtquam poſuerimus $x = b$, oriri debet haec aequatio: $g b = \alpha \int p\,dx + g \int q\,dx$, vnde deducimus

$$g = \frac{\alpha \int p\,dx}{b - \int q\,dx},$$

qui valor in ſuperiore aequatione $\alpha p + g q = 0$ ſubſtitutus praebet

$$p + \frac{q \int p\,dx}{b - \int q\,dx} = 0,$$

ſiue $b p - p \int q\,dx + q \int p\,dx = 0$, quae aequatio duas tantum quantitates b et m inuoluit, ex qua ergo valorem ipſius b eruere licebit, hicque valor ipſam illam maximam altitudinem columnae declarabit, in qua ſe tantum non ſuſtinere valebit.

§. 29. Quo nunc has formulas propius ad calculum accommodemus, ponamus $\frac{x^3}{m} = \frac{b^3}{m} = t$, atque ſeries, quibus indigemus, ſequenti modo deſignemus, poſito ſcilicet vbique $x = b$:

$$p = b\left(1 - \frac{1.t}{2.3.4} + \frac{1.4\,t^2}{2.\ldots.7} - \frac{1.4.7\,t^3}{2.\ldots\ldots.10} + \text{etc.}\right) = b.\,P$$

$$q = -1\left(\frac{t}{2.3} - \frac{1.3\,t^2}{2.\ldots\ldots.6} + \frac{1.3.6\,t^3}{2.\ldots\ldots.9} - \text{etc.}\right) = -1.\,Q$$

$$\int p\,dx = b^2\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2.\ldots.5} + \frac{1.4\,t^2}{2.\ldots.8} - \frac{1.4.7\,t^3}{2.\ldots\ldots.11} + \text{etc.}\right) = -b^2.\,P'$$

$$\int q\,dx = -b\left(\frac{t}{2.3.4} - \frac{1.3\,t^2}{2.\ldots.7} + \frac{1.3.6\,t^3}{2.\ldots.10} - \text{etc.}\right) = -b\,Q'.$$

Quod ſi iam iſtos nouos valores introducamus, poſtrema noſtra aequatio ſequentem induet formam:

$$b\,b\,P + b\,b\,P\,Q' - b\,b\,Q\,P' = 0,$$

at per $b\,b$ diuiſa fit $P + P\,Q' - Q\,P' = 0$, quae aequatio nullam aliam literam inuoluit niſi t, vnde ergo ſi definire licuerit hanc quantitatem t, erit $b = \sqrt[3]{m\,t}$, hoc eſt $t = \sqrt[3]{b\,b\,e\,t} =$ altitudini columnae quaeſitae; vbi valor t eſt numerus quidam abſolutus, ex illa aequatione eruendus. Quare cum e pro eadem materia, ex qua columnae conficiuntur, eundum retineat valorem, pro variis amplitudinibus columnarum maximae altitudines quaeſitae ſequuntur rationem ſubtriplicatam altitudinum, id quod egregie conuenit cum theoremate diſſertationi praecedenti annexo.

§. 30. Vt igitur iſta altitudo b per calculum definiri poſſit, ſequentes quatuor ſeries, quantitatem incognitam t inuoluentes, rite euolui debebunt:

$$P = 1 - \frac{1.t}{2.3.4} + \frac{1.4.t^2}{2.\ldots.7} - \frac{1.4.7.t^3}{2.\ldots.10} + \text{etc.}$$

$$P' = \frac{1}{2} - \frac{1.t}{2.\ldots.5} + \frac{1.4.t^2}{2.\ldots.8} - \frac{1.4.7.t^3}{2.\ldots.11} + \text{etc.}$$

$$Q = \frac{1.\,t}{2.\,3} - \frac{1.\,3.\,t^2}{2.\,.\,.\,.\,6} + \frac{1.\,3.\,6.\,t^3}{2.\,.\,.\,.\,.\,9} - \text{etc.}$$
$$Q' = \frac{1.\,t}{2.\,3.\,4} - \frac{1.\,3.\,t^2}{2.\,.\,.\,.\,7} + \frac{1.\,3.\,6.\,t^3}{1.\,.\,.\,.\,.\,10} - \text{etc.}$$

atque nunc totum negotium huc redit, vt ille valor ipſius t inueſtigetur, quo huic aequationi ſatisfiat: $P + P\,Q' - Q\,P' = 0$, id quod aliter niſi tentando fieri nequit: plures ſcilicet pro t aſſumi conueniet ſucceſſiue valores, atque ex erroribus ſingulorum concludi poterit verus valor ipſius t. Mox autem inueſtiganti patebit, valorem ipſius t non exiguum eſſe, ſed potius ſatis magnum accipi debere.

§. 31. Poſtquam autem hinc verus valor numeri t fuerit erutus, vt inde ſtatim quaeſitam altitudinem b in menſura penitus cognita aſſignare valeamus, ponamus haberi columnam cylindricam, ex eadem materia paratam, cuius altitudo ſit $= a$, amplitudo vero $= d\,d$, et quae per experimenta comperta ſit geſtare poſſe onus Γ, quod ſe habeat ad pondus huius columnae, vt $\lambda : 1$, ita vt ſit $\Gamma = \lambda\, a\, d\, d$. Iam ex iis, quae de vi columnarum iam olim ſunt tradita, iſtud onus Γ inuentum eſt

$$\Gamma = \frac{\pi\,\pi\,E\,k\,k}{a\,a},$$

exiſtente $E\,k\,k = d^4\,e$, vnde ergo fiet

$$e = \frac{\Gamma.\,a\,a}{\pi\,\pi\,d^4} = \frac{\lambda\,a^3}{\pi\,\pi\,d\,d}.$$

Subſtituatur ergo iſte valor in formula noſtra pro b inventa, ac reperietur

$$b = a\sqrt[3]{\frac{\lambda\,b\,b}{\pi\,\pi\,d\,d}}.$$

vbi iam omnia elementa penitus ſunt cognita.

Calculus

Calculus

Pro inueſtigando valore numeri t.

§. 32. Quoniam hic quatuor ſeries euolui debent, deſignemus terminos cuiusque ſeriei ordine per cyphras romanas I, II, III, IV, etc. atque pro ſeriebus P et P′, in ſubſidium vocentur ſequentes formulae:

Pro ſerie P		Pro ſerie P′
$l\,\mathrm{II} = l\,\mathrm{I} + l\,t$.	$-1,3802112$	$\mathrm{II}' = \frac{1}{5}\,\mathrm{II}$
$l\,\mathrm{III} = l\,\mathrm{II} + l\,t$.	$-1,7201593$	$\mathrm{III}' = \frac{1}{8}\,\mathrm{III}$
$l\,\mathrm{IV} = l\,\mathrm{III} + l\,t$.	$-2,0122340$	$\mathrm{IV}' = \frac{1}{11}\,\mathrm{IV}$
$l\,\mathrm{V} = l\,\mathrm{IV} + l\,t$.	$-2,2345173$	$\mathrm{V}' = \frac{1}{14}\,\mathrm{V}$
$l\,\mathrm{VI} = l\,\mathrm{V} + l\,t$.	$-2,4123950$	$\mathrm{VI}' = \frac{1}{17}\,\mathrm{VI}$
$l\,\mathrm{VII} = l\,\mathrm{VI} + l\,t$.	$-2,5603551$	$\mathrm{VII}' = \frac{1}{20}\,\mathrm{VII}$
$l\,\mathrm{VIII} = l\,\mathrm{VII} + l\,t$.	$-2,6869185$	$\mathrm{VIII}' = \frac{1}{23}\,\mathrm{VIII}$
$l\,\mathrm{IX} = l\,\mathrm{VIII} + l\,t$.	$-2,7974566$	$\mathrm{IX}' = \frac{1}{26}\,\mathrm{IX}$
$l\,\mathrm{X} = l\,\mathrm{IX} + l\,t$.	$-2,8955551$	$\mathrm{X}' = \frac{1}{29}\,\mathrm{X}$
$l\,\mathrm{XI} = l\,\mathrm{X} + l\,t$.	$-2,9837228$	$\mathrm{XI}' = \frac{1}{32}\,\mathrm{XI}$
$l\,\mathrm{XII} = l\,\mathrm{XI} + l\,t$.	$-3,0637814$	$\mathrm{XII}' = \frac{1}{35}\,\mathrm{XII}$
$l\,\mathrm{XIII} = l\,\mathrm{XII} + l\,t$.	$-3,1370931$	$\mathrm{XIII}' = \frac{1}{38}\,\mathrm{XIII}$
$l\,\mathrm{XIV} = l\,\mathrm{XIII} + l\,t$.	$-3,2047065$	$\mathrm{XIV}' = \frac{1}{41}\,\mathrm{XIV}$
$l\,\mathrm{XV} = l\,\mathrm{XIV} + l\,t$.	$-3,2674417$	$\mathrm{XV}' = \frac{1}{44}\,\mathrm{XV}$
$l\,\mathrm{XVI} = l\,\mathrm{XV} + l\,t$.	$-3,3259545$	$\mathrm{XVI}' = \frac{1}{47}\,\mathrm{XVI}$
$l\,\mathrm{XVII} = l\,\mathrm{XVI} + l\,t$	$-3,3807774$	$\mathrm{XVII}' = \frac{1}{50}\,\mathrm{XVII}$
$l\,\mathrm{XVIII} = l\,\mathrm{XVII} + l\,t$	$-3,4323474$	$\mathrm{XVIII}' = \frac{1}{53}\,\mathrm{XVIII}$
$l\,\mathrm{XIX} = l\,\mathrm{XVIII} + l\,t$	$-3,4810291$	$\mathrm{XIX}' = \frac{1}{56}\,\mathrm{XIX}$
$l\,\mathrm{XX} = l\,\mathrm{XIX} + l\,t$	$-3,5271282$	$\mathrm{XX}' = \frac{1}{59}\,\mathrm{XX}$

§. 33.

§. 33. Simili modo pro computo ferierum Q et Q' inferuient fequentes formulae:

Pro ferie Q	Pro ferie Q'
$l\,\mathrm{I} = \ldots + lt - 0,7781513$	$\mathrm{I}' = \frac{1}{4}\,\mathrm{I}$
$l\,\mathrm{II} = l\,\mathrm{I} \ldots + lt - 1,6020600$	$\mathrm{II}' = \frac{1}{7}\,\mathrm{II}$
$l\,\mathrm{III} = l\,\mathrm{II} \,.\, + lt - 1,9242793$	$\mathrm{III}' = \frac{1}{10}\,\mathrm{III}$
$l\,\mathrm{IV} = l\,\mathrm{III} \,.\, + lt - 2,1663314$	$\mathrm{IV}' = \frac{1}{13}\,\mathrm{IV}$
$l\,\mathrm{V} = l\,\mathrm{IV} \,.\, + lt - 2,3569815$	$\mathrm{V}' = \frac{1}{16}\,\mathrm{V}$
$l\,\mathrm{VI} = l\,\mathrm{V} \,.\, + lt - 2,5137501$	$\mathrm{VI}' = \frac{1}{19}\,\mathrm{VI}$
$l\,\mathrm{VII} = l\,\mathrm{VI} \,.\, + lt - 2,6467304$	$\mathrm{VII}' = \frac{1}{22}\,\mathrm{VII}$
$l\,\mathrm{VIII} = l\,\mathrm{VII} \,.\, + lt - 2,7621424$	$\mathrm{VIII}' = \frac{1}{25}\,\mathrm{VIII}$
$l\,\mathrm{IX} = l\,\mathrm{VIII} \,.\, + lt - 2,8640659$	$\mathrm{IX}' = \frac{1}{28}\,\mathrm{IX}$
$l\,\mathrm{X} = l\,\mathrm{IX} \,.\,.\, + lt - 2,9553135$	$\mathrm{X}' = \frac{1}{31}\,\mathrm{X}$
$l\,\mathrm{XI} = l\,\mathrm{X} \,.\, + lt - 3,0379043$	$\mathrm{XI}' = \frac{1}{34}\,\mathrm{XI}$
$l\,\mathrm{XII} = l\,\mathrm{XI} \,.\, + lt - 3,1133355$	$\mathrm{XII}' = \frac{1}{37}\,\mathrm{XII}$
$l\,\mathrm{XIII} = l\,\mathrm{XII} \,.\, + lt - 3,1727474$	$\mathrm{XIII}' = \frac{1}{40}\,\mathrm{XIII}$
$l\,\mathrm{XIV} = l\,\mathrm{XIII} \,.\, + lt - 3,2470286$	$\mathrm{XIV}' = \frac{1}{43}\,\mathrm{XIV}$
$l\,\mathrm{XV} = l\,\mathrm{XIV} \,.\, + lt - 3,3068844$	$\mathrm{XV}' = \frac{1}{46}\,\mathrm{XV}$
$l\,\mathrm{XVI} = l\,\mathrm{XV} \,.\, + lt - 3,3628844$	$\mathrm{XVI}' = \frac{1}{49}\,\mathrm{XVI}$
$l\,\mathrm{XVII} = l\,\mathrm{XVI} + lt - 3,4154951$	$\mathrm{XVII}' = \frac{1}{52}\,\mathrm{XVII}$
$l\,\mathrm{XVIII} = l\,\mathrm{XVII} + lt - 3,4651028$	$\mathrm{XVIII}' = \frac{1}{55}\,\mathrm{XVIII}$
$l\,\mathrm{XIX} = l\,\mathrm{XVIII} + lt - 3,5120318$	$\mathrm{XIX}' = \frac{1}{58}\,\mathrm{XIX}$
$l\,\mathrm{XX} = l\,\mathrm{XIX} \,.\, + lt - 3,5565564$	$\mathrm{XX}' = \frac{1}{61}\,\mathrm{XX}$

§. 34. Nunc igitur tantum opus eft, vt numero t varii valores tribuantur pro lubitu, qui tamen non nimium a veritate abhorrere videantur; quare cum in praecedente differtatione oftenderimus, hunc numerum t certe minorem effe quam 266, incipiamus noftram inueftigationem a valore $t = 200$, viſuri, vtrum iſte valor iuſto ſit maior, an minor. Quod ſi enim hinc valor formulae noſtrae $P(1 + Q') - Q P'$ prodierit poſitiuus, id erit indicio, iſtum valorem $t = 200$ eſſe nimis paruum; ſin autem prodierit negatiuus, numerum t diminui oportebit.

§. 35. Sumamus igitur $t = 200$ et calculus pro ſeriebus P et P' ita ſtabit:

	Pro ſerie P.	Pro ſerie P′.
$l\,\mathrm{I} = 0{,}0000000$	$\mathrm{I} = +1{,}0000$	$\mathrm{I}' = +0{,}5000$
$l\,t = 2{,}3010300$		
$2{,}3010300$		
$1{,}3802112$		
$l\,\mathrm{II} = 0{,}9208188$	$\mathrm{II} = -8{,}3333$	$\mathrm{II}' = -1{,}6667$
$2{,}3010300$	$-7{,}3333$	$-1{,}1667$
$3{,}2218488$		
$1{,}7201593$		
$l\,\mathrm{III} = 1{,}5016895$	$\mathrm{III} = +31{,}7460$	$\mathrm{III}' = +3{,}9682$
$2{,}3010300$	$+24{,}4127$	$+2{,}8015$
$3{,}8027195$		
$2{,}0122340$		
$l\,\mathrm{IV} = 1{,}7904855$	$\mathrm{IV} = -61{,}7285$	$\mathrm{IV}' = -5{,}6117$
$2{,}3010300$	$-37{,}3158$	$-2{,}8102$
$4{,}0915155$		
$2{,}2345173$		
$l\,\mathrm{V} = 1{,}8569982$	$\mathrm{V} = +71{,}9446$	$\mathrm{V}' = +5{,}1389$
	$+34{,}6288$	$+2{,}3287$

$l\,\mathrm{V} =$

	Pro ferie P.	Pro ferie P′.
$l\,V = 1,8569982$	$V = +\,71,9446$	$V' = +\,5,1389$
2,3010300	$+\,34,6288$	$+\,2,3287$
4,1580282		
2,4123950		
$l\,VI = 1,7456332$	$VI = -\,55,6715$	$VI' = -\,3,2748$
2,3010300	$-\,21,0427$	$-\,0,9461$
4,0466632		
2,5603551		
$l\,VII = 1,4863081$	$VII = +\,30,6414$	$VII' = +\,1,5321$
2,3010300	$+\,9,5987$	$+\,0,5860$
3,7873381		
2,6869185		
$l\,VIII = 1,1004196$	$VIII = -\,12,6014$	$VIII' = -\,0,5479$
2,3010300	$-\,3,0027$	$+\,0,0381$
3,4014496		
2,7974566		
$l\,IX = 0,6039930$	$IX = +\,4,0179$	$IX' = +\,0,1545$
2,3010300	$+\,1,0152$	$+\,0,1926$
2,9050230		
2,8955551		
$l\,X = 0,0094679$	$X = -\,1,0220$	$X' = -\,0,0352$
2,3010300	$-\,0,0068$	$+\,0,1574$
2,3104979		
2,9837228		
$l\,XI = 9,3267751$	$XI = +\,0,2122$	$XI' = +\,0,0066$
	$+\,0,2054$	$+\,0,1640$

	Pro ſerie P.	Pro ſerie P'.
lXI = 9,3267751	XI = + 0,2122	XI' = + 0,0066
2,3010300	+ 0,2054	+ 0,1640
1,6278051		
3,0637814		
lXII = 8,5640237	XII = − 0,0366	XII' = − 0,0010
2,3010300	+ 0,1688	+ 0,1630
0,8650537		
3,1370931		
lXIII = 7,7279606	XIII = + 0,0053	XIII' = + 0,0001
2,3010300	+ 0,1741	+ 0,1631
0,0289906		
3,2047065		
lXIV = 6,8242841	XIV = − 0,0007	
	+ 0,1734	

§. 36. Simili modo inſtituatur calculus pro inueniendis valoribus Q et Q', quippe qui, in vſum vocando formulas §. 33. exhibitas, ita ſe habebit:

	Pro ſerie Q.	Pro ſerie Q'.
$l\,t$ = 2,3010300		
0,7781513		
lI = 1,5228787	I = + 33,3333	I' = + 8,3333
2,3010300		
3,8259087		
1,6020600		
lII = 2,2218487	II = − 166,6667	II' = − 23,8095
	− 133,3334	− 15,4762

lII =

	Pro ferie Q.	Pro ferie Q′.
l II = 2,2218487	II = − 166,6667	II′ = − 23,8095
2,3010300	− 133,3334	− 15,4762
4,5228787		
1,9242793		
l III = 2,5985994	III = + 396,8254	III′ = + 39,6825
2,3010300	+ 263,4920	+ 24,2063
4,8996294		
2,1663314		
l IV = 2,7332980	IV = − 541,1255	IV′ = − 41,6250
2,3010300	− 277,6335	− 17,4187
5,0343280		
2,3569815		
l V = 2,6773465	V = + 475,7147	V′ = + 29,7322
2,3010300	+ 198,0812	+ 12,3135
4,9783765		
2,5137501		
l VI = 2,4646264	VI = − 291,4918	VI′ = − 15,3417
2,3010300	− 93,4106	− 3,0282
4,7656564		
2,6467304		
l VII = 2,1189260	VII = + 131,5001	VII′ = + 5,9773
2,3010300	+ 38,0895	+ 2,9491
4,4199560		
2,7621424		
l VIII = 1,6578136	VIII = − 45,4793	VIII′ = − 1,8192
	− 7,3898	+ 1,1299

	Pro ſerie Q.	Pro ſerie Q'.
l VIII = 1,6578136	VIII = − 45,4793	VIII' = − 1,8192
2,3010300	− 7,3898	+ 1,1299
3,9588436		
2,8640659		
l IX = 1,0947777	IX = + 12,4388	IX' = + 0,4442
2,3010300	+ 5,0490	+ 1,5741
3,3958077		
2,9553135		
l X = 0,4404942	X = − 2,7574	X' = − 0,0889
2,3010300	+ 2,2916	+ 1,4852
2,7415242		
3,0379043		
l XI = 9,7036199	XI = + 0,5054	XI' = + 0,0149
2,3010300	+ 2,7970	+ 1,5001
2,0046499		
3,1133355		
l XII = 8,8913144	XII = − 0,0779	XII' = − 0,0021
2,3010300	+ 2,7191	+ 1,4980
1,1923444		
3,1727474		
l XIII = 8,0195970	XIII = + 0,0105	XIII' = + 0,0002
2,3010300	+ 2,7296	+ 1,4980
0,3206270		
3,2470286		
l XIV = 7,0735984	XIV = − 0,0012	
	+ 2,7284	

§. 37. Inuentis igitur quatuor his valoribus:

$$P = +0,1734; \quad Q = +2,7284$$
$$P' = +0,1631; \quad Q' = +1,4980$$

colligimus inde iſta producta:

$$P(1 + Q') = 0,4331$$
$$QP' \quad = 0,4450$$

quorum poſterius primum tantum ſuperat particula $= 0,0119$, quae differentia cum iam ſit vehementer parua, et negatiua, nobis iam manifeſto declarat, valorem aſſumtum $t = 200$ vix a valore vero diſcrepare, eumque aliquantillum ſuperare, vnde ſuperfluum foret accuratius in iſtum valorem inquirere: eius enim radix cubica tantum in computum ingreditur, quae a notabiliori errore litterae t vix ſenſibilem errorem gigneret. Hoc igitur numero t inuento, quem tamen tantillo minorem accipere conueniet, problema principale, quod hic nobis eſt propoſitum, perfecte reſoluere poterimus.

Problema.

§. 38. *Pro omnibus columnis cylindricis aſſignare maximam altitudinem, quam ſuſtinere valent, antequam ſub proprio pondere corruant.*

Solutio.

Praeſto ſit columella, pariter cylindrica, ex eadem materia parata atque ipſae columnae, de quibus quaeſtio formatur; ſit iſtius columellae altitudo $= a$ eiusque amplitudo $= dd$, atque per experimenta exploretur maximum onus, quod iſta columella ſine periculo fractionis ſuſtinere

valet

valet, cuius pondus repertum ſit ſe habere ad proprium pondus columellae vt $\lambda : 1$, ita vt iam λ ſit numerus cognitus, quo inuento ponamus quaeſtionem inſtitui circa columnam ex eadem materia confectam, cuius amplitudo ſit $= b\,b$, atque ſupra oſtendimus maximam altitudinem quaeſitam eſſe $h = a \sqrt[3]{\frac{\lambda b b}{\pi \pi d d}} \cdot t$. Sumto iam $t = 200$ erit $l \frac{t}{\pi\pi} = 1,3067302$, hincque $\frac{1}{3} l \frac{t}{\pi\pi} = 0,4355767$, cui reſpondet numerus $2,7263$, qui cum aliquantillum diminui debeat, eius loco ſcribamus numerum e, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, quippe qui eſt $2,71828$, ita vt iam maxima altitudo quaeſita ſit $h = 2,7183 \cdot a \sqrt[3]{\frac{\lambda b b}{d d}}$, vel adeo in numeris rotundioribus ſtatui poterit $h = 2,70 \sqrt[3]{\frac{\lambda b b}{d d}}$.

§. 39. Cum igitur antehac in determinatione oneris, quod quaeuis columna geſtare valet, nullam proprii ponderis rationem tenuiſſem, regula etiam, quam inde deduxeram, quadam leui correctione indigebit, quae autem tam erit exigua, vt in praxi tuto negligi queat. Ad quod oſtendendum columnam hic inuentam, quae ſub proprio pondere occumbit, iuxta regulam ante datam examinemus, qua onera inuenta ſunt tenere rationem dupplicatam compoſitam ex directa amplitudinum ſeu baſium et reciproca altitudinum. Hinc cum columellae pro modulo aſſumtae altitudo eſſet $= a$, amplitudo ſiue area baſeos $= d\,d$ et onus geſtatum $= \lambda\, a\, d\, d$, ipſius autem columnae inuentae amplitudo $= b\,b$, altitudo vero $h = a \sqrt[3]{\frac{\lambda b b t}{\pi \pi d d}}$, ponamus onus, quod haec columna iuxta regulam geſtare poſſet $= \xi\, b\, b\, h$; vbi $b\, b\, h$ exhibet ipſum huius columnae pondus.

dus. His poſitis, ſecundum noſtram regulam eſſe deberet $\lambda\, a\, d\, d : \xi\, b\, b\, b = \frac{d^4}{a\, a} : \frac{b^4}{b\, b}$, vnde deducitur $\xi = \frac{\lambda\, a^3\, b\, b}{b^3\, d\, d}$, et loco b^3 ſubſtituto ſuo valore erit $\xi = \frac{\pi\pi}{f}$, hoc eſt circiter $\xi = \frac{1}{20}$; ſcilicet iuxta regulam haec columna ſuſtineret partem vigeſimam proprii ponderis, dum reuera ſub proprio pondere ſuccumbit.

§. 40. Viciſſim ergo, quoties iſta regula declarat, columnam quampiam tantum vigeſimam proprii ponderis partem ſuſtinere poſſe, tum concludere debemus, eam nullum plane onus geſtare poſſe, ſed ſub proprio pondere occumbere. Cum igitur nullae vnquam columnae adhiberi ſoleant, niſi quae onera multo grauiora ſuſtentare valeant, manifeſtum eſt, errorem illius regulae nullius plane eſſe momenti, atque in praxi tuto negligi poſſe, perinde ac ſi proprium pondus nihil plane conferret, ad vim columnarum diminuendam, quemadmodum in prima de hoc argumento diſſertatione eſt aſſertum.