1780

Determinatio onerum, quae columnae gestare valent

Leonhard Euler

DETERMINATIO
ONERVM, QVAE COLVMNAE GESTARE VALENT.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

In Tomo XIII. Actorum Academiae Berolinensis exhibui commentationem de vi columnarum; vbi ex principio prorsus singulari, quod ab hoc argumento penitus alienum videatur, determinaui quantitatem oneris, quod data quaeuis columna sustinere valeat, quin rumpatur. Ista determinatio mihi ob hanc causam non solum prorsus noua, sed etiam maxime memorabilis est visa, quandoquidem in gestatione onerum vera natura columnarum constitui debet, idque eo magis, quod vulgo ab Auctoribus, qui doctrinam de columnis tractauerunt, hoc argumentum penitus negligi solet, dum potissimum in describendis ordinibus et ornamentis columnarum sunt occupati. Quin etiam Scriptores physici, qui tenacitatem et cohaesionem corporum solidorum sunt perscrutati, experimenta quidem instituerunt circa vires, quas exiguae columnae sustinere valeant, neque vero in legem et proportionem inquisiuerunt, quam quantitas oneris sustinendi, tam ratione crassitiei, quam altitudinis, sequatur.

§. 2. Non parum igitur sum miratus, cum nuper celeberrimam Encyclopediam Gallicam euoluerem, quod sub titulo columnarum disertis verbis ipsa mea proportio, quasi in vulgus cognita, in medium profertur, secundum quam onera, quae columnae cylindricae eiusdem diametri gestare valent, rationem reciprocam duplicatam altitudinum tenere perhibentur; ita vt columna duplo altior quartam tantum partem oneris sustinere queat; neque vero vllus auctor allegatur, qui hanc proportionem siue ex experimentis concluserit, siue per theoriam confirmauerit.

§. 3. Quando autem quaeritur, quantum onus O data quaeuis columna A B C D pro ratione altitudinis et crassitiei gestare valeat, quaestio sine dubio maxime est ardua; neque enim video, quomodo ea ex cognitis principiis, circa soliditatem corporum stabilitis, resolui possit. Quoniam enim onus O perpendiculariter deorsum premit, nulla prorsus vis adesse videtur, quae columnam rumpere tendat, quantumuis etiam magnum fuerit onus; propterea quod nulla ratio deprehenditur, cur columna potius versus vnam regionem, quam quamuis aliam inflectatur et frangatur. Interim tamen experientia satis declarat, tale onus non vltra certos limites augeri posse, atque adeo in natura nunquam causae desunt, quae rupturam in vnam plagam potius, quam omnes alias producant. Neque tamen a quoquam Auctore eiusmodi principia stabilita esse reperio, vnde solutionem huius quaestionis petere liceat.

Tab. II. Fig. 1.

§. 4.

§. 4. Quin etiam ipſe praeter omnem expectationem ad enodationem huius quaeſtionis ſum perductus, cum olim incuruationem laminarum elaſticarum, quae ipſis a viribus quibuscunque inducatur, inueſtigarem. Cum enim laminam elaſticam A C B eſſem contemplatus, quae tenſione chordae A B in ſtatum incuruatum A C B fuerit reducta, et pro quouis gradu incuruationis quantitatem tenſionis chordae eſſem perſcrutatus, non ſine admiratione inveni, incuruationem adeo infinite paruam iam tenſionem finitam poſtulare, ita vt, quamdiu chorda A B, vtrique termino laminae elaſticae alligata, vi quacunque minore intendatur, laminam nullam plane inflexionem, ne infinite quidem paruam, eſſe paſſuram, cum tamen eidem laminae A C B, parieti in B infixae, etiam a minima vi A α quaedam incuruatio inducatur. Tab. II. Fig. 2. Fig. 3.

§. 5. Quanquam autem columna maxime diſcrepat a lamina elaſtica, tamen in hoc egregie conueniunt, quod columna a pondere incumbente rumpi nequeat, niſi ipſi ante vel minima quaedam inflexio inducatur. Quoniam igitur pondus incumbens ſimili modo in columnam agit, quo lamina elaſtica A C B (Fig. 2.) a chorda A B ſollicitatur, euidens eſt, etiam columnae ne minimam quidem inflexionem induci poſſe, niſi pondus incumbens certum quendam limitem ſuperauerit. Conſideremus enim columnam A B C D, cui ab incumbente pondere iam inflexio infinite parua ſit inducta, qua eius axis curuaturam infinite paruam O V P acceperit, ita vt recta O P ſit verticalis, et quoniam onus incumbens ſecundum hanc ipſam directionem O P vrget, eandem vim manifeſto exerit, ac ſi chorda recta O P pari vi ſe contrahere anniteretur; ex Fig. 4.

 quo

quo ſimilitudo cum lamina elaſtica ſupra conſiderata manifeſto elucet, ſimulque intelligitur, columnam talem inflexionem, etiamſi infinite paruam, recipere non poſſe, niſi onus incumbens certum quendam limitem ſuperauerit, atque hic ipſe limes nobis maximum onus indicat, quod columna ſuſtinere valebit.

§. 6. Quemadmodum autem quaeuis incuruatio, quae laminae elaſticae induci debet, certam requirit vim, ita etiam facile intelligitur, certam quandam vim requiri, quae columnae noſtrae incuruationem inducere valeat, quandoquidem ea tam ob ſoliditatem quam cohaeſionem partium omni incuruationi reſiſtit, quae reſiſtentia ſine dubio eo maior eſt cenſenda, quo craſſior fuerit ipſa columna et quo maior ſimul fuerit incuruatio. Ad talem effectum explicandum in calculum introduci ſolet formula quaepiam rigorem abſolutum corporis inflectendi exprimens, quae per radium curuaturae diuiſa praeciſe aequalis euadat momento virium ad hanc ipſam incuruationem producendam requiſito; vnde cum momenta virium ſint producta ex vi agente ſeu quodam pondere per quampiam lineam rectam multiplicato, euidens eſt formulam, qua rigor abſolutus exprimitur, eſſe debere productum ex quopiam pondere et quadrato cuiuspiam lineae rectae, ita vt ſi per radium oſculi diuidatur, prodeat formula ſimilis ei, qua momenta virium exprimuntur.

§. 7. Quo noſtram inueſtigationem a caſu ſimpliciſſimo exordiamur, contemplemur primo eiusmodi columnam, quae per totam ſuam altitudinem eandem habeat craſſitiem, ita vt rigor abſolutus, quo omni incuruationi reſi-

resistit, habeat vbique eandem quantitatem, quam ergo exprimamus formula $E k k$, vbi E certum designet pondus, k autem certam lineam rectam. Hic quidem in genere statim patet, quo crassior fuerit columna, et quo maiore soliditate praedita, eo maiorem fore valorem formulae $E k k$. Infra autem ostendemus, si huiusmodi columnae fuerint cylindricae, ex materia eiusdem soliditatis formatae, tum formulam $E k k$ proportionalem fore biquadrato diametri crassitiei.

§. 8. Dum autem columnae cylindricae certae crassitiei tribuimus rigorem $= E k k$, valorem huius formulae haud difficulter per experimenta assignare licebit. Concipiamus enim, talem columnam, cuius axem tantum hic in figura repraesentamus, in B pauimento firmo ita firmiter esse infixam, vt inde dimoueri prorsus nequeat, cuius ergo rigor vbique sit $= E k k$, longitudo autem eius vocetur $AB = a$. Iam huic columnae in summitate A applicetur vis horizontalis AV, quae aequiualeat pondere $= F$, a qua igitur ipsa columna incuruabitur in situm $B y a$, hancque curuaturam tanquam minimam spectemus, scilicet vis illa horizontalis F maior capi non debet, quam vt punctum supremum A per spatiolum $A a = \alpha$ detorqueat. Quibus positis ostendam, quomodo formula nostra rigorem exprimens, scilicet $E k k$, ex vi sollicitante F et altitudine $AB = a$ cum spatiolo $A a = \alpha$ determinari possit. Tab. II. Fig. 5.

§. 9. Hunc in finem ante omnia in naturam curuae $B y a$ inquiri oportet. Ducta igitur ex quouis curuae puncto y ad verticalem AB, normali $y x$, vocetur abscissa $B x = x$ et applicata $x y = y$, quae ergo per hypothesin

 est

eſt quam minima, ita vt longitudo curuae B y, quae ſit $= s$, ab ipſa abſciſſa B $x = x$ non diſcrepet. Quare ſi radius oſculi huius curuae in y fuerit $y\,r$, eius longitudo, vti conſtat, eſt $= \frac{d s^3}{d x\, d d y}$, ideoque ob $d s = d x$ iſte radius oſculi erit $= \frac{d x^2}{d d y}$, ex quo rigor per hunc radium oſculi diuiſus erit $\frac{E k k\, d d y}{d x^2}$, quae formula aequalis ſtatui debet momento vis ſollicitantis F hanc curuaturam producentis, quod momentum cum ſit F. A $x = F(a - x)$, habebitur pro noſtra curua haec aequatio: $\frac{E k k\, d d y}{d x^2} = F(a - x)$, ex qua ante omnia naturam curuae definire oportet.

§. 10. Multiplicemus hanc aequationem per $d x$ atque integratio nobis dabit:

$$\frac{E k k\, d y}{d x} = \tfrac{1}{2} F (2 a x - x x) + C$$

quae conſtans C ita debet eſſe comparata, vt poſito $x = 0$, hoc eſt in ipſo puncto B, non ſolum fiat $y = 0$, ſed etiam $\frac{d y}{d x} = 0$, propterea quod recta A B in B firmiter eſt infixa, vnde patet ſumi debere $C = 0$, ita vt hanc habeamus aequationem: $E k k\, d y = \tfrac{1}{2} F\, d x (2 a x - x x)$, quae denuo integrata praebet $E k k y = \tfrac{1}{6} F (3 a x x - x^3)$, vnde poſito $x = 0$ iam fit $y = 0$. Transferamus nunc punctum y in ipſam extremitatem a, ſumendo $x = a$, et quoniam nouimus, tum fieri applicatam $=$ A $a = \alpha$, aequatio noſtra dabit $E k k \alpha = \tfrac{1}{3} F a^3$, ex quo manifeſto prodit formula rigorem exprimens $E k k = \frac{F a^3}{3 \alpha}$, ſicque per vnicum experimentum pro quauis columna cylindrica eius rigor abſolutus ſeu valor formulae $E k k$ expedite determinari poterit, cum ex elementis cognitis, ſcilicet F, a et α ſtatui poſſit $E = F$ et $k k = \frac{a^3}{3 \alpha}$.

§. 11.

§. 11. Postquam igitur exploratus fuerit valor formulae Ekk pro quapiam proposita columna cylindrica, ponamus istam columnam, cuius axem tantum AB in figura exhibemus, a pondere incumbente O infinite parum esse inflexam, ita vt curuam AyB induerit, ambaeque extremitates A et B immotae manserint; quoniam enim incuruatio supponitur infinite parua, ipsa curua AyB ab axe AB prorsus non discrepabit. His igitur positis vocemus altitudinem huius columnae $AB = a$, et pro puncto eius quocunque y ponamus abscissam $Ax = x$ et applicatam $xy = y$, ita vt y euanescere debeat tam pro $x = 0$ quam pro $x = a$: modo ante autem vidimus radium osculi in hoc puncto y esse $= \frac{dx^2}{ddy}$, qui cum hic axem versus vergat, poni debet $yr = -\frac{dx^2}{ddy}$, ita vt momentum inflexioni resistens sit $-\frac{Ekkddy}{dx^2}$.

Tab. II. Fig. 6.

§. 12. Quoniam nunc onus columnae incumbens O secundum directionem verticalem AB deorsum vrget, eius momentum respectu puncti y erit $= Oy$, vnde statim deducitur haec aequatio: $-\frac{Ekk\,ddy}{dx^2} = Oy$, pro qua breuitatis gratia scribamus $\frac{Ekk}{O} = cc$, vt habeamus hanc aequationem: $\frac{ccddy}{dx^2} + y = 0$, quae ducta in $2dy$ et integrata dat $\frac{ccdy^2}{dx^2} + yy = ff$, vnde elicimus

$$dx^2 = \frac{ccdy^2}{ff-yy}, \text{ ideoque } dx = \frac{cdy}{\sqrt{(ff-yy)}}.$$

Hinc denuo integrando peruenimus ad hanc aequationem: $x = c$ Arc. sin. $\frac{y}{f} + C$, ita vt duae constantes f et c in calculum sint ingressae, quas ita definiri oportet, vt y euanescat tam casu $x = 0$ quam casu $x = a$; prior autem conditio statim nobis dat $C = 0$, ita vt habeamus

$x = c$

$x = c$ Arc. ſin. $\frac{y}{f}$. Fiat nunc $x = a$, et quia fieri debet $y = 0$, habebimus $a = c$ Ar. ſin. o. Tales autem arcus ſunt $o, \pi, 2\pi, 3\pi$ etc. quorum primus iam pro termino A valuit; hic igitur valebit valor π, ita vt ſit $a = \pi c$. Poſueramus vero $cc = \frac{Ekk}{O}$, quamobrem habebimus $a = \pi \sqrt{\frac{Ekk}{O}}$.

§. 13. Hic notatu dignum eſt, alteram conſtantem ff prorſus ex calculo eſſe egreſſam. Quoniam igitur inuenimus $x = c$ A. ſin. $\frac{y}{f}$, erit inuertendo $y = f$ ſin. $\frac{x}{c}$; vnde patet, quo maior fuerit quantitas f, eo magis incuruationem augeri; ideoque aequationem noſtram finalem $a = \pi \sqrt{\frac{Ekk}{O}}$ perinde ſubſiſtere, ſiue columnae curuatura inducta fuerit tantillo maior ſiue minor, dummodo fuerit quam minima. Nunc vero ex ipſa hac aequatione innoteſcet pondus O, quod talem incuruationem producere valeat: reperietur enim $O = \frac{\pi\pi Ekk}{aa}$; vnde intelligitur, quamdiu onus, columnae incumbens, non maius fuerit quam $\frac{\pi\pi Ekk}{aa}$, columnam omnino firmam conſiſtere, neque vllum eſſe periculum, vt oneri ſuccumbat. Hinc igitur ſtatim patet, quod iam dudum inueneram, onera, quae columnae cylindricae eiusdem craſſitiei ſuſtinere valent, tenere rationem reciprocam duplicatam altitudinum a, ita vt columna duplo altior tantum quartam partem oneris geſtare valeat.

§. 14. Vt nunc etiam columnas diuerſae craſſitiei inter ſe comparare queamus, inueſtigari oportet, quomodo quouis caſu formula rigorem exprimens Ekk a craſſitie pendeat, id quod ex principiis phyſicis et experimentis ſuper cohaeſione et firmitate corporum inſtitutis deriuari debet; vbi imprimis ad ipſam materiam, ex qua columnae paran-

parantur, erit respiciendum; et quoniam corpora incuruari nequeunt, nisi quaedam elementa a se inuicem longius remoueantur, eiusmodi experimenta consulere debebimus, quibus talis diductio vel elongatio a viribus quibuscunque produci potest. Hanc igitur inuestigationem sequenti modo adgrediamur.

§. 15. Ex eadem materia, qua columnae constant, paretur bacillus cylindricus, vel prismaticus E E F F, qui altero termino E E pauimento M N ita firmiter infigatur, vt aliter inde diuelli nequeat, nisi dirumpatur, in altero vero termino pondus P appendi concipiatur, quod eo vsque augeri potest, vt iste bacillus dirumpatur. Ante autem quam ipsa ruptura euenit, bacillus aliquantillum elongabitur per spatiolum Ff, quod eo minus erit, quo firmior et solidior fuerit massa bacilli. Concipiamus ergo tale experimentum institui cum bacillo, cuius longitudo $EF = f$ et crassities $= gg$, tum vero istum bacillum ab appenso pondere P elongari per spatiolum $Ff = \phi$; ac primo quidem patet, istam elongationem ϕ ipsi longitudini bacilli f esse proportionalem: si enim bacillus duplo esset longior, ab eodem pondere P duplo maior elongatio ϕ produceretur; vnde si statuamus $\phi = \delta f$, dabitur certa relatio inter pondus P et litteram δ, ita vt non amplius opus sit ipsam longitudinem f in computum ducere. Tab. II. Fig. 7.

§. 16. Euidens autem est, quo maius fuerit pondus P, eo maiorem quoque esse debere litteram δ, hanc autem non vltra certum terminum augeri posse, quin bacillus penitus dirumpatur. Quamdiu autem istae elongationes sunt satis paruae, dubitari nequit, quin valor litterae δ

ipſi ponderi P ſit proportionalis, quandoquidem in omnibus huiusmodi mutationibus minimis effectus cauſſae ſemper eſt proportionalis. Deinde etiam euidens eſt, ſi bacillus eſſet duplo craſſior, tum ad eandem elongationem producendam requiri pondus duplo maius; ex quo intelligitur, pondus P tenere rationem compoſitam ex littera δ et craſſitie, quam poſuimus $= g\,g$, ita vt ipſum pondus P ſemper proportionale ſit formulae $\delta\, g\, g$.

§. 17. Quo nunc etiam craſſitiem $g\,g$ ex calculo expellamus, loco ponderis P commode ſubſtitui poterit pondus voluminis ex eadem materia conſtantis, quod ergo per ſimilem bacillum, cuius longitudo ſit $= p$, repraeſentari poterit, ita vt ſit $P = p\,g\,g$, hoc eſt vt P aequetur ponderi cylindri ex ipſa materia columnae confecti, cuius baſis ſit $= g\,g$ et altitudo $= p$. Quo conſtituto, cum iſtud pondus $p\,g\,g$ ſemper ſit proportionale formulae $\delta\, g\, g$, eandem proportionem tenebit p ad δ; vnde ſi ſtatuatur $p = \delta\, b$, erit b certa quaedam longitudo, quae pro omnibus bacillis ex eadem materia confectis erit eadem, quandoquidem neque a longitudine f neque a craſſitie $g\,g$ pendet; ex quo hanc longitudinem b tanquam veram menſuram tenacitatis ſeu firmitatis materiae ſpectare poterimus, de qua quouis caſu agitur, ita vt cuique materiae determinata quaedam longitudo b conueniat. Hac igitur ſemel cognita, ſi fuerit $\frac{\Phi}{f} = \delta$, ſemper erit $p = \delta\, b$, eritque p longitudo ſimilis bacilli craſſitiei $g\,g$, cuius pondus aequetur ponderi appenſo P.

§. 18. Hinc igitur vbicunque materia, ex qua columna eſt confecta, de ſtatu ſuo naturali diducitur, ex ipſa di-

diductione determinari poterit vis ad eam producendam requisita. Consideremus igitur elementum columnae quodcunque $E\,e\,F\,f$, cui ob incuruationem inducta sit figura elementi annularis $E\,e\,F\,f$ ex centro R descripti, cuius radius sit $E\,R = r$, ipsum vero elementum curuae $E\,e = d\,s$, vbi quidem solam crassitiem E F in figura exhibere licuit, latitudinem autem in singulis punctis x mente suppleri conuenit. Iam intra columnam consideremus punctum quodcunque X, per quod centro R describatur arculus $X\,x$, ac posito interuallo $E\,X = x$ erit iste arculus Tab. II. Fig. 8.

$$X\,x = \frac{(r+x)\,d\,s}{r} = d\,s + \frac{x\,d\,s}{r}$$

cuius longitudo cum in statu naturali fuerit $= E\,e = d\,s$, nunc spatium elongationis, quod supra vocauimus Φ, erit $= \frac{x\,d\,s}{r}$: hic vero pro longitudine f habemus $E\,e = d\,s$. Hinc ergo cum fuerit $\delta = \frac{\Phi}{f}$, hoc casu erit $\delta = \frac{x}{r}$, quae fractio ducta in longitudinem illam constantem b, si per totam columnae crassitiem extendatur, dabit pondus, quod ista incuruatio postulat.

§. 19. Promoueamus punctum X more solito per elementum $d\,x$, sitque latitudo columnae in $X = y$, atque elementum voluminis basi $y\,d\,x$ insistens in statu naturali erit $y\,d\,x\,d\,s$, quod cum elongationem littera $\delta = \frac{x}{r}$ indicatam sit passum, vis ad hoc requisita aequabitur ponderi voluminis $= \frac{b\,x\,y\,d\,x}{r}$, cuius ergo integrale, per totam amplitudinem sectionis sumtum, dabit totam vim ad incuruationem elementi $F\,f\,E\,e$ requisitam.

§. 20. Pro nostro autem instituto non tam ipsam hanc vim quam eius momentum respectu puncti E, a quo

in-

incuruatio incipit, exigimus; quam ob rem illa formula $\frac{bxydx}{r}$ insuper in distantiam $EX = x$ duci debet, proditque elementum huius momenti $= \frac{bxxydx}{r}$, cuius integrale per totam crassitiem sumtum, quod est $\frac{b}{r}\int xxydx$, ipsum dabit momentum virium ad hanc curuationem producendam requisitum. Quoniam igitur ante idem momentum ex formula rigoris absoluti Ekk ita expressimus, vt esset $\frac{Ekk}{r}$: nunc manifestum est, qualis valor formulae Ekk pro quouis casu tribui debeat; semper enim erit $Ekk = b\int xxydx$, si modo hoc integrale rite capiatur, ac per amplitudinem columnae circa sectionem EF extendatur.

§. 21. Pendet igitur ista determinatio a figura istius sectionis columnae per EF factae, siue a relatione, quam latitudo y pro quauis abscissa x tenet. Ponamus primo latitudinem vbique esse eandem, scilicet $y = c$, crassitiem vero $EF = b$, atque formula integranda erit

$$\frac{cb}{r}\int xxdx = \frac{1}{3}\frac{cbx^3}{r}$$

quae formula vsque ad terminum F extensa, posito $x = b$, dabit momentum ad incuruationem requisitum $= \frac{b^3cb}{3r}$ qui hoc casu est valor formulae superioris $\frac{Ekk}{r}$, ita vt sit $Ekk = \frac{1}{3}b^3cb$. Hinc si aliam columnam consideremus, cuius crassities sit $EF = B$, latitudo vero $= C$, valores formulae Ekk inter se erunt vt $b^3c : B^3C$; vnde iam intelligitur, si sectiones columnae fuerint inter se similes, quod fit, si fuerit $B : C = b : c$, tum valores formulae Ekk fore in ratione $b^4 : B^4$, quod de omnibus sectionibus similibus valet. Vnde si sectiones fuerint circuli, vt supra assumsimus, valores formulae Ekk tenebunt rationem biquadraticam diametrorum.

§. 22.

§. 22. Parum quidem refert, pro aliis figuris valores absolutos formulae $E\,k\,k$ euoluere; interim tamen speciminis loco computemus casum, quo sectio $E\,F\,f\,e$ est circulus, diametro $E\,F = b$ descriptus. Hinc ergo pro abscissa $E\,X = x$ tota latitudo erit $y = 2\sqrt{bx - xx}$, ita vt sit $E\,k\,k = 2\,b\int x\,x\,d\,x\sqrt{b\,x - x\,x}$, si quidem hoc integrale ab $x = 0$ vsque ad $x = b$ extendatur. Pro illo inueniendo ponamus $x = b$ sin. Φ^2, erit $b - x = b$ cos. Φ^2, hincque $\sqrt{b\,x - x\,x} = b$ sin. Φ cos. $\Phi = \frac{1}{2} b$ sin. $2\,\Phi$; tum vero erit $d\,x = 2\,b\,d\,\Phi$ sin. Φ cos. $\Phi = b\,d\,\Phi$ sin. $2\,\Phi$, quibus substitutis fiet $E\,k\,k = b^4\,b\int d\,\Phi$ sin. Φ^4 sin. $2\,\Phi^2$, quod integrale extendi debet a $\Phi = 0$ vsque ad $\Phi = 90°$.

§. 33. Nunc per notam angulorum Analysin primo est sin. $\Phi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cos. $2\,\Phi$, hincque

$$\text{sin. } \Phi^4 = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2} \text{ cos. } 2\,\Phi + \tfrac{1}{8} \text{ cos. } 4\,\Phi,$$

porro vero sin. $2\,\Phi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cos. $4\,\Phi$, vnde conficitur

$$\text{sin. } \Phi^4 \text{ sin. } 2\,\Phi^2 = \tfrac{5}{32} - \tfrac{1}{8} \text{ cos. } 2\Phi - \tfrac{1}{8} \text{ cos. } 4\,\Phi$$
$$+ \tfrac{1}{8} \text{ cos. } 6\,\Phi - \tfrac{1}{32} \text{ cos. } 8\,\Phi,$$

quae formula ducta in $d\,\Phi$ et integrata dat

$$\int d\,\Phi \text{ sin. } \Phi^4 \text{ sin. } 2\,\Phi^2 = \tfrac{5}{32}\,\Phi - \tfrac{1}{16} \text{ sin. } 2\,\Phi - \tfrac{1}{32} \text{ sin. } 4\,\Phi$$
$$+ \tfrac{1}{48} \text{ sin. } 6\,\Phi - \tfrac{1}{256} \text{ sin. } 8\,\Phi,$$

quae expressio iam euanescit facto $\Phi = 0$. Sumatur igitur $\Phi = 90° = \frac{\pi}{2}$, ac totum hoc integrale euadet $= \frac{5\pi}{64}$, ita vt sit $E\,k\,k = \frac{5\,\pi\,b^4\,b}{64}$, quae formula ergo vtique biquadrato diametri est proportionalis.

§. 24. Regrediamur nunc ad columnam cylindricam supra tractatam, cuius altitudo erat $A\,C = a$ (Fig. I.)

eius

eius vero diametrum nunc ponamus $= b$, et quoniam modo inuenimus $E k k = \frac{5 \pi b^4 b}{64}$, erit onus quod iſta columna ſuſtinere valebit ante quam incurnetur $O = \frac{5 \pi^3 b^4 b}{64 a a}$, cuius quantitas aequatur ponderi voluminis ex eadem materia confecti, cuius ſoliditas eſt haec ipſa quantitas $\frac{5 \pi^5 b^4 b}{64 a a}$, ſiue aequabitur ponderi paris cylindri, cuius diameter $= b$, altitudo vero $= \frac{5 \pi^3 b b b}{64 a a}$. Vnde ſi plures habeantur huiusmodi columnae cylindricae ex eadem materia confectae, onera, quae geſtare valent, tenebunt rationem compoſitam ex directa quadruplicata diametrorum et reciproca duplicata altitudinum; ſin autem ex diuerſa materia fuerint factae, quoniam cuilibet materiae certa longitudo b conuenit, onera inſuper erunt in ratione harum ipſarum altitudinum b.

§. 25. In ſolutione autem ſupra data aſſumſimus columnam a ſolo pondere incumbente O comprimi, ipſum autem columnae pondus neglexim̄us; plerumque autem onus ſuſtentatum tantopere ſuperat pondus proprium columnae, vt error hinc oriundus tuto negligi queat. Interim tamen deinceps operam dabimus, vt etiam rationem proprii ponderis in ſolutione habeamus, quod in prima ſolutione, quam olim in loco initio allegato dederam, expedire non ſum auſus, ob ſummas difficultates, quae in hac euolutione occurrebant. Facile autem intelligitur, tali columnae tantam altitudinem tribui poſſe, vt ne proprium quidem pondus ſuſtentare valeat, etiamſi fuerit $O = 0$, qui ergo Caſus vtique peculiarem ſolutionem poſtulat.

§. 26.

§. 26. His expositis consideremus aliquot experimenta, quae celeberrimus *Muschenbroekius* de vi columnarum instituit; non autem cylindros adhibuit, sed prismata quadrata, vnde valorem formulae Ekk pro sectionibus quadratis explorare oportet. Supra autem iam pro casu $y = c$ inuenimus $Ekk = \frac{1}{3} b^3 c\, b$ (§. 21.), hinc pro experimentis modo memoratis erit $Ekk = \frac{1}{3} b^4 b$, vbi b denotat latus sectionis quadratae. Quamobrem si altitudo talis columnae prismaticae fuerit $= a$, onus, quod gestare valebit erit $O = \frac{\pi\pi b^4 b}{3aa}$. Secundum hanc igitur formulam experimenta illa examinemus.

§. 27. Parauit autem primo *Muschenbroekius* ex abiete trabeculam, 4 pedes longam, prismaticam, cuius basis erat quadratum, cuius latus $= \frac{51}{100}$ digit. eaque in situ verticali constituta dirupta fuit ab imposito pondere 64 libr. 9. unc. Deinde alia trabecula ex eodem ligno confecta pariter quatuor pedes longa sed cuius baseos quadratae latus erat $\frac{70}{100}$ dig., dirupta fuit a pondere 226 libr. Hic ergo erat altitudo, quam vocauimus $a, = 4$ ped. et in posteriore experimento latus quadrati $b = 0, 70$ digitis onus vero impositum $O = 226$ lib. Hinc ergo si ex eodem ligno paretur columna prismatica altitudinis $= A$ pedum, cuius baseos latus $= B$ digitor, ista columna sustinere poterit onus, cuius pondus $= \frac{226. B^4 4^2}{(0,70)^4 A^2}$ libr. ideoque hoc onus erit $15060 \frac{B^4}{A^2}$ libr. Vnde si altitudo A esset $= 20$ ped. et crassities $B = 20$ dig. talis columna sustentare posset onus $= 6024000$ libr.

§. 28.

§. 28. Ex hoc experimento etiam ipſam longitudinem b pro iſta ſpecie ligni definire licebit ope aequationis $b = \frac{3aaO}{\pi\pi b^4}$, ſi modo loco O ſubſtituatur maſſa ex eodem ligno conſtans, cuius pondus valeat 226 libr. Cum nunc pedis cubici aquae pondus ſit circiter 70 libr. grauitas autem ſpecifica huius ligni ſit duplo minor quam grauitas ſpecifica aquae, vnus pes cubicus talis ligni pondus habebit 35 libr. quare fiat 35 libr. : 1 = 226 libr. : O, ſicque erit $O = \frac{226}{35}$, ideoque in pedibus cubicis erit $O = 6,457$. Reliquas igitur quantitates etiam in pedibus exprimamus, eritque $a = 4$ et $b = 0,058$; vnde ex ſequente calculo ipſa longitudo b eruetur

$l.\ 3aa = 1,6812412$	$l.\ \pi\pi = 0,9942996$
$l.\ O = 0,8100308$	$l.\ b^4 = 5,0537120$
$l.$ Num. $= 2,4912720$	$l.$ Denom. $= 6,0480116$
ſub. $l.$ Denom. $= 6,0480116$	
$l.\ b = 6,4432604$	ergo $b = 2774980$

conſequenter pro hac ſpecie ligni longitudo b, qua tenacitatem metimur, valet 2774980 ped. vnde, quantum trabecula ex tali ligno parata a quauis vi elongari poſſit, definire poterimus. Ita ſi ipſam trabeculam ab auctore vſurpatam conſideremus, cuius longitudo $a = 4$ ped. et baſeos quadratae latus $= \frac{7}{10}$ digit. eamque a pondere 226 libr. non comprimi ſed diſtendi concipiamus, ſecundum praecepta ſupra data hoc pondus 226 libr. per talem trabeculam exprimamus, tam longam, vt eius pondus ſit 226 libr. ſitque haec longitudo $= p$. et quoniam vidimus pondus 226 libr. conuenire maſſae ligneae, cuius volumen $= 6,457$ ped.

ped. cubicor. eritque $b\,b\,p = 6{,}457$ ped. cubicor. Cum igitur in pedibus fit $b = 0\,058$, reperietur $p = 1919$. Quodfi iam elongatio iftius trabeculae, a tanta tenfione orta, vocetur vt fupra $= \delta\,a$, erit $p = \delta\,b$, ideoque $\delta = \frac{p}{b}$ $= 0{,}00069$, ideoque ipfa elongatio $\delta\,a = 0{,}00276$ ped. in digitis vero erit $\delta\,a = 0{,}03312$, fiue propemodum $\frac{1}{30}$ digit. id quod ab experientia non abhorrere videtur.

§. 29. In hoc ligno auctor iam obferuauit, vim, qua columna dirumpitur, fatis exacte effe proportionalem biquadrato craffitiei b^4; in aliis autem lignis, praecipue in quercu, animaduertit, vim rumpentem in minore ratione quam quadruplicata augeri, cuius phoenomeni ratio fine dubio in indole fibrarum, ex quibus hoc lignum conftat, eft quaerenda; fcilicet, quia affumfimus, elongationem duplo maiorem etiam vim duplo maiorem poftulare, concludere debemus, in ligno quercino plures fibrillas rumpi, antequam elongatio fiat duplo maior, vnde etiam renitentia tanto erit minor. Hinc intelligitur, formulae noftrae inuentae, quatenus biquadratum craffitiei b^4 continet, in praxi non nimium tribui poffe, et pro varia materiae, ex qua columnae conficiuntur, natura quandam correctionem admitti debere, ex pluribus experimentis determinandam.

§. 30. Quae hactenus de Columnis cylindricis in medium attulimus, haud difficulter ad eiusmodi Columnas transferuntur, quarum craffities certa quadam lege afcendendo decrefcit, quod argumentum hic de nouo tractare fuperfluum foret, propterea quod iam fufius id expofui in differtatione mea initio allegata. Verum quia tum temporis non videbam, quomodo ipfum quoque pondus colum-

 nae

nae in computum duci queat, iſtum defectum hic ſupplere conabor; vbi imprimis ſum inueſtigaturus, ad quantam altitudinem columna cylindrica extendi poſſit, ne ſub proprio pondere ſuccumbat; etiamſi ſuperne nullum onus ſuſtentet.

Tab. II. Fig. 9.

§. 31. Referat igitur vt ſupra curua $A q y B$ axem columnae, qui a proprio pondere iam ad hanc figuram ſit reductus, ac ponatur altitudo, quam quaerimus, $AB = a$, et abſciſſae cuicunque $Ax = x$ reſpondeat applicata $xy = y$, quae prae abſciſſa pro infinite parua haberi queat, ita vt in puncto y radius oſculi ſit $r = -\frac{dx^2}{ddy}$; tum vero denotet Ekk, vt ſupra, formulam rigoris, ita vt incuruatio in puncto y poſtulet virium momentum $= \frac{Ekk}{r} = -\frac{Ekk\,ddy}{dx^2}$.

§. 32. Quoniam igitur iſta incuruatio a ſolo pondere portionis ſuperioris columnae $A q y$ producitur, conſideremus eius elementum quodcunque in q, quod reſpondeat abſciſſae $Ap = p$ et applicatae $pq = q$, ſitque bb craſſities columnae per totam eius longitudinem; et cum elementum arcus Aq ipſi elemento abſciſſae dp aequale ſpectari poſſit, eius pondus exprimi poterit formula $bb\,dp$, quod agit in directione verticali qs; quam ob cauſam etiam in formula rigoris Ekk pondus E per maſſam eiusdem materiae, ex qua columna conſtat, exhiberi oportebit. Nunc igitur conſideremus punctum y tanquam fixum, ad quod vsque puncta q ab A promoueantur, et momentum vis elementaris $bb\,dp$, in directione qs agentis, reſpectu puncti y erit $= bb\,dp\,(y-q)$, cuius integrale, ob y conſtans, erit $= bbpy - bb\int q\,dp$, quo momentum ex pondere

dere arcus Aq ortum, exprimitur. Nunc igitur punctum q vsque in y promoueatur, fietque $p = x$ et $q = y$; vnde totum momentum, incuruationem in y producens, erit $bbxy - bb\int y\,dx = bb\int x\,dy$, cui ergo aequalis esse debet formula $-\frac{Ekk\,ddy}{dx^2}$, ita vt habeatur ista aequatio:

$$\frac{Ekk\,ddy}{dx^2} + bb\int x\,dy = 0.$$

§. 33. Haec autem aequatio ita est comparata, vt nullo modo ad integrabilitatem perduci queat, quae etiam est ratio, cur olim hunc casum euoluere non sim ausus; verum deinceps perspexi, integratione actuali non esse opus, dummodo integrale completum per seriem infinitam euolui queat. Quod quo facilius fieri possit, statuamus breuitatis gratia $Ekk = mbb$, vt haec aequatio habeatur: $\frac{m\,ddy}{dx^2} + \int x\,dy = 0$, et quia abscissae $x = 0$ etiam applicata y euanescit, statuamus, saltem pro initio seriei quaesitae, $y = \alpha x + \beta xx + \gamma x^3 + \delta x^4$, eritque

$$dy = \alpha dx + 2\beta x\,dx + 3\gamma xx\,dx + 4\delta x^3\,dx,$$

hincque

$$\int x\,dy = \tfrac{1}{2}\alpha xx + \tfrac{2}{3}\beta x^3 + \tfrac{3}{4}\gamma x^4 + \tfrac{4}{5}\delta x^5,$$

tum vero erit

$$\frac{m\,ddy}{dx^2} = 2m\beta + 6m\gamma x + 2m\delta xx,$$

quae expressio, praecedenti iuncta, nihilo debet esse aequalis; vnde fit $\beta = 0$; $\gamma = 0$ et $\delta = \frac{1}{24}\alpha m$; vnde intelligimus, seriem quaesitam a termino αx incipere, tum vero, ob $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, sequentes potestates per x^3 increscere.

§. 34. Hoc obseruato fingamus pro y sequentem seriem:

$$y = Ax + Bx^4 + Cx^7 + Dx^{10} + Ex^{13} + Fx^{16} + Gx^{19} + \text{etc.}$$

eritque

$$\int x\,dy = \tfrac{1}{2}Axx + \tfrac{4}{5}Bx^5 + \tfrac{7}{8}Cx^8 + \tfrac{10}{11}Dx^{11} + \tfrac{13}{14}Ex^{14} + \tfrac{16}{17}Fx^{17} + \text{etc.}$$

ad quam seriem addere debemus istam:

$$\frac{m\,ddy}{dx^2} = 3.4\,mBxx + 6.7\,mCx^5 + 9.10\,mDx^8 + 12.13\,mEx^{11} + \text{etc.}$$

quarum serierum summa, quia debet euanescere, dabit sequentes determinationes:

$$1^\circ.\ \tfrac{1}{2}A + 3.4\,mB = 0, \text{ hinque } B = -\frac{A}{2.3.4\,m}$$

$$2^\circ.\ \tfrac{4}{5}B + 6.7\,mC = 0, \text{ hinc } C = -\frac{4B}{5.6.7\,m} = \frac{1.4.A}{2.3.4..7\,m^2}$$

$$3^\circ.\ \tfrac{7}{8}C + 9.10\,mD = 0, \text{ hinc } D = -\frac{7C}{8.9.10\,m} = -\frac{1.4.7\,A}{2.3.4...10\,m^3}$$

$$4^\circ.\ \tfrac{10}{11}D + 12.13\,mE = 0, \text{ hinc } E = -\frac{10D}{11.12.13\,m} = \frac{1.4.7.10\,A}{2.3....13\,m^4}$$

§. 35. His valoribus inuentis applicata y per sequentem seriem infinitam exprimetur:

$$\frac{y}{A} = x - \frac{1.x^4}{2.3.4.m} + \frac{1.4.x^7}{2.3...7\,m^2} - \frac{1.4.7\,x^{10}}{2.3...10\,m^3} + \frac{1.4.7.10\,x^{13}}{2.3...13\,m^4}\ \text{etc.}$$

quae expressio rite ad casum nostrum est accommodata: continet enim adhuc vnam constantem arbitrariam A; altera vero iam inde est determinata, quod facto $x = 0$ etiam fieri debeat $y = 0$. Transferamus nunc punctum y in terminum imum B, ponendo $x = a$, et quia hic applicata y euanescere debet, prodibit ista aequatio infinita:

$$0 = 1 - \frac{1.a^3}{2.3.4\,m} + \frac{1.4\,a^6}{2.3..7\,m^2} - \frac{1.4.7\,a^9}{2.3...10\,m^3} + \frac{1.4.7.10\,a^{12}}{2.3...13\,m^4}\ \text{etc.}$$

ex qua ipsam altitudinem columnae $AB = a$ eruere oportet: sic enim inueniemus eam nostrae columnae altitudinem, in qua iam a proprio suo pondere incuruari incipiet:

cipiet. Hunc in finem ponamus breuitatis gratia $\frac{a^3}{m} = v$, vt refoluenda proponatur haec aequatio:

$$0 = 1 - \frac{1 \cdot v}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 4 \, vv}{2 \cdot 3 \ldots 7} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \, v^3}{2 \cdot 3 \ldots 10} \text{ etc.}$$

ficque totum negotium huc eft reductum, vt inueniatur valor litterae v, qui hanc feriem infinitam nihilo reddat aequalem; hoc enim valore inuento altitudo columnae quaefita erit $a = \sqrt[3]{m\,v}$.

§. 36. Euidens eft hanc feriem vehementer conuergere, quantumuis etiam magnus numerus pro v accipiatur. Primo autem hic obferuamus, quamdiu fuerit $v < 24$, quoniam termini iam ab initio continuo decrefcunt, feriei fummam neceffario effe pofitiuam; vnde patet, numerum v neceffario maiorem effe debere quam 24. Quo autem refolutionem huius aequationis faciliorem reddamus, ponamus $v = 6u$, vt fit $a = \sqrt[3]{6\,m\,u}$, et aequationem hinc natam hoc modo repraefentemus:

$$0 = 1 - \alpha u + \beta u^2 - \gamma u^3 + \delta u^4 - \varepsilon u^5 \text{ etc.}$$

eritque

$$\alpha = \tfrac{1}{4};\ \beta = \tfrac{4}{35}\alpha;\ \gamma = \tfrac{7}{120}\beta;\ \delta = \tfrac{10}{286}\gamma;\ \varepsilon = \tfrac{13}{560}\delta;$$
$$\zeta = \tfrac{16}{969}\varepsilon;\ \eta = \tfrac{19}{1540}\zeta;\ \theta = \tfrac{22}{2300}\eta;\ \iota = \tfrac{25}{3276}\theta;\ \varkappa = \tfrac{28}{4495}\iota;$$
$$\lambda = \tfrac{31}{5984}\varkappa;\ \mu = \tfrac{34}{7770}\lambda \text{ etc.}$$

Hinc in fubfidium fequentium calculorum colligamus harum literarum logarithmos, eosque cum fuis differentiis primis et fecundis ordine referamus hoc modo:

Logarithmi literarum α, β, γ etc.	Differentiae primae.	Differentiae secundae.
$l\,\alpha = 9{,}3979400$	0,9420080	0,2920752
$l\,\beta = 8{,}4559320$	1,2340832	0,2222828
$l\,\gamma = 7{,}2218488$	1,4563660	0,1778786
$l\,\delta = 5{,}7654828$	1,6342446	0,1479592
$l\,\varepsilon = 4{,}1312382$	1,7822038	0,1265633
$l\,\zeta = 2{,}3490344$	1,9087671	0,1105380
$l\,\eta = 0{,}4402673$	2,0193051	0,0980988
$l\,\vartheta = 8{,}4209622$	2,1174039	0,0881678
$l\,\iota = 6{,}3035583$	2,2055717	0,0800582
$l\,\varkappa = 4{,}0979866$	2,2856299	0,0733122
$l\,\lambda = 1{,}8123567$	2,3589421	
$l\,\mu = 9{,}4534146$		

§. 37. His praeparatis ad radicem aequationis propositae $0 = 1 - \alpha u + \beta u u - \gamma u^3 + \delta u^4$ etc. inueniendam vtamur methodo per feries recurrentes procedente, quae iubet talem feriem formare ex fcala relationis $\alpha, -\beta, \gamma, -\delta, \varepsilon, -\zeta$ etc. quae fit 1, A, B, C, D, E, F etc. ita vt fit $A = \alpha$; $B = \alpha A - \beta$; $C = \alpha B - \beta A + \gamma$; $D = \alpha C - \beta B + \gamma A - \delta$; $E = \alpha D - \beta C + \gamma B - \delta A + \varepsilon$ etc. tum vero fequentes fractiones continuo propius ad radicem ipfius u appropinquabunt: $\frac{1}{A}$; $\frac{A}{B}$; $\frac{B}{C}$; $\frac{C}{D}$; $\frac{D}{E}$ etc. Calculo igitur inftituto termini huius feriei recurrentis fequenti modo determinabuntur:

$$A = 0{,}25$$
$$B = 0{,}033929$$
$$C = 0{,}00300610$$
$$D = 0{,}0001448750$$
$$E = -0{,}00000633656\,2$$

Quo-

Quoniam hic litera F valorem fortita eſt negatiuum, hinc iam tuto concludere poſſumus, aequationem noſtram propoſitam nullam plane habere radicem realem, quod etiam inde patet, quod fractiones ſupra allatae $\frac{1}{A}$; $\frac{A}{B}$; $\frac{B}{C}$; etc. ad nullum certum terminum conuergunt: fit enim
$\frac{1}{A} = 4$; $\frac{A}{B} = 7$; $\frac{B}{C} = 11$; $\frac{C}{D} = 20$; $\frac{D}{E} = -23$.

§. 38. Aequatio igitur infinita $0 = 1 - \alpha u + \beta u^2$ etc. ita eſt comparata, vt nullam plane radicem realem inuoluat, ideoque nullus datur numerus, quantumuis magnus accipiatur, pro u, qui ſummam huius feriei reddat nihilo aequalem, ſed quicunque numerus pro u accipiatur, ſumma ſeriei $1 - \alpha u + \beta u^2 - \gamma u^3 + \delta u^4$ etc. ſemper erit poſitiua, quam adeo quouis caſu aſſignare licebit. Ponamus enim verbi gratia $u = 10$, et ſingulos terminos iſtius ſeriei euoluamus; vbi quidem termini ab initio vehementer diuergent, mox autem ita conuergent, vt ſequentium omnium ſumma haud difficulter aſſignari queat. Singuli autem huius ſeriei termini ſequentes adipiſcentur valores:

$$\begin{aligned}
+ 1 &= 1{,}0000000 \\
- \alpha u &= - 2{,}5000000 \\
+ \beta u^2 &= 2{,}8571428 \\
- \gamma u^3 &= - 1{,}6666666 \\
+ \delta u^4 &= 0{,}5827506 \\
- \varepsilon u^5 &= - 0{,}1352814 \\
+ \zeta u^6 &= 0{,}0223375 \\
- \eta u^7 &= - 0{,}0027603 \\
+ \theta u^8 &= 0{,}0002636 \\
- \iota u^9 &= - 0{,}0000201 \\
+ \kappa u^{10} &= 0{,}0000012
\end{aligned}$$

Quodſi

Quodſi iam huius ſeriei ab initio duo, tres, quatuor, quinque termini coniungantur, prodibunt numeri alternatim maiores, vel minores quam vera ſumma, veluti hic repraeſentatur.

Termini	Summa
1.	1,0000000
2.	– 1,5000000
3.	1,3571428
4.	– 0,3095238
5.	0,2732275
6.	0,1379461
7.	0,1602836
8.	0,1575233
9.	0,1577869
10.	0,1577668
11.	0,1577680

Vnde patet, veram ſummam contineri intra hos limites: 0,1577668 et 0,1577680, ideoque medium ſumendo vera ſumma aeſtimari poteſt = 0,1577674.

§. 39. His obſeruatis ſequens paradoxon maxime memorabile ſe nobis offert: quod columnae cylindricae, ad quamcunque altitudinem etiam porrigantur, nunquam ſub proprio pondere ſuccumbant, quod vtique eo magis eſt admirandum, quod aucta columnae altitudine onus ſuſtentandum decreſcat in ratione duplicata altitudinem, etiamſi proprium pondus columnae negligatur; ex quo concludi debere videbatur, ſi etiam proprii ponderis ratio habeatur, onus ſuſtentandum adhuc magis diminui, atque

adeo

adeo tandem penitus euanefcere debere, ita vt columna nimis alta nullum plane onus geftare valeret, quod tamen nunc longe aliter fe habere inuenimus. Haec autem omnia accuratius examen requirunt, quod in fequente differtatione inftituemus.