



1780

De infinitis infinitis gradibus tam infinite magnorum quam infinite parvorum

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De infinitis infinitis gradibus tam infinite magnorum quam infinite parvorum" (1780). *Euler Archive - All Works*. 507.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/507>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE
 INFINITIES INFINITIS
 GRADIBVS TAM INFINITE MAGNORVM
 QVAM INFINITE PARVORVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Si x denotet quantitatem infinite magnam, tum ista progressio geometrica $1, x, xx, x^3, x^4, x^5$, etc. ita est comparata, vt quilibet terminus sit infinities maior praecedente, at vero infinities minor sequente. Vnde si potestatem x^{1000} tanquam vltimum terminum huius progressionis spectemus, inter terminum primum 1 et eum statui poterunt mille gradus diuersi infinite magnorum, vbi quidem ad eundem gradum referimus omnes quantitates finitam rationem inter se tenentes. Neque tamen iste numerus millenarius omnes gradus intermedios inter 1 et x^{1000} exhibet; vbi obseruandum, quae hic de numero determinato 1000 dicuntur, de quolibet alio numero, quantumuis magno, esse intelligenda.

§. 2. Plurimum abest, vti modo diximus, vt illa progressionem omnes gradus intermedii inter 1 et x^{1000} , qui quidem sint diuersi, repraesententur. Si enim ponamus $z = y^{1000}$ vt sit
 $y =$

$y = \sqrt{x}$, ob x quantitatem infinitam etiamnunc y erit quantitas finita; unde sequitur, quia inter 1 et y^{1000} quilibet pariter infinites maior est quam praecedens, infinites vero minor quam sequens, etiam inter unitatem et x denuo mille gradus intermedios constitui posse, etiam ante x fuisse primus gradus infiniti. Simili vero modo etiam inter praecedentem gradum primum x et secundum x iterum mille gradus intermedios constitui possunt, atque adeo inter binos quosvis gradus proximos, qui omnes ita sunt comparati, ut quilibet sit infinites maior quam praecedens, infinites vero minor quam sequens.

§. 3. Neque vero hic subsistere cogimur. Cum enim sit y quantitas infinita magna, si ponamus $y = z^{1000}$, etiamnunc z erit quantitas infinita magna; unde intelligitur, inter 1 et z^{1000} , hoc est, inter 1 et y , denuo mille gradus intermedios infinitorum constitui posse, atque hoc modo vitius progressi licet, quousque libuerit, ita ut numerus omnium graduum diversorum reuera in infinitum augeri possit.

§. 4. Haec eadem quoque inuerso modo valent de infinite parvis. Si enim x denotet quantitatem infinitam parvam huius progressionis geometricae: $1, x, x^2, x^3, \dots, x^{1000}$, quilibet terminus infinites minor est quam praecedens, at vero infinites maior quam sequens, hincque inter 1 et x^{1000} adpiscimur mille gradus intermedios infinite paruum, omnes dineros; quandoquidem quilibet infinites minor est praecedente, infinites vero maior sequente.

§. 5.

§. 5. Quod si iam vltimus ponamus $x = y^{1000}$, vt

fit $y = \sqrt[1000]{x}$, etiamunc y erit quantitas infinite parua;

vide patet inter 1 et y^{1000} , hoc est inter 1 et x , denuo

mille gradus infinite paruorum intermedios constitui posse,

quod etiam fieri poterit inter x et x , similiq; modo

inter x et x^2 , atque in genere inter binos quosuis pro-

ximos praecedentis seriei; et quia, posito vltimus $y = z^{1000}$,

etiamunc z est quantitas infinite parua, numerus gra-

duum diuersorum denuo milles euadet maior, quae mul-

tiplicatio vltimus sine fine continuari poterit.

§. 6. Haec quidem, quae ex consideratione po-

testatum sunt deducta, in vulgus sunt notissima, atque a-

deo ad Algebrae communem referri possunt; verum Ana-

lysis sublimior praeterea suppeditat innumerabiles alios

gradus tam infinite magnorum quam paruorum, quae

nullo modo in illo eorum graduum, quos modo comme-

morauimus, quantumvis etiam multiplicentur, comprehen-

di possunt, sed perpetuo vel infinites maiores, vel mino-

res deprehenduntur quam vllus graduum praecedentium,

quod cum nusquam satis clare explicatum esse memini,

operae pretium erit hic suis perpendisse.

§. 7. Tales autem quantitates in Analyti sublimi-

ori occurrentes ad duas classes referri possunt, quarum

altera complectitur logarithmos, altera vero quantitates

exponentiales. De logarithmis igitur primum agamus, ac

denotante x numerum infinite magnum constat quoque

eius logarithmum esse infinite magnum. Perinde autem

hic est, quoniam canone logarithmorum vi velimus, quae

communibus, quae hyperbolicis, quae quouis alio genere.

§. 8.

§. 8. Quando autem x est numerus infinite ma-
gnus, per se satis clarum est, eius logarithmum, hoc est
 $l x$, infinitum quidem, atamen infinites esse minorem
ipso numero x , quam ob rem ad gradum quempiam in-
feriorem referri debet. Quoniam igitur gradus ipso x
inferiores per x^n repraesentari possunt, denotante scilicet
 n numerum quantumvis magnum, haud difficulter ostendi
potest, semper esse $l x$ infinites minorem quam x^n ,
quantumvis etiam magnus numerus pro n accipiat.

§. 9. Sequenti autem modo demonstrare licet, sem-
per x^n infinites minus esse quam $l x$, siquidem $x = \infty$,
sive valorem huius fractionis $\frac{l x}{x^n}$ semper esse infinite ma-
gnum. Statuatur enim iste valor = v , ut sit $v = \frac{l x}{x^n}$, ac

ponatur $p = \frac{1}{v}$ et $q = \frac{x^n}{l}$, eritque $v = \frac{q}{p}$, cuius fractio-

nis tam numerator p quam denominator q fit = 0
casu $x = \infty$; quam ob rem secundum regulam notissimam
erit quoque $v = \frac{p}{q}$. Cum igitur sit $p = -\frac{x(lx)}{x^n}$ et

$$p q = \frac{-d x^n}{-d x^n} + \frac{x^n}{x^n} \text{ erit } v = \frac{(l x)}{x^n}, \text{ quem ergo valorem}$$

praecedenti $\frac{l x}{x^n}$ aequalem esse oportet. At vero sumtis
quadratis ex praecedente fit $v = \frac{(l x)^2}{x^n}$, qui valor per

posteriorem dicitur praebet $w = n x^{\frac{1}{n}}$, qui cum manifesto sit infinitus, etiam patet esse $\frac{1}{x}$ quantitatem infinite magnam, huc semper esse $l x$ quantitatem infinites minorem quam $x^{\frac{1}{n}}$, quantumvis etiam magnus numerus pro n accipiat.

§. 10. Hinc igitur manifestum est, si fuerit $x = \infty$, tum eius logarithmum $l x$ ad nullum gradum superiorum infinitorum referri posse, quantumvis etiam illi gradus per continuam multiplicationem coarctentur. Quam ob rem hic constitui debet novus plane gradus infiniti, classificatio logarithmi $l x$ conveniens, ad quem scilicet potestas $x^{\frac{1}{n}} = 0$ foret $x^{\frac{1}{n}} = 1$, cum tamen $l x$ sit infinitus; verum probe notandum est, demonstrationem ante allatam probe $n x^{\frac{1}{n}}$, unde sumto etiam $n = \infty$ nihilominus prodit $w = n$, ideoque adhuc infinitum.

§. 11. Cum igitur $l x$ constituat quasi gradum infinitum omnium quantitatum infinite magnarum, evidens est, hinc numerum graduum supra constitutorum, qui iam erat infinitus, insuper in infinitum augeri debere. Si enim contempleretur gradum quemcumque potestate $x^{\frac{1}{n}}$ designatum, manifestum est, hanc formulam: $x^{\frac{1}{n}} l x$, infinites esse maiorem quam $x^{\frac{1}{n}}$; statim vero atque exponens α fractione quam minima $\frac{1}{n}$ augetur, tum certe formula $x^{\frac{1}{n}} l x$ infinites

nitius erit minor quam $x^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}$, ideoque necessario inter gradus x^n et $x^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}$ constitui debbit.

§. 12. Verum hoc modo neutquam adhuc multitudo omnium graduum diuertorum exhauritur. Erit enim $(lx)^2$ sit infinites maior, quam lx , ideoque peculiarem gradum constitutere debeat: tamen adhuc infinites minor est quam potestas x^n , quantumvis etiam numerus n augetur. Simili porro modo omnes diuersae potestates ipsius lx peculiare prorsus praebent casus infinitorum, id quod adeo ad exponentes fractos est extendendum, cum $(lx)^{\frac{2}{3}}$ certe infinites maior sit quam $(lx)^{\frac{2}{3} - \frac{1}{n}}$, atamen infinites minor quam $(lx)^{\frac{2}{3} + \frac{1}{n}}$, ideoque peculiarem gradum constitutere debeat. Totidem vero etiam novum Casus exsurgent, si insuper per potestatem quamcumque ipsius x multiplicemus: scilicet formula $x^n (lx)^{\frac{2}{3}}$ infinites maior quam $x^n (lx)^{\frac{2}{3} - \frac{1}{n}}$, interim tamen infinites minor est quam $x^n (lx)^{\frac{2}{3} + \frac{1}{n}}$.

§. 13. Neque vero adhuc hoc modo omnes gradus infinitorum enumerari possunt. Quia enim lx est quantitas infinite magna, etiamnum eius logarithmus lx erit infinitus, etiam infinites minor quam lx ; unde patet, ex hac formula: lx , eiusque potestatibus $(lx)^{\frac{2}{3}}$ insuper infinitos novos gradus infinitorum statui debere, imprimis si haec formula non solum cum potestatibus O^2 statibus

atque manifestum est potestatem a^x infinites non solum superare ipsum exponentem, verum adeo demonstrari potest, semper fore a^x quantitatem infinites maiorem quam potestatem x^n , quantumvis magnus fuerit exponent n . Demonstratio autem sequenti modo se habet.

§. 16. Ponatur $\frac{a^x}{x^n} = v$, atque $p = \frac{x^n}{1}$ et

$$q = \frac{v}{x^n}, \text{ ut fiat } v = \frac{q}{p}, \text{ cuius fractionis tam numerator } p$$

quam denominator q casu $x = \infty$ evanescit, sicque erit

$$\frac{dv}{v} = \frac{dq}{q}. \text{ Est vero } d p = -\frac{x^n + 1}{n d x} \text{ et } d q = -\frac{a^x}{d x}$$

unde fit $v = \frac{x^n + 1}{n a^x}$, quae quidem formula multo ma-

gis est complicata quam ipsa proposita $v = \frac{x^n}{a^x}$, ita ut hinc

nihil concludi posse videatur. Interim tamen ex harum

formularum comparatione versus valor ipsius v concludi

poterit. Cum enim ex priore sit $v^{n+1} = \frac{a^{x(n+1)}}{x^{n+1}}$, ex

posteriore vero $v^n = \frac{x^{n(n+1)} (1/a)^n}{n^n a^{nx}}$, prior valor per poste-

riorem divisus dabit $v = \frac{n^n}{a^n (1/a)^n}$, qui valor manifesto est

infinitus. Sicque demonstratum est, formulam a^x semper esse

se infinites maiorem quam x^n , quantumvis etiam magnus

capiat exponeus n , dummodo fuerit $a > 1$. Hinc igitur

tur patet, quantitatem exponentialem a^x omnes gradus in-
 futorum ex potestate x^n ordindorum infinites superare.
 Hinc, quamquam x est quantitas infinita, tamen omnes

istae fractiones: $\frac{x}{a^x}$, $\frac{x^2}{a^{x^2}}$, $\frac{x^3}{a^{x^3}}$, et in genere $\frac{x^n}{a^{x^n}}$ ad tantum
 gradum infiniti exurgunt, ut omnes gradus infinitorum
 primae classis excedant. Manifestum autem est haec ea-
 dem valere de formulis a^x , dummodo fuerit $a > 0$, at-
 que adeo etiam valet de formulis a^{x^b} , si modo literis
 a et b valores positivi tribuantur; quae ergo infinita infi-
 nites sunt altiora quam potestates ipsius x , quantumvis
 fuerint magnae.

§. 17. Praeterea etiam notandum est, etiam si for-
 mula a^x ad gradum infiniti infinte alti pertineat; tamen,
 simul ac valor litterae a quam minime augetur, valo-
 rem huius formulae adhuc infinites euadere altorem. Si
 enim fuerit $b > a$, tum formula a^x se habebit ad formu-
 lam b^x , ut 1 ad $(\frac{a}{b})^x$, hoc est, ut 1 ad infinitum infinte-
 simi gradus.

§. 18. Quando autem $a > 1$, tum omnes huius-
 modi potestates a^x reuocari possunt ad potestates numeri
 fixi e , cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, cum sit
 $a^x = e^{x \ln a}$, sicque omnia huius generis infinita representa-
 ri poterunt sub hac forma e^{ax^b} , existente $a > 0$ et $b > 0$;
 tum vero etiamnunc ista formula $\frac{x^n}{e^{ax^b}}$ ad gradum infi-

nites-

nitellum infinitorum referri debet. Multo magis etiam hi gradus infinitissimi in infinitum elevari poterunt, si loco $a x^{\alpha}$ scribamus $e^{\alpha x^{\beta}}$, quo pacto pervenietur ad hanc formam: $e^{\alpha x^{\beta}}$; haecque augmentatio ulterius sine fine continuari poterit.

§. 19. Omnia haec invero modo ad infinite parva transferri possunt, quae iam aliquanto accuratius pervendamus. Denotet igitur litera x quantitatem infinite parvam, cuius potestates angulae x^{α} innumeros gradus infinite parvorum suppeditant, quoniam aucto vel minimo exponente α formula euadit infinites minor. Hos autem gradus omnes sub prima classe infinite parvorum complectamur, si modo exponenti α omnes valores positivi tribui intelligantur.

§. 20. Ad secundam vero classem referamus ea infinite parva, quae ex logarithmismo nascuntur. Quoniam enim $1/x$ est infinitus, eius reciprocum $1/(1/x)$ erit infinite paruum. Ponamus autem commoditatis gratia $1/x = n$, ut ista forma fiat $1/n$, quae erit tale infinite paruum, quod omnia infinite parva primae classis infinites superat. Ad hanc classem quoque pertinebunt formulae $1/n$, $1/n^2$, $1/n^3$, etc. et in genere $1/n^{\alpha}$. Tum vero etiam huc referendae erunt formae

do est negativus, cum formula x^m per se sit infinite parva.

§. 22. Praeter has autem duas classes infinite parvorum quantitates exponentiales tertiam nobis praebunt classem; Cum enim ob $x = 0$ formula e^x praebat infinite magnum

quasi supremi ordinis, eius reciprocum $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ dabit in-

finite parvum etiam supremi ordinis, quod scilicet infi-
tutes erit minus quam vllum infinite parvum primae clas-
tis, id quod etiam tenendum est de formula generali

$\frac{e^x}{x^a}$. Ponamus autem brevitatis gratia $e^x = v$, vt haec

infinite parva comprehendendi queant in hac forma $\frac{v}{x}$. Cum

igitur hinc sit $dv = x^a$, erit differentiando,

$$\frac{dv}{v} = \frac{a x^{a-1} dx}{x^a}, \text{ ideoque } dv = -\frac{a dx}{x^a + 1}.$$

Praeterea vero hic imprimis notandum est, etiam si sit

quantitas evanescens, tamen has formulas $\frac{x^n v}{1}$ etiamnum

exprimere infinite parva supremi ordinis.

§. 23. His iam classibus constitutis insignia sub-
sidia, tam pro differentiatione quam integratione talium
infinite parvorum reperi possunt, quemadmodum enim,
si pro prima classe ponatur $a x^a = y$ sit $\frac{dy}{dx} = a x^{a-1}$, et
Acta Acad. Imp. Sc. Tom. II. P. I.

sy dx
p

$\int y dx = \frac{a}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$, pater, hoc integrale infinites minus esse quam y , dum contra differentiale $\frac{dy}{dx}$ infinites est maius, atque adeo fieri queat infinite magnum, si $\alpha < 1$; id quod etiam de infinite parvis reliquarum classium est intelligendum.

§. 24. Consideremus nunc infinite parvum secundae classis, ac posito $I \frac{x}{1} = u$, ut sit $du = -\frac{x}{dx}$, statuanus $y = a x^n$, ubi sit $\alpha > 0$, m vero numerus sine positivus, sine negativus, siquidem utroque casu haec formula est infinite parva. Hinc igitur fiet

$$\frac{dy}{dx} = a a x^{\alpha-1} n^m - a m x^{\alpha-1} n^{m-1} = a x^{\alpha-1} n^{m-1} (\alpha n - m),$$

quia autem n est infinitum, relictis termino posteriore $-m$ erit $\frac{dy}{dx} = a a x^{\alpha-1} n^m$, unde per dx multiplicando et

integrando fit $\int a a x^{\alpha-1} n^m dx = y = a x^n$, unde hanc nanciscimur integrationem satis memorabilem:

$$\int x^{\alpha-1} n^m dx = \frac{a}{1} x^{\alpha+1} n^m, \text{ sine loco } \alpha - 1 \text{ scribendo } \alpha \text{ erit}$$

$$\int x^{\alpha} n^m dx = \frac{x^{\alpha+1} n^m}{\alpha+1}$$

§. 25. Hinc ergo si concipiamus lineam curvam, cuius abscissae x respondeat applicata $y = a x^{\alpha} n^m$, ubi sit $\alpha > 1$, et exponens m sine positivus sine negativus, huius curvae applicata in ipso initio, ubi $x = 0$, evanescet, area vero huius curvae abscissae x infinite parvae respondens erit

erit $\int y dx = \frac{a}{\beta + 1} x^{\beta + 1} + n = \frac{\beta + 1}{1} x y$: aequabitur scilicet
 rectangulo ex abscissa x in applicatam y , diviso per $\beta + 1$,
 quod eo magis est memorabile, quia formula $x^{\beta} n dx$
 nullo modo integrari potest, praeter casus paucissimos,
 quibus exponents m est numerus integer positus.

§. 26. Consideremus nunc quoque infinite parva
 tertiae classis, ac ponamus brevitatis gratia ut supra

$$\frac{x^{\beta}}{a} = v, \text{ ut sit } dv = -\frac{\beta x^{\beta-1}}{a} dx,$$

eritque, ut vidimus, haec formula $\frac{x^m}{v}$ semper quantitas
 infinite parva, siue exponents m fuerit positus, siue ne-

gativus. Quod si ergo ponatur $\frac{x^m}{v} = z$, erit

$$dz = m x^{m-1} + a \beta x^{m-\beta-1} = x^{m-\beta-1} (m x^{\beta} + a \beta)$$

ubi quia $m x^{\beta}$ evanescit prae $a \beta$ erit

$$\frac{dz}{z} = \frac{a \beta x^{m-\beta-1}}{a \beta x^{m-\beta-1}}$$

unde vicissim integrando erit

$$z = a \beta \int \frac{x^{m-\beta-1} dx}{x^m} = \frac{a \beta}{x^{\beta}}$$

ideoque si loco $m - \beta - 1$ scribamus n , ita ut n sit numerus
 quicumque siue positus siue negativus, semper erit

$$\int x^n dx = \frac{a \beta}{x^{n+\beta+1}}$$

quae integratio vera est, quamdiu x est infinite parvum,
 cum

cum tamen formula differentialis omnem integrationem

responat.

§. 27. Quodsi ergo linea curva concipiatur, cu-

jus abscissae x respondeat applicata $y = \frac{a}{x^n}$, existente

$a = \frac{x^n}{n}$, ubi a et n sint numeri positivi, exponens vero

n quicumque sine negativus, applicata huius

curvae in ipso initio ubi $x = 0$ etiam evanescet, huius

vero curvae area abscissae x infinite parvae respondens

erit

$\int y dx = \frac{a}{a-n} x^{a-n} = \frac{a}{a-n} x^{a-n+1} \cdot \frac{1}{a-n+1}$, hinc ergo si

fuerit $y = \frac{a}{x^n}$, ubi $a = 1$ et $n = 1$ erit $\int y dx = x \log x$.

Hoc est area curvae aequabitur rectangulo ex quadrato

abscissae in applicatam.

§. 28. Quodsi iam vicissim quaeramus curvam

cuius area in genere debeat esse $\int y dx = x^2 y$, pervenitur

ad hanc aequationem differentialem: $y dx = 2xy dx$

$+ x x dy$ unde sit

$\frac{dy}{y} = \frac{2x dx}{1-2x}$

denique integrando

$\log y = -\frac{x}{1-2x} - 2 \log x$, atque ad numeros surgendo

$y = \frac{x x e^{-\frac{x}{1-2x}}}{x^2}$, quae in forma proposita continetur,

§. 29. Postrema autem integratio etiam valet, si
 quantitas infinite parva insuper classem secundam vicin-

que innovat. Posito enim $1^x = u$, si statueris $z = a x^m u^m$
 (vbi exponentes m et n tam negative quam positive acci-
 pi possunt, quandoquidem haec quantitas semper est infi-

nite parva, dummodo fuerit $w = e^{x^g}$) atque ut valorem
 facilius eruamus, sumamus logarithmos, erit

$$1z = 1a + m1x + n1u - 1w \text{ ideoque } \frac{z}{dz} = \frac{a}{m dx} + \frac{x}{n du} - \frac{w}{w}.$$

Quia vero est

$$du = -\frac{x}{dx} \text{ et } dv = -\frac{x}{a^g dx^{g+1}} \text{ vbi his valori-$$

bus in superiore expressione substitutis ea sequentem indu-

et formam:

$$\frac{dz}{z} = \frac{x}{m} - \frac{u}{n} + \frac{x}{a^g x^{g+1}}$$

vbi cum sit $g + 1 > 1$, ambo termini priores prae tertio
 evanescent, sicut erit concinnius

$$\frac{dz}{z} = \frac{a^g}{a^g} \frac{x}{x^{g+1}}, \text{ ideoque } dz = \frac{a^g x^{1-g}}{a^g x^{1-g} \cdot x^m} dx.$$

§. 30. Quodsi iam hic loco $n - g - 1$ scribamus k ,
 ita ut k aequae ac m denotent numeros quoscumque tam
 P 3
 postea-

quandiu scilicet fuerit x infinite paruum, quod eo magis est notatu dignum, quia nulla adhuc via inventa est huiusmodi integrationes instituendi.

$$\int y dx = \frac{ay}{1-x^{a+1}}$$

curvae, eius area erit

ideoque si fuerit $\frac{x^k n^m}{u} = y$, et y spectetur ut applicata

$$\int x^k n^m dx = \frac{u}{1-x^{k+\beta+1} n^m} \cdot \frac{ay}{1-x^{a+1}}$$

positivos quam negativos, ob $n = k + \beta + 1$ semper erit