De valore formulae integralis $\int (x^{a-1}\, dx)/(\log x) \cdot (1-x^b)(1-x^c)/(1-x^n)$ a termino $x=0$ usque ad $x=1$ extensae

Leonhard Euler

DE VALORE FORMVLAE INTEGRALIS

$$\int \frac{x^{a-1}\,dx}{lx} \cdot \frac{(1-x^b)(1-x^c)}{1-x^n}$$

A TERMINO $x = 0$ VSQVE AD $x = 1$ EXTENSAE.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Quae non ita pridem de integratione eiusmodi formularum differentialium, in quarum denominatore occurrit lx, in medium attuli, vbi ostendi, valorem huius formulae integralis: $\int \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{lx} dx$ ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensum esse $= l\frac{a}{b}$, non solum summa attentione digna, sed etiam quasi nouum campum in methodo integrandi aperire sunt visa, propterea quod huiusmodi formularum integratio prorsus singularia artificia postulat, at ex principiis etiam nunc parum cognitis erat deducta. Tunc quidem temporis ista inuestigatio non admodum late patere videbatur, dum praeter formulam modo allegatam ad paucas alias eam mihi quidem extendere licuit; nunc autem, postquam hoc argumentum accuratius sum perscrutatus, deprehendi, formulam multo generaliorem, eam scilicet quae hic in titulo conspicitur, pari successu expediri posse. Quin etiam methodus, quam hic sum expositurus, etiam ad formulas adhuc generaliores facile extendi potest; vnde haud contemnenda incrementa in vniuersam Analysin redundare videntur.

§. 2. Designemus igitur littera S valorem formulae propositae, quem scilicet induit, si eius integratio a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extendatur, ita vt sit

$$S = \int \frac{x^{a-1}\,dx}{lx} \cdot \frac{(1-x^b)(1-x^c)}{1-x^n} \left[\begin{array}{l} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{array} \right]$$

ad quem valorem inuestigandum ante omnia obseruari conuenit, fractionem $\frac{(1-x^b)(1-x^c)}{1-x^n}$ ita esse comparatam, vt posito $x = 1$ penitus euanescat. Cum enim in numeratore tam $(1-x^b)$ quam $(1-x^c)$ factorem $(1-x)$ inuoluat, ideoque totus numerator factorem habeat $(1-x)^2$, dum in denominatore tantum factor simplex $1-x$ inest, euidens est, posito $x = 1$ totam fractionem euanescere debere, id quod etiam inde intelligitur, quod casu $x = 1$ tam numerator quam denominator euanescit; vnde, si iuxta regulam notissimam tam loco numeratoris, qui euolutus est $1 - x^b - x^c + x^{b+c}$, quam loco denominatoris vtriusque differentialia scribantur, prodit ista fractio:

$$\frac{-b x^{b-1} - c x^{c-1} + (b+c) x^{b+c-1}}{-n x^{n-1}}$$

illi aequalis casu $x = 1$, posito autem $x = 1$, ista fractio abit in hanc: $\frac{-b-c+b+c}{-n}$, quae manifesto est $= 0$.

§. 3. Cum numerator fractionis modo consideratae sit $1 - x^b - x^c + x^{b+c}$, si is per $1 - x^n$ diuidatur, ex quaternis terminis orientur quatuor sequentes series geometricae infinitae:

I. $1 + x^n + {}^{2n} + x^{3n} + x^{4n} + x^{5n} +$ etc.

II. $-x^b - x^{n+b} - x^{2n+b} - x^{3n+b} - x^{4n+b} - x^{5n+b} -$ etc.

III. $-x^c - x^{n+c} - x^{2n+c} - x^{3n+c} - x^{4n+c} - x^{5n+c} -$ etc.

IV. $x^{b+c} + x^{n+b+c} + x^{2n+b+c} + x^{3n+b+c} + x^{4n+b+c} + x^{5n+b+c} +$ etc.

Harum

Harum igitur serierum singulos terminos duci oportet in formulam $\frac{x^{q}\,dx}{lx}$; tum enim omnium integralia, ab $x=0$ ad $x=1$ extensa, si in vnam summam colligantur, dabunt valorem quaesitum littera S designatum.

§. 4. Hoc ergo modo totum negotium reducitur ad integrationem talis formulae $\frac{x^m\,dx}{lx}$, ab $x=0$ ad $x=1$ extendendam. Haec autem formula continet fundamentum principale, vnde omnia, quae olim de hoc argumento sum commentatus, sunt deducta; tum autem ad eius integrale inueniendum vsus sum doctrina circa functiones duarum variabilium versante, quam ad praesens institutum non satis commode applicare liceret; quamobrem hic aliam methodum in medium sum allaturus, cuius beneficio ista integratio, qua indigemus, multo facilius et clarius institui poterit, et qua simul omnia, quae huc pertinent, haud mediocriter illustrabuntur.

§. 5. Cum sit $lx^m = mlx$, si littera e denotet numerum, cuius logarithmus hyperbolicus vnitati aequatur, posito breuitatis gratia $mlx = y$ erit $lx^m = y = yle$, hincque vicissim fiet $x^m = e^y = e^{mlx}$. Cum igitur per seriem notissimam sit

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{yy}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

erit pro nostro casu

$$x^m = 1 + \frac{mlx}{1} + \frac{mm}{1.2}(lx)^2 + \frac{m^3}{1.2.3}(lx)^3 + \frac{m^4}{1.2.3.4}(lx)^4 + \text{etc.}$$

hac igitur serie in vsum vocata erit

$$\frac{x^m}{lx} = \frac{1}{lx} + \frac{m}{1} + \frac{mm}{1.2}lx + \frac{m^3}{1.2.3}(lx)^2 + \frac{m^4}{1.2.3.4}(lx)^3 + \frac{m^5}{1.2.3.4.5}(lx)^4 + \text{etc.}$$

Huius igitur seriei singulos terminos in dx ductos integrari oportet, vnde quidem ex termino primo orietur formula $\int\frac{dx}{lx}$, cuius valorem, ab $x=0$ ad $x=1$ extensum, esse

infi-

infinitum ostendi, cuius loco hic vbique scribamus characterem Δ; tum vero ex termino secundo oritur integrale $\frac{0^m}{1} x = m$.

§. 6. Pro integralibus ex reliquis terminis oriundis ex elementis calculi integralis satis liquet, si integralia ab $x = 0$ ad $x = 1$ extendantur, fore vt sequitur:

$\int dx\, lx = -1$; $\int dx\,(lx)^2 = +1.2$; $\int dx\,(lx)^3 = -1.2.3$; $\int dx\,(lx)^4 = +1.2.3.4$; $\int dx\,(lx)^5 = -1.2.3.4.5$ etc.

his igitur valoribus substitutis reperiemus fore

$$\int \frac{x^m\,dx}{lx} = \Delta + m - \frac{mm}{2} + \frac{m^3}{3} - \frac{m^4}{4} + \frac{m^5}{5} + \frac{m^6}{6} + \frac{m^7}{7} - \text{etc.}$$

Ex doctrina autem logarithmorum constat esse

$$l(1+m) = m - \frac{mm}{2} + \frac{m^3}{3} - \frac{m^4}{4} + \text{etc.}$$

quo valore substituto habebimus

$$\int \frac{x^m\,dx}{lx} = \Delta + l(1+m)$$

qui ergo est valor huius formulae integralis a termino $x = 0$ ad $x = 1$ extensae, quos terminos in sequentibus semper subintelligi oportet, vnde eos non amplius commemorabimus.

§. 7. Iste quidem valor integralis insigni incommodo laborare videtur, propterea quod characterem Δ implicat, cuius valor non solum est incognitus, sed adeo infinitus; verum quia pro omnibus huiusmodi formulis perpetuo idem manet, ita vt sit

$$\int \frac{x^n\,dx}{lx} = \Delta + l(1+n)$$

euidens est, si harum formularum altera ab altera subtrahatur, istum characterem penitus ex calculo egredi, ac prodire $\int \frac{x^m - x^n}{lx}\,dx = l\frac{1+m}{1+n}$, qui est ille ipse casus, ad quem

pri-

primo initio sum perductus. Quo autem clarius appareat, quibusnam casibus iste character Δ penitus ex calculo sit excessurus, contemplemur hanc formam indefinitam:

$$X = A x^{\alpha} + B x^{\beta} + C x^{\gamma} + D x^{\delta} + E x^{\varepsilon} + \text{etc.}$$

ac per integrale illud inuentum erit

$$\int \frac{X\,dx}{lx} = A + B\,\Delta + C\,\Delta + D\,\Delta + \text{etc.}$$
$$+ A\,l(1+\alpha) + B\,l(1+\beta) + C\,l(1+\gamma) + D\,l(1+\delta) + \text{etc.}$$

Quocirca, si coefficientes A, B, C, D etc. ita fuerint comparati, vt sit $A + B + C + D + \text{etc.} = 0$, semper istud integrale ita exprimetur:

$$\int \frac{X\,dx}{lx} = A\,l(1+\alpha) + B\,l(1+\beta) + C\,l(1+\gamma) + D\,l(1+\delta) + \text{etc.}$$

perinde ac si formula canonica fuisset $\int \frac{x^m\,dx}{lx} = l(1+m)$, reiecto charactere Δ.

§. 8. Quoties igitur fuerit

$$X = A x^{\alpha} + B x^{\beta} + C x^{\gamma} + D x^{\delta} + \text{etc.}$$

existente $A + B + C + D + \text{etc.} = 0$, tum integrale $\int \frac{X\,dx}{lx}$, non amplius charactere Δ inquinabitur, atque singulas integrationes ita instituere licebit, quasi reuera foret

$$\int \frac{x^m\,dx}{lx} = l(1+m).$$

Cum igitur series $A + B + C + D + \text{etc.}$ exhibeat valorem ipsius X, si ponatur $x = 1$, manifestum est, istam integrationem perpetuo succedere, si X eiusmodi exprimat functionem ipsius x, vt posito $x = 1$ ea in nihilum abeat. Quare cum formula, quam hic tractare suscepimus

$$X = \frac{x^{a-1}(1-x^b)(1-x^c)}{1-x^n}$$

vti iam obseruauimus ad nihilum redigitur posito $x = 1$, eius integrationem rite absoluere licebit ope formulae canonicae $\int \frac{x^m\,dx}{lx} = l(1+m)$, nullo scilicet respectu habito ad characterem Δ initio introductum.

§. 9. Quoniam igitur iam ſupra perducti ſumus ad quatuor ſeries infinitas, quas per formulam $\frac{x^{n-1}dx}{lx}$ multiplicari, tum vero integrari oportet, ſi hanc operationem in ſingulis terminis inſtituamus, valor quaeſitus S per ſequentes quatuor ſeries infinitas expreſſus reperietur:

$$S=\begin{cases}\text{I. } la+l(a+n)+l(a+2n)+l(a+3n)+l(a+4n)+\text{etc.}\\ \text{II. } -l(a+b)-l(a+b+n)-l(a+b+2n)-l(a+b+3n)\\ \qquad -l(a+b+4n)-\text{etc.}\\ \text{III. } -l(a+c)-l(a+c+n)-l(a+c+2n)-l(a+c+3n)\\ \qquad -l(a+c+4n)-\text{etc.}\\ \text{IV. } l(a+b+c)+l(a+b+c+n)+l(a+b+c+2n)+l(a+b+c+3n)\\ \qquad +l(a+b+c+4n)+\text{etc.}\end{cases}$$

Hoc igitur modo tota quaeſtio huc eſt reducta, vt expreſſiones finitae inueſtigentur, quae iſtis logarithmorum ſeriebus infinitis ſint aequales.

§. 10. Cum igitur valor quaeſitus S infinitis logarithmis aequalis ſit inuentus; eum ipſum tanquam logarithmum ſpectari conueniet; quamobrem ſtatuamus $S=lO$ atque a logarithmis ad numeros regrediendo valor ipſius O ſequenti modo per factores exprimi deprehendetur:

$$O=\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}\cdot\frac{(a+n)(a+b+c+n)}{(a+b+n)(a+c+n)}\cdot\frac{(a+2n)(a+b+c+2n)}{(a+b+2n)(a+c+2n)}\cdot\frac{(a+3n)(a+b+c+3n)}{(a+b+3n)(a+c+3n)}\text{ etc.}$$

quam expreſſionem in membra puncto ſeparata diſtinximus, quorum quodlibet continet binos factores in numeratore, totidemque in denominatore, qui factores in ſingulis membris ita ſunt comparati, vt ſumma factorum numeratoris ſemper aequalis ſit ſummae factorum denominatoris. Praeterea vero notetur, ſumendo i pro numero infinito membrum infiniteſimum eſſe $\frac{(a+in)(a+b+c+in)}{(a+b+in)(a+c+in)}$, quod euolutum praebet $\frac{a(a+b+c)+in(2a+b+c)+iinn}{(a+b)(a+c)+in(2a+b+c)+iinn}$, cuius valor ob partes primas finitas euaneſcentes manifeſto vnitati aequatur;

erit, vnde intelligitur, hanc expressionem valorem finitum ac determinatum esse habituram, et quo plura membra in se inuicem ducantur, eo propius continuo ad valorem istius O appropinquatum iri, quandoquidem membra ista remota continuo minus ab vnitate discrepant.

§. 11. Vt nunc in verum valorem litterae O inquiramus, in subsidium vocemus insigne Lemma, cuius veritatem iam in calculo integrali fusius demonstraui, quod ita se habet: Si ponatur

$$P = \int x^{p-1} dx (1 - x^n)^{\frac{m-n}{n}} \text{ et}$$

$$Q = \int x^{q-1} dx (1 - x^n)^{\frac{m-n}{n}}$$

tum erit

$$\frac{P}{Q} = \frac{(m+p)q}{p(m+q)} \cdot \frac{(m+p+n)(q+n)}{(p+n)(m+q+n)} \cdot \frac{(m+p+2n)(q+2n)}{(p+2n)(m+q+2n)} \cdot \frac{(m+p+3n)(q+3n)}{(p+3n)(m+q+3n)} \text{ etc.}$$

quae expressio pariter ex infinitis membris constat, in quorum singulis tam numerator quam denominator etiam binis factoribus constat, prorsus vti nostra expressio pro O inuenta, vnde haud difficulter litterae p, q et m ita definiri poterunt, vt prodeat $O = \frac{P}{Q}$, si quidem littera n vtrinque eundem significatum retinet, hocque modo valor litterae O saltem ad formulas integrales ordinarias P et Q reducetur. Hic autem probe est recordandum, singulas litteras p, q, m et n numeros positiuos designare debere, id quod etiam de nostris litteris a, b et c est tenendum, quandoquidem formula nostra canonica $\int \frac{x^m dx}{lx} = l(1+m)$ cum veritate consistere nequit, nisi $1+m$ fuerit numerus positiuus, quia alioquin logarithmi numerorum negatiuorum hic prodeuntes forent imaginarii.

§. 12. Ad hanc conformitatem $\frac{P}{Q}$ et O constituendam sufficiet membra prima, quae sunt $\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}$ et $\frac{(m+p)q}{p(m+q)}$, ad

iden-

identitatem perduxisse, propterea quod deinceps omnia sequentia membra sponte inter se conuenient. Ista autem identitas duplici modo obtineri poterit: sumto enim $q=a$ vel statui poterit $m+q=a+b$ vel $m+q=a+c$, ita vt priori modo sit $m=b$, posteriori vero modo $m=c$; at vero tum pro priori modo erit $p=a+c$, vnde sponte fiet $m+p=a+b+c$; pro posteriori vero modo, quo $m=c$, sumi debet $p=a+b$, vnde denuo sponte fit $m+p=a+b+c$; quam ob rem hinc geminos valores pro p et q nanciscemur, vnde etiam geminae solutiones orientur, quae sunt:

$$\text{I. Solutio}\begin{cases} P=\int x^{a+c-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{b-n}{n}} \\ Q=\int x^{a-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{b-n}{n}} \end{cases}$$

$$\text{II. Solutio}\begin{cases} P=\int x^{a+b-1}\,dx\,(1-x)^{\frac{c-n}{n}} \\ Q=\int x^{a-1}\,dx\,(1-x)^{\frac{c-n}{n}} \end{cases}$$

vtrinque enim erit $O=\frac{P}{Q}$, et cum sit $S=lO$, erit $S=lP-lQ$ sicque valorem ipsius S per formulas finitas expressum invenimus.

§. 13. Circa valores autem litterarum p et q duos casus imprimis memorabiles notari conuenit, quibus eos adeo absolute exhibere licet: alter enim praebet

$$\text{I. } \int x^{n-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}=\frac{1}{m}$$

alter vero in hoc consistit vt sit

$$\text{II. } \int x^{n-m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}=\frac{\pi}{n\,\text{sin.}\,\frac{m\pi}{n}}$$

vbi π denotat 180°, siue semiperipheriam circuli, cuius radius $=1$. Quare cum pro nostra solutione priore sit $m=b$

$n=b$, videamus, vtrum p et q ad iſtos valores abſolutos reducere liceat. Hoc autem euenit quando $b=c$ et inſuper $a=n-b$, quo caſu ambae ſolutiones inter ſe congruent, quem ergo caſum ſeorſim euoluiſſe operae pretium erit.

Euolutio caſus quo $c=b$ et $a=n-b$.

§. 14. Hoc igitur caſu erit formula propoſita

$$S=\int\frac{x^{n-b-1}\,dx}{lx}\cdot\frac{(1-x^b)}{1-x^n}$$

cum vero vidimus eſſe

$$P=\int x^{n-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{b-n}{n}}=\tfrac{1}{b}\text{ et}$$

$$Q=\int x^{n-b-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{b-n}{n}}=\frac{\pi}{n\,\text{ſin.}\frac{b\pi}{n}}$$

quam ob rem, cum ſit $S=lP-lQ=l\frac{P}{Q}$, erit his valoribus ſubſtitutis $S=l\frac{n\,\text{ſin.}\frac{b\pi}{n}}{b\,\pi}$, vbi euidens eſt eſſe debere $b<n$, vnde ſequentia exempla conſideraſſe iuuabit.

Exemplum I. quo $b=1$ et $n=2$.

§. 15. Hoc ergo caſu erit ſin. $\frac{b\pi}{n}=1$, hincque $S=l\frac{2}{\pi}$, quam ob rem, ſi formula propoſita fuerit $S=\int\frac{dx}{lx}\cdot\frac{(1-x)}{1+x}$; erit $S=l\frac{2}{\pi}$; at vero valorem ipſius S per logarithmos euoluendo, vti ſupra fecimus, ob $a=1$; $b=c=1$ et $n=2$ prodibit

$$S=\begin{cases} l1+l3+l5+l7+l9+l11+\text{etc.}\\ -2l2-2l4-l2l6-2l8-2l10-\text{etc.}\\ +l3+l5+l7+l9+l11+l12+\text{etc.}\end{cases}$$

quibus in ordinem redactis erit

$$S=l1-2l2+2l3-2l4+2l5-2l6+2l7-2l8+2l9\text{ etc.}$$

§. 16. Vicissim igitur, si proponatur ista series logarithmorum $s = l\,1 - l\,2 + l\,3 - l\,4 + l\,5 - l\,6 + l\,7$ etc. eius summa assignari poterit. Cum enim sit $S - 2s = l\,1 = 0$, ob $S = l\frac{2}{\pi}$ erit $s = \frac{1}{2}l\frac{2}{\pi} = l\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; siue cum sit $\pi > 2$ erit $s = -l\sqrt{\frac{\pi}{2}}$: ista scilicet summa s erit negatiua.

Exemplum II. quo $b = 1$ et $n = 3$.

§. 17. Hoc igitur casu, quo $a = 2$, formula integranda proposita erit

$$S = \int\frac{x\,dx}{lx}\cdot\frac{(1-x)^2}{1-x^3} = \int\frac{x\,dx}{lx}\cdot\frac{1-x}{1+x+xx},$$

deinde cum sit $\sin.\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, valor quaesitus erit $S = l\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$; at vero idem valor S per seriem logarithmorum expressus ob $a = 2$; $b = c = 1$ et $n = 3$ erit

$$S = \begin{cases} l\,2 + l\,5 + l\,8 + l\,11 + l\,14 + l\,17 + \text{etc.} \\ -2l\,3 - 2l\,6 - 2l\,9 - 2l\,12 - 2l\,15 - \text{etc.} \\ +l\,4 + l\,7 + l\,10 + l\,13 + l\,16 + l\,19 + \text{etc.} \end{cases}$$

sicque ergo erit

$$S = l\,2 - 2l\,3 + l\,4 + l\,5 - 2l\,6 + l\,7 + l\,8 - 2l\,9 + l\,10 + l\,11 - 2l\,12 + l\,13 + l\,14 \text{ etc.}$$

cuius ergo seriei satis regularis summa est $S = l\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

Exemplum III. quo $b = 2$ et $n = 3$.

§. 18. Hoc igitur casu erit $a = 1$ et formula nostra integralis fiet

$$S = \int\frac{dx}{lx}\cdot\frac{(1-xx)^2}{1-x^3} = \int\frac{dx}{lx}\cdot\frac{(1-x)(1+x)^2}{1+x+xx},$$

cuius ergo valor erit $S = l\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; at vero idem valor S per seriem logarithmorum expressus ob $a = 1$, $b = c = 2$ et $n = 3$ erit

$$S = \begin{cases} l\,1 + l\,4 + l\,7 + l\,10 + l\,13 + \text{etc.} \\ -2l\,3 - 2l\,6 - 2l\,9 - 2l\,12 - \text{etc.} \\ +l\,5 + l\,8 + l\,11 + l\,14 + \text{etc.} \end{cases}$$

sichincque ergo erit

$$S = l1 - 2l3 + l4 + l5 - 2l6 + l7 + l8 - 2l9 + l10 + l11 - \text{etc.}$$

cuius seriei summa est $S = l\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$, vnde cum sit $S = l\frac{P}{Q}$ erit

$$\frac{P}{Q} = \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{5.7}{6.6} \cdot \frac{8.10}{9.9} \cdot \frac{11.13}{12.12} \text{ etc.}$$

cuius ergo valor erit $= \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Exemplum VI. quo $b = 1$ et $n = 4$.

§. 19. Hinc ergo ob $a = 3$ formula nostra integralis erit

$$S = \int \frac{xx\,dx}{lx} \cdot \frac{(1-x)^2}{1-x^4} = \int \frac{xx\,dx}{lx} \cdot \frac{1-x}{(1+x)(1+xx)}$$

cuius ergo valor erit $= l\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$, at vero idem valor per seriem logarithmorum ob $a = 2$, $b = c = 1$ et $n = 4$ hoc modo exprimetur:

$$S = \begin{cases} l3 + l7 + l11 + l15 + \text{etc.} \\ -2l4 - 2l8 - 2l12 - \text{etc.} \\ +l5 + l9 + l13 + \text{etc.} \end{cases}$$

hincque ergo erit

$$\frac{P}{Q} = \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{7.9}{8.8} \cdot \frac{11.13}{12.12} \text{ etc.} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

Exemplum V. quo $b = 3$ et $n = 4$.

§. 20. Hoc ergo casu erit $a = 1$, et formula nostra integralis fiet $S = \int \frac{dx}{lx} \cdot \frac{(1-x)^2}{1-x^4}$, cuius valor erit $S = l\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}$ qui etiam hoc modo per seriem logarithmorum exprimetur:

$$S = \begin{cases} l1 + l5 + l9 + l13 + l17 + \text{etc.} \\ -2l4 - 2l8 - 2l12 - 2l16 - \text{etc.} \\ +l7 + l11 + l15 + l19 + \text{etc.} \end{cases}$$

hinc ergo fiet

$$\frac{P}{Q} = \frac{1.7}{4.4} \cdot \frac{5.11}{8.8} \cdot \frac{9.15}{12.12} \cdot \frac{13.19}{16.16} \text{ etc.} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}.$$

§. 21.

§. 21. Praeter hos autem casus, quibus ambas formulas P et Q simul integrationem admittere obseruauimus, pro certo affirmare licet, nullos alios insuper dari, quibus hoc eueniat. Interim tamen dantur innumerabiles alii casus, quibus valor nostrae formulae integralis S absolute sine formulis integralibus assignari potest, etiamsi neutra formularum P et Q seorsim integrari queat, qui casus cum per se sint notatu dignissimi, iis inuestigandis sequens problema destinemus.

Problema.

Inuestigare casus, quibus formulae integralis propositae valorem S absolute sine formulis integralibus exprimere licet.

Solutio.

§. 22. Totum ergo negotium huc redit, vt eiusmodi relationes inter exponentes a, b, c et n eruantur, quibus fractio supra adhibita $\frac{P}{Q}$ absolute exprimi queat, quamuis neutra harum formularum seorsim integrationem admittat; tum enim formulae propositae valor quaesitus erit $S = l\frac{P}{Q}$. Verum istam fractionem $\frac{P}{Q}$ vidimus designare istud productum in infinitum excurrens

$$\frac{P}{Q} = \frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)} \cdot \frac{(a+n)(a+b+c+n)}{(a+b+n)(a+c+n)} \cdot \frac{(a+2n)(a+b+c+2n)}{(a+b+2n)(a+c+2n)} \text{ etc.}$$

§. 23. Nunc vero meminisse iuuabit, tam sinus quam cosinus angulorum per huiusmodi producta infinita exprimi solere; cum enim sit

$$\text{sin.} \frac{p\pi}{2r} = \frac{p\pi}{2r} \cdot \frac{4rr-pp}{4rr} \cdot \frac{16rr-pp}{16rr} \cdot \frac{36rr-pp}{36rr} \text{ etc.}$$

erit duabus huiusmodi expressionibus combinandis

$$\frac{\text{sin.} \frac{p\pi}{2r}}{\text{sin.} \frac{q\pi}{2r}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{4rr-pp}{4rr-qq} \cdot \frac{16rr-pp}{16rr-qq} \cdot \frac{36rr-pp}{36rr-qq} \cdot \frac{64rr-pp}{64rr-qq} \text{ etc.}$$

Quare si superior expressio pro $\frac{P}{Q}$ inuenta ad hanc formam reuo-

reuocari queat, tum vtique erit

$$S = l\,\text{fin.}\,\frac{p\pi}{2r} - l\,\text{fin.}\,\frac{q\pi}{2r}.$$

Quo autem ista reductio facilius fuccedat, posteriorem expreffionem hac forma repraefentemus:

$$\frac{\text{fin.}\frac{p\pi}{2r}}{\text{fin.}\frac{q\pi}{2r}} = \frac{p(2r-p)}{q(2r-q)} \cdot \frac{(2r+p)(4r-p)}{(2r+q)(4r-q)} \cdot \frac{(4r+p)(6r-p)}{(4r+p)(6r-q)} \text{ etc.}$$

cuius expreffionis membra manifefto ita progrediuntur, vt finguli factores tam numeratorum quam denominatorum continuo eodem incremento $2r$ augeantur. Quare cum in expreffione $\frac{P}{Q}$ finguli factores capiant incrementum n, ftatui debebit $n = 2r$, quo notato fufficiet prima membra ad conformitatem redigere, id quod eueniet fumendo $a = p$; $a + b + c = 2r - p$; $a + b = q$; $a + c = 2r - q$ vnde fingulae litterae colliguntur

1°. $a = p$; 2°. $b = q - p$; 3°. $c = 2r - p - q$

exiftente $n = 2r$. Hinc autem operae pretium erit notaffe, fore $2a + b + c = 2r = n$; ita vt formula noftra generalis ad cafum hunc femper accommodari queat, fi modo fuerit $n = 2a + b + c$: tum enim fit $p = a$; $q = a + b$ et $2r = 2a + b + c$.

§. 24. Quodfi vero formula noftra generalis euoluatur ac loco n fcribatur ifte valor $2a + b + c$, ea induet hanc formam:

$$S = \int \frac{dx}{x\,lx} \cdot \left(\frac{x^a - x^{a+b} - x^{a+c} + x^{a+b+c}}{1 - x^{2a+b+c}}\right)$$

cuius ergo valor fi loco p, q et r modo inuenti valores fcribantur, erit

$$S = l\frac{P}{Q} = l\,\text{fin.}\,\frac{a\pi}{2a+b+c} - l\,\text{fin.}\,\frac{(a+b)\pi}{2a+b+c}$$

quae formula vtique ita eft abfoluta, vt nullam amplius formulam integralem inuoluat, prorfus vti defideratur. Patet igitur casum ante tractatum in hoc casu non continerit: cum enim in illo fuisset $a = n - b$ et $c = b$, hinc fiet $2a + b + c = 2n$, cum praesenti casu sit $2a + b + c = n$.

§. 25. Quodsi iam in hac expressione litteras p, q et r in calculum introducamus, formula nostra integralis ad hanc speciem reducetur:

$$S = \int \frac{dx}{x\,l\,x} \cdot \frac{x^p - x^q - x^{2r-q} + x^{2r-p}}{1 - x^{2r}}$$

cuius igitur valor ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensus erit

$$S = l\,\text{sin.}\frac{p\pi}{2r} - l\,\text{sin.}\frac{q\pi}{2r}$$

vbi manifestum est, hanc expressionem eandem manere, etiamsi loco p scribatur $2r - p$, loco q vero $2r - q$ propterea quod

$$\text{sin.}\frac{(2r-p)\pi}{2r} = \text{sin.}\frac{p\pi}{2r} \text{ et sin.}\frac{(2r-q)\pi}{2r} = \text{sin.}\frac{q\pi}{2r}$$

at vero ipsa formula integralis, facta siue alterutra substitutione, siue vtraque coniunctim, prorsus non variatur.

§. 26. Quodsi loco p et q scribamus $r - p$ et $r - q$ illi sinus transmutantur in cosinus; tum autem ipsa formula integralis erit

$$S = \int \frac{dx}{x\,l\,x} \cdot \frac{x^{r-p} - x^{r-q} - x^{r+q} + x^{r+p}}{1 - x^{2r}}$$

cuius valor nunc erit $= l\,\text{cos.}\frac{p\pi}{2r} - l\,\text{cos.}\frac{q\pi}{2r}$, vbi iterum manifestum est, nullam mutationem oriri, siue litterae p et q valores habeant positiuos siue negatiuos.

Corollarium I.

§. 27. Cum igitur his casibus neutra formularum integralium P et Q integrationem actu admittat, eo magis notatu dignum hic occurrit, quod nihilo minus valor fractionis $\frac{P}{Q}$ absolute exprimi possit, cum per sinus f

$\frac{P}{Q} = \frac{\text{fin.}\,\frac{p\pi}{2r}}{\text{fin.}\,\frac{q\pi}{2r}}$. Cum igitur hoc casu sit $a = p$; $b = q - p$; $c = 2r - p - q$ et $n = 2r$ valores, integrales pro P et Q supra § 12. exhibiti in sequentes abibunt formas:

$$P = \int \frac{x^{2r-q-1}\,dx}{(1 - x^{2r})^{1 + \frac{p-q}{2r}}} \text{ et}$$

$$Q = \int \frac{x^{p-1}\,dx}{(1 - x^{2r})^{1 + \frac{p-q}{2r}}}.$$

Quicunque ergo valores exponentibus tribuantur, semper erit $\frac{P}{Q} = \frac{\text{fin.}\,\frac{p\pi}{2r}}{\text{fin.}\,\frac{q\pi}{2r}}$.

Corollarium II.

§. 28. Quoniam hic loco p et q scribere licet $2r - p$ et $2r - q$, hinc quaternas formulas integrales exhibere possumus, ita vt pro singulis sit $\frac{P}{Q} = \frac{\text{fin.}\,\frac{p\pi}{2r}}{\text{fin.}\,\frac{q\pi}{2r}}$, qui quaterni valores ita se habebunt:

$$\text{I. } P = \int \frac{x^{2r-q-1}\,dx}{(1 - x^{2r})^{1 + \frac{p-q}{2r}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{p-1}\,dx}{(1 - x^{2r})^{1 + \frac{p-q}{2r}}}$$

$$\text{II. } P = \int \frac{x^{2r-q-1}\,dx}{(1 - x^{2r})^{2 - \frac{p-q}{2r}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{2r-p-1}\,dx}{(1 - x^{2r})^{2 - \frac{p-q}{2r}}}$$

$$\text{III. } P = \int \frac{x^{q-1}\,dx}{(1 - x^{2r})^{\frac{p+q}{2r}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{p-1}\,dx}{(1 - x^{2r})^{\frac{p+q}{2r}}}$$

$$\text{IV. } P = \int \frac{x^{q-1}\,dx}{(1 - x^{2r})^{1 + \frac{q-p}{2r}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{2r-p-1}\,dx}{(1 - x^{2r})^{1 + \frac{q-p}{2r}}}.$$

Corollarium III.

§. 29. Quodsi hic loco p et q scribamus $r-p$ et $r-q$, quo pacto sinus in cosinus transmutantur, quaternas impetrabimus formulas integrales pro P et Q, ita comparatas, vt pro omnibus sit $\frac{P}{Q} = \frac{\operatorname{cos.} \frac{p\pi}{2r}}{\operatorname{cos.} \frac{q\pi}{2r}}$, qui quaterni valores erunt:

$$\text{I. } P = \int \frac{x^{r+q-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{q-p}{2r}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{r-p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{q-p}{2r}}}$$

$$\text{II. } P = \int \frac{x^{r+q-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p+q}{2r}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{r+p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p+q}{2r}}}$$

$$\text{III. } P = \int \frac{x^{r-q-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1-\frac{p-q}{2r}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{r-p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1-\frac{p-q}{2r}}}$$

$$\text{IV. } P = \int \frac{x^{r-q-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p-q}{2r}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{r+p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p-q}{2r}}}.$$

quae quaternae formulae tam pulchre inter se conspirant, vt aliter non discrepent, nisi ratione signorum, quibus litterae P et Q sunt affectae.

Corollarium IV.

§. 30. Hae autem formulae prorsus sunt diuersae ab illis quas supra in euolutione §. 14. habuimus, vbi erat $\frac{P}{Q} = \frac{n \operatorname{sin.} \frac{b\pi}{n}}{b\pi}$, quod discrimen quo clarius ob oculos ponatur, loco b et n scribamus p et $2r$, vt fiat $\frac{P}{Q} = \frac{2r \operatorname{sin.} \frac{p\pi}{2r}}{p\pi}$; tum autem fit

$P = \int$

$$P=\int\frac{x^{2r-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1-\frac{p}{2r}}} \text{ et } Q=\int\frac{x^{2r-p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1-\frac{p}{2r}}}$$

quae formulae actu integrationem admittent, dum colligitur

$$P=\frac{1}{p} \text{ et } Q=\frac{\pi}{2r\,\text{fin.}\frac{p\pi}{2r}}.$$

Corollarium V.

§. 31. Quodfi in formulis penultimi corollarii capiamus $q=0$, vt fiat $\frac{P}{Q}=\text{cof.}\frac{p\pi}{2r}$, binas tantum pro hoc cafu diuerfas formulas pro P et Q nancifcemur, quae funt:

$$\text{I. } P=\int\frac{x^{r-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1-\frac{p}{2r}}} \text{ et } Q=\int\frac{x^{r-p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1-\frac{p}{2r}}}$$

$$\text{II. } P=\int\frac{x^{r-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p}{2r}}} \text{ et } Q=\int\frac{x^{r+p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{1+\frac{p}{2r}}}.$$

Sin autem in formulis antepenultimi corollarii ftatuamus $q=r$, vt prodeat $\frac{P}{Q}=\text{fin.}\frac{p\pi}{2r}$, iterum prodibunt binae formulae pro P et Q, quae funt:

$$\text{I. } P=\int\frac{x^{r-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2}+\frac{p}{2r}}} \text{ et } Q=\int\frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2}+\frac{p}{2r}}}$$

$$\text{II. } P=\int\frac{x^{r-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2}-\frac{p}{2r}}} \text{ et } Q=\int\frac{x^{2r-p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2}+\frac{p}{2r}}}.$$

Corollarium VI.

§. 32. Quodfi in formulis Corollarii II. ftatuamus $q=r-p$, vt fiat $\text{fin.}\frac{q\pi}{2r}=\text{cof.}\frac{p\pi}{2r}$, habebitur $\frac{P}{Q}=\text{tang.}\frac{p\pi}{2r}$ et

qua-

quaterni valores pro formulis P et Q erunt

$$\text{I. } P = \int \frac{x^{r+p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2}+\frac{p}{r}}} \quad \text{et} \quad Q = \int \frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2}+\frac{p}{r}}}$$

$$\text{II. } P = \int \frac{x^{r+p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad Q = \int \frac{x^{2r-p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{III. } P = \int \frac{x^{r-p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad Q = \int \frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{IV. } P = \int \frac{x^{r-p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{3}{2}-\frac{p}{r}}} \quad \text{et} \quad Q = \int \frac{x^{2r-p-1}\,dx}{(1-x^{2r})^{\frac{3}{2}-\frac{p}{r}}}.$$

Corollarium VII.

§. 33. Plurimum autem etiam intererit nosse, ipsam formulam integralem S pro his casibus, quibus fit simpliciter vel $\frac{P}{Q} = \text{cos.}\,\frac{p\pi}{2r}$, vel $\frac{P}{Q} = \text{sin.}\,\frac{p\pi}{2r}$ vel, $\frac{P}{Q} = \text{tang.}\,\frac{p\pi}{2r}$, fieri, pro primo:

$$S = \int \frac{dx}{x\,l\,x} \cdot \frac{x^{r-p} - 2\,x^{r} + x^{r+p}}{1-x^{2r}} = l\,\text{cos.}\,\frac{p\,\pi}{2\,r}$$

pro secundo casu:

$$S = \int \frac{dx}{x\,l\,x} \cdot \frac{x^{p} - 2\,x^{r} + x^{2r-p}}{1-x^{2r}} = l\,\text{sin.}\,\frac{p\,\pi}{2\,r}$$

pro tertio autem casu:

$$S = \int \frac{dx}{x\,l\,x} \cdot \frac{x^{p} - x^{r-p} - x^{r+p} + x^{2r-p}}{1-x^{2r}} = l\,\text{tang.}\,\frac{p\,\pi}{2\,r}$$

quae postrema formula reducitur ad hanc:

$$\int \frac{dx}{x\,l\,x} \cdot \frac{x^{p} - x^{r-p}}{1+x^{r}} = l\,\text{tang.}\,\frac{p\,\pi}{2\,r}$$

quae est eadem integratio, quam non ita pridem ex diversissimis principiis elicueram.

Scho-

Scholion.

§. 134. Postremo autem circa omnes has varias formulas integrales probe notetur, eas, in quibus exponens denominatoris reperitur vnitate maior, vtpote incongruas reiiciendas esse; propterea quod earum valores integrati posito $x = 1$ euadant infiniti, quod quidem, cum in vtraque formula P et Q simul eueniat, non impedit, quo minus fractio $\frac{P}{Q}$ assignatum obtineat valorem; sed quia eum hinc definire non licet, etiam istiusmodi formulae optatum vsum non praestant. Commode autem euenit, vt plures formulae adsint, ex quibus valorem verum deriuare liceat.

NOVAE