1778

De figura quam ventus fluido stagnanti inducere valet

Leonhard Euler

DE FIGVRA QVAM VENTVS FLVIDO STAGNANTI INDVCERE VALET.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Quam diu tam superficies fluidi quam directio venti perfecte est horizontalis, nullum est dubium, quin fluidum in hoc statu persistere queat; quando autem a vi quacunque de hoc statu fuerit perturbatum, utique fieri poterit, ut fluidum etiam extra statum libellae a vento in aequilibrio conseruari possit. Cuiusmodi igitur figura his casibus fluido a vento induci debeat, hic definire constitui.

Tab. II. Fig. 4. §. 2. Repraesentet igitur super axe horizontali OB curua AYB figuram, in qua fluidum ab actione venti, secundum directionem horizontalem VY impingentis, in quiete persistere possit, atque super recta verticali AO capiatur abscissa $AX = x$, cui respondeat applicata $XY = y$ et arcus $AY = s$ sitque punctum A in superficie fluidi maxime eleuatum; vnde, quia fluidum in aequilibrio consistere assumitur, eius pressio in elementum $Yy = ds$ debita erit altitudini $AX = x$, ipsa vero pressionis quantitas $= x\,ds$, siue aequabitur ponderi, quod habitura esset columna eiusdem fluidi basi ds insistentis, cuius altitudo foret $= x$; huius vero pressionis directio erit recta Yu normalis ad ipsam curuam in puncto Y.

§. 3. Ponatur nunc venti celeritas $= c$, ita vt c sit spatium, quod ventus singulis minutis secundis percurrat, cuius ergo

ergo directio V Y in elementum $Yy = ds$ incidit sub angulo VYy, cuius sinus est $= \frac{dx}{ds}$. Quod si iam g denotet altitudinem lapsus grauium vno minuto secundo, ista venti celeritas debita erit altitudini $\frac{cc}{4g}$. Vnde si ventus directe in elementum Yy impingeret, eius vis aequalis foret ponderi columnae aëreae, cuius basis $= ds$, altitudo vero $= \frac{cc}{4g}$; quare si grauitas specifica fluidi fuerit ad aërem vt n ad 1, pondus istius columnae, ad massam fluidi reductum, erit $= \frac{cc\,ds}{4ng}$.

§. 4. Hoc modo se res haberet si ventus perpendiculariter incideret; quia autem sub angulo, cuius sinus $= \frac{dx}{ds}$, incidit, secundum opinionem vulgo receptam ista vis diminui debet in ratione quadrati sinus anguli incidentiae, ita vt tota vis venti futura esset $\frac{cc\,ds}{4ng} \cdot \frac{dx^2}{ds^2} = \frac{cc\,dx^2}{4ng\,ds}$, cuius directio erit recta Y N, pariter ad curuam normalis, sed intus directa; ex quo iam manifestum est, fluidum in aequilibrio consistere posse, si ista vis aequalis fuerit vi ante definitae, extrorsum secundum Yn sollicitanti; quam ob rem hinc oritur ista aequatio: $x\,ds = \frac{cc\,dx^2}{4ng\,ds}$; hacque aequatione determinabitur natura curuae A Y B, in qua fluidum ab actione venti conseruari poterit.

§. 5. Hinc igitur facile deducitur aequatio inter abscissam $AX = x$ et arcum $AY = s$, cum sit

$$x\,ds^2 = \frac{cc\,dx^2}{4ng}, \text{ hincque } ds = \frac{c\,dx}{2\sqrt{ngx}},$$

ideoque integrando $s = \frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{ng}}$, ita vt arcus A Y proportionalis sit radici quadratae ex abscissa; vnde patet, curuam hanc fore *cycloidem*. Sin autem applicatam $XY = y$ in calculum introducere velimus, ob $ds^2 = dx^2 + dy^2$, habebimus hanc aequationem: $dy = dx\sqrt{\frac{cc}{4ngx} - 1}$. Ponatur hic $\frac{cc}{4ng} = 2a$, vt fiat $dy = dx\sqrt{\frac{2a - x}{x}}$, siue $dy = \frac{dx(2a - x)}{\sqrt{2ax - xx}}$,

cuius

cuius integrale est

$$y = \sqrt{2ax - xx} + \int \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax - xx}} \text{ siue}$$

$$y = \sqrt{2ax - xx} + a\,\text{A sin.} \frac{\sqrt{2ax - xx}}{a}$$

quae est notissima cycloidis proprietas.

§. 6. Quoniam hic littera a exprimit radium circuli genitoris istius cycloidis, eius tota altitudo erit $= 2a$. Quia igitur posuimus $2a = \frac{cc}{4ng}$, tota altitudo istius cycloidis erit $\frac{cc}{4ng}$; vnde, vt exemplum contemplemur, si celeritas venti singulis minutis secundis fuerit 32 pedum, existente $g = 16$ ped. et pro aqua capiatur $n = 800$, altitudo huius cycloidis erit $\frac{1}{50}$. Hic autem probe tenendum est, aquam in hoc situ consistere non posse, nisi a pariete firmo AO coërceatur, ne diffluere possit.

§. 7. Cum autem per experimenta nuper instituta compertum sit, actionem fluidorum eo magis a ratione dupplicata sinus anguli incidentiae recedere, quo minor fuerit iste angulus, ac tandem pro minimis angulis ad rationem simplicem proxime accedere, consideremus etiam hanc hypothesin, qua impulsio venti secundum YN fit $= \frac{ccdx}{4ngds}$, vnde nascitur ista aequatio: $n\,ds = \frac{ccdx}{4ng}$, siue $ds\frac{ccdx}{4ngc}$, ita vt $\frac{xds}{dx} = \frac{cc}{4ng}$, hoc est quantitas constans.

§. 8. Pro hac iam curua cognoscenda, per summitatem fluidi A ducatur horizontalis AD, ad quam ex Y agatur tangens YV, hincque ad XY perpendiculum TU et ex Y perpendiculum Yu, atque ob triangula TYA et Yyu similia erit ipsa tangens $\text{YT} = \frac{xds}{dx}$, quae ergo, cum aequetur quantitati constanti, indicat, hanc curuam esse *tractoriam*, quae oritur, si fili TY, cuius longitudo $= \frac{cc}{4ng}$, alter terminus T per horizontalem DA producitur, dum alteri termino Y alligatum est corpusculum, quod tardissime super plano protrahatur.

tur. Vnde patet, ipsum punctum summum A in infinitum sinistrorsum remoueri; initium ergo huius curuae erit B, vbi tangens BD est verticalis $= \frac{cc}{4ng}$.

§. 9. Quod si iam pro hac curua loco ds scribamus $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, aequatio prodit $x\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{cc}{4ng}dx = b\,dx$ posito $\frac{cc}{4ng} = b$, ita vt b exhibeat longitudinem fili protracti; vnde deducitur $dy = \frac{dx}{x}\sqrt{bb - xx}$, quae aequatio, posito $\sqrt{bb - xx} = z$, vt sit $xx = bb - zz$ et $\frac{dx}{x} = -\frac{zdz}{bb - zz}$, abit in hanc: $dy = -\frac{zzdz}{bb - zz} = dz - \frac{bbdz}{bb - zz}$, ergo integrando $y = z - \frac{1}{2}b\,l\frac{b + z}{b - z}$ consequenter

$$y = C + \sqrt{bb - xx} - \frac{1}{2}b\,l\frac{b + \sqrt{bb - xx}}{b - \sqrt{bb - xx}}.$$

Vnde patet, sumto $x = 0$, fore $y = C + b\,l\,\infty$, vnde intelligitur, punctum A sinistrorsum in infinitum elongari.

§. 10. Combinemus iam istas duas hypotheses ita, vt forsitan ad veritatem satis prope accedamus; posito nimirum angulo incidentiae $= \Phi$, statuamus impulsionem venti proportionalem esse huic formulae: $(1 - \alpha)\sin.\Phi^2 + \alpha\sin.\Phi$, vbi α sit fractio satis parua. Hinc enim, quando angulus Φ parum a recto discrepat, vt sit $\sin.\Phi = 1$, haec formula dabit 1. Sin autem angulus Φ fuerit valde paruus, vt $\sin.\Phi^2$ quasi euanescat prae $\sin.\Phi$, impulsio sequetur rationem simplicem $\alpha\sin.\Phi$. Quare cum nostro casu sit $\sin.\Phi = \frac{dx}{ds}$, vis a vento orta erit $\frac{cc\,ds}{4ng}\left((1 - \alpha)\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{\alpha\,dx}{ds}\right) = x\,ds$, vnde posito $\frac{cc}{4ng} = 2a$, aequatio nostra erit $\frac{x\,ds}{2a} = (1 - \alpha)\frac{dx^2}{ds} + \alpha\,dx$, ideoque $\frac{x\,ds^2}{2a} = (1 - \alpha)dx^2 + \alpha\,dx\,ds$, quae posito $ds = r\,dx$ abit in hanc: $\frac{rrx}{2a} = 1 - \alpha + \alpha r$, vnde deducitur $x = \frac{2a(1 - \alpha + \alpha r)}{rr}$. Quare cum sit $s = \int r\,dx = rx - \int x\,dr$, hinc habebimus $\int x\,dr = -2(1 - \alpha)\frac{a}{r} + 2\alpha a\,l\,r$, sicque abscissa x definitur per nouam variabilem r, per quam etiam arcus s ita exprimitur, vt sit $s = 2a\alpha + \frac{4a(1 - \alpha)}{r} - 2a\alpha\,l\,r$.

§. 11. Sin autem aequationem inter coordinatas x et y desideremus; ponamus $dy = p\,dx$ et ob $ds = dx\sqrt{1+pp}$ aequatio nostra erit $\frac{x(1+pp)}{2a} = 1 - \alpha + \alpha\sqrt{1+pp}$; vnde colligitur $x = \frac{2a(1-\alpha)}{1+pp} + \frac{2a\alpha}{\sqrt{1+pp}}$; tum vero erit

$$y = \int p\,dx = px - \int x\,dp.$$ Cum igitur sit

$$\int x\,dp = C + 2a(1-\alpha)\,\mathrm{A\,tag.}\,p + 2a\alpha\, l\, p + \sqrt{1+pp},$$

patet vtramque coordinatam x et y per eandem tertiam variabilem p exprimi.

§. 12. Ex praecedentibus autem patet, si fuerit $\alpha = 0$, curuam fore *Cycloidem*; sin autem $\alpha = 1$, tum prodire *Tractoriam*, ita vt curua, quam hic sumus adepti, medium quodpiam teneat inter Cycloidem et Tractoriam, cuius punctum summum erit vbi $p = \infty$; tum autem erit $x = 0$ et $y = -\infty$, quo ergo respectu nostra curua naturam tractoriae sequetur. At vero punctum imum ibi reperietur, vbi $p = 0$, quo casu fit $x = 2a = \frac{cc}{4ng}$ et $y = C$. Sicque haec curua omnino non multum abludet ab natura Tractoriae, statim atque α nihilo maiorem accipit valorem. Videtur autem huic litterae α eiusmodi valorem tribui posse, vt a veritate vix quicquam aberretur. Experimenta enim, quae hunc in finem sunt instituta docent, valorem ipsius α haud multum ab $\frac{1}{4}$ vel $\frac{1}{5}$ discrepare. Quanquam autem hic ab omni motu animum abstrahimus, tamen hinc haud obscure intelligitur, quomodo a vento aqua vltra libellam eleuari possit. Interim tamen vix sperandum videtur, vt ista Theoria insuper ad motum fluidi vnquam promoueri queat.

PHYSI-