1778

De proiectione geographica superficiei sphaericae

Leonhard Euler

DE PROIECTIONE GEOGRAPHICA SVPERFICIEI SPHAERICAE.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum in superiori dissertatione omnes plane modos possibiles expendissem, quibus superficies sphaerica in plano ita repraesentari potest, vt singulae portiones minimae per figuras similes exhibeantur: inde quidem statim mapparum hydrographicarum *Mercatoris* constructio pariter atque Hemisphaeriorum polarium se prodebat; quemadmodum autem ambo Hemisphaeria, superius scilicet et inferius, vti quidem hodie construi solent cum meis formulis cohaereant, vix patebat, cum tamen ista repraesentatio eadem proprietate sit praedita. Hanc obrem accuratius inquirere constitui, quomodo etiam hic repraesentandi modus cum formulis generalibus ibi datis egregie consentiat, ex iisque luculenter deriuari queat.

§. 2. Formulae autem generales, quas pro huiusmodi constructionibus erueram ita se habent, vt si loci cuiuspiam in Sphaera distantia a polo fuerit $= v$ eiusque longitudo a certo Meridiano fixe computata $= t$, id punctum in plano per binas coordinatas orthogonales x et y ita determinari debeat, vt sit

$$x = \Delta : (l(\cot.\tfrac{1}{2}v + t\sqrt{-1})) + \Delta : (l(\cot.\tfrac{1}{2}v - t\sqrt{-1}))$$

$$y\sqrt{-1} = \Delta : (l(\cot.\tfrac{1}{2}v + t\sqrt{-1})) - \Delta : (l(\cot.\tfrac{1}{2}v - t\sqrt{-1}))$$

quas formulas quoque ita exhibere licet, vt sit

$$x = \Delta (\cot.\tfrac{1}{2}v(\cos.t + \sqrt{-1}\sin.t) + \Delta (\cot.\tfrac{1}{2}v(\cos.t - \sqrt{-1}\sin.t)$$

et cum sit

$$\frac{1}{\cot.\tfrac{1}{2}v(\cos t \pm \sqrt{-1}\sin.t)} = \tang.\tfrac{1}{2}v(\cos.t \mp \sqrt{-1}\sin.t)$$

hae formulae etiam ita exhiberi possunt:

$$x = \Delta : (\tang.\tfrac{1}{2}v(\cos.t + \sqrt{-1}\sin.t)) + \Delta : (\tang.\tfrac{1}{2}v(\cos.t - \sqrt{-1}\sin.t))$$

$$y\sqrt{-1} = \Delta : (\tang.\tfrac{1}{2}v(\cos.t + \sqrt{-1}\sin.t)) - \Delta : (\tang.\tfrac{1}{2}v(\cos.t - \sqrt{-1}\sin.t))$$

 vbi

vbi manifestum est, ex prioribus formulis, si character indefinitus functionis Δ omittatur, priores formulas praebere mappas hydrographicas, postremas vero constructionem Haemisphaerii siue borealis siue australis.

§. 3. Quo nunc facilius appareat, quomodo etiam reliquae proiectiones eidem principio innixae ex nostris formulis deduci queant, rationem istius proiectionis, quae vulgo stereographica vocari solet hic accuratius euoluam. Hoc autem modo superficies Sphaerae in planum Sphaeram tangens ita proieci solet, quemadmodum a spectatore in puncto contactui opposito constituto secundum regulas Perspectiuae cerneretur. Tab. I. Fig. 5. Referat igitur circulus AMC Sphaeram, recta autem EF planum, quod Sphaeram in puncto C tangat; tum vero A sit punctum ipsi C oppositum in quo spectator sit constitutus. Iam sumto in Sphaera puncto quocunque M, si per id ex A producatur recta AMS, rectae EF occurrens in puncto F, erit S proiectio puncti M. Hinc si radius sphaerae ponatur $= 1$, vt sit diameter $AC = 2$, arcus vero CM statuatur $= z$, erit angulus $CAM = \frac{1}{2}z$, vnde fit interuallum

$$CS = 2\,\mathrm{tang.}\,\tfrac{1}{2}z = \frac{2\,\mathrm{fin.}\,z}{1+\mathrm{cof.}\,z} = 2\sqrt{\frac{1-\mathrm{cof.}\,z}{1+\mathrm{cof.}\,z}}.$$

§. 4. Si ad AC ex M ducatur normalis MP erit $MP = \mathrm{fin.}\,z$, ac si circulus circa axem AC conuerti concipiatur, punctum M describet circulum plano tangenti parallelum, cuius radius $= MP = \mathrm{fin.}\,z$, qui ergo super plano itidem circulo referetur, cuius radius $= CS = \mathrm{tag.}\,\frac{1}{2}z$, ita vt radius istius circuli in sphaera se habeat ad radium proiectionis, vt PM ad CS, hoc est vt $AP : AC$ vel vt AM ad AS. Anguli autem in circulo sphaerae radio CM descripto aequales erunt angulis in proiectione super plano.

§. 5. Nunc in sphaera concipiamus punctum m, ipsi M proximum, cui in proiectione respondeat punctum s, ita vt elemen-

elementum Mm exprimatur per spatiolum Ss, et quaeramus rationem inter haec duo elementa Mm et Ss. Ac primo quidem patet fore angulum $ASC = 90° - \frac{1}{2}z = AsC$. At vero anguli AMm mensura est semissis arcus AM, vnde erit angulus $AMm = 90° - \frac{1}{2}z$ ideoque aequalis angulo AsC; vnde sequitur triangulum $AMm \sim$ triangulo AsS, vnde erit $Mm:Ss = AM:AS$ hoc est $= AP:AC$; quae ergo ratio conuenit cum ea, quam inuenimus inter circulum in sphaera radio PM descriptum et circulum in plano radio CS descriptum; quamobrem haec ratio etiam aequalis erit ei, quam elementa similia in duobis his circulis inter se tenent. Atque hinc manifestum est, si in sphaera portio infinite parua circa elementum Mm descripta concipiatur, eius proiectionem ipsi fore similem, ita vt haec proiectio eidem legi sit adstricta, ex qua meas formulas generales elicueram.

§. 6. Referat vt ante circulus AGC sphaeram, cuius superficies proiicienda sit in planum EF, quod sphaeram in puncto C tangat, ac statuamus nunc alterum Terrae polum existere in puncto G. Vocemus arcum $CG = g$ et per praecedentia iste polus in plano exhibebitur in puncto H, vt sit $GH = 2 \text{ tag.} \frac{1}{2}g$. Iam vero consideremus punctum sphaerae quodcunque in M cuius distantia a polo sit $GM = v$, angulus vero $CGM = t$, qui ergo denotabit longitudinem loci M in Meridiano GC, atque ad triangulum sphaericum complendum ducatur arcus CM; quo facto, si in proiectione S sit punctum loco M respondens, erit $CS = 2 \text{ tag.} \frac{1}{2}CM$, angulus vero $ECS =$ angulo GCM. Ad locum igitur huius puncti S definiendum in triangulo sphaerico GCM quaeri oportet tam latus CM quam angulus GCM. Tab. I. Fig. 6.

§. 7. In triangulo autem sphaerico CGM dantur duo latera $CG = g$ et $GM = v$ cum angulo intercepto $CGM = t$, vnde per regulas Trigonometriae sphericae reperitur

$$\text{cof. } CM = \text{cof. } g \text{ cof. } v + \text{fin. } g \text{ fin. } v \text{ cof. } t$$

vnde

vnde cum fit

$$CS = 2 \text{ tag. } \tfrac{1}{2} CM = \frac{2 \sin. CM}{1 + \cos. CM} = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos. CM}{1 + \cos. CM}}$$

ex poſtrema formula ſtatim habemus

$$CS = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos. g \cos. v - \sin. g \sin. v \cos. t}{1 + \cos. g \cos. v + \sin. g \sin. v \cos. t}}.$$

Praeterea vero reperitur tag. $GCM = \frac{\sin. v \sin. t}{\cos. v \sin. g - \sin. v \cos. g \cos. t}$, quae ergo formula ſimul exprimit in proiectione tangentem anguli ECS.

§. 8. Nunc in proiectione ex puncto S ad rectam fixam EF, quippe in quam cadit polus H, ducamus perpendiculum SX, ac vocemus coordinatas $CX = x$ et $XS = y$; et cum ſit

$$CS = \frac{2 \sin. CM}{1 + \cos. CM} \text{ erit } x = \frac{2 \sin. CM \cos. GCM}{1 + \cos. CM} \text{ et } y = \frac{2 \sin. CM \sin. GCM}{1 + \cos. CM},$$

vnde patet fore

$$\frac{y}{x} = \text{tag. } GCM = \frac{\sin. v \sin. t}{\cos. v \sin. g - \cos. g \sin. v \cos. t}.$$

Praeterea vero ex iam inuentis erit

$$xx + yy = CS^2 = \frac{4(1 - \cos. g \cos. v - \sin. g \sin. v \cos. t)}{1 + \cos. g \cos. v + \sin. g \sin. v \cos. t}$$

ex quibus duabus aequationibus ambas coordinatas x et y ſeorſim definire licebit.

§. 9. Facilius autem earum valores directe ſequenti modo reperire licebit. Cum ſit

$$\sin. t : \sin. CM = \sin. GCM : \sin. v \text{ erit}$$

$$\sin. CM . \sin. GCM = \sin. t \sin. v,$$

quo valore introducto fiet

$$\text{tag. } GCM = \frac{\sin. CM . \sin. GCM}{\sin. g \cos. v - \cos. g \sin. v \cos. t} = \frac{\sin. GCM}{\cos. GCM}$$

vnde fit $\sin. CM \cos. GCM = \sin. g \cos. v - \cos. g \sin. v \cos. t$ ex quibus valoribus ſtatim colligimus

$$x = \frac{2(\sin. g \cos. v - \cos. g \sin. v \cos. t)}{1 + \cos. CM} \text{ et } y = \frac{2 \sin. t \sin. v}{1 + \cos. CM}.$$

Quia igitur inuenimus $\cos. CM = \cos. g \cos. v + \sin. g \sin. v \cos. t$ binas coordinatas x et y ita habebimus expreſſas

$$x = \frac{2(\sin. g \cos. v - \cos. g \sin. v \cos. t)}{1 + \cos. g \cos. v + \sin. g \sin. v \cos. t} \text{ et } y = \frac{2 \sin. t \sin. v}{1 + \cos. g \cos. v + \sin. g \sin. v \cos. t}.$$

§. 10.

§. 10. Quod ſi ergo hic ponamus $v = 0$, locus poli H in proiectione prodire debet; tum autem reperietur

$$x = \frac{2 \sin. g}{1 + \cos. g} = 2 \text{ tag. } \tfrac{1}{2} g = \text{C H}.$$

At vero fit $y = 0$. Hinc igitur etiam locum alterius poli in proiectione aſſignare poterimus, ponendo $v = 180^\circ$; tum autem reperietur $x = -\frac{2 \sin. g}{1 - \cos. g}$ et $y = 0$. Vnde ſi ex altera parte alter polus ſtatuatur in K, erit interuallum

$$\text{C K} = \frac{2 \sin. g}{1 - \cos. g} = 2 \cot. \tfrac{1}{2} g.$$

Tum vero ſi capiamus $\text{C E} = \text{C F} = 2$, erit E F diameter circuli, quo referetur Hemiſphaerium totum circa centrum C deſcriptum, cuius ergo diameter erit $\text{E F} = 4$, hoc eſt duplo maior quam diameter ſphaerae.

§. 11. Vt nunc in hac proiectione Aequatorem deſignemus, ſumamus $v = 90^\circ$, atque x et y fient coordinatae Aequatoris in proiectione; tum autem erit

$$x = \frac{2 \cos. g}{1 + \sin. g \cos. t} \text{ et } y = \frac{2 \sin. t}{1 + \sin. g \cos. t}.$$

Supra autem iam vidimus eſſe $x x + y y = \frac{4 (1 - \sin. g \cos. t)}{1 + \sin. g . \cos. t}$, hinc concludimus fore

$$\frac{x}{x x + y y} = \frac{\cos. g \cos. t}{2 (1 - \sin. g \cos. t)}, \text{ vnde fit } \cos. t = \frac{2 x}{2 x \sin. g - (x x + y y) \cos. g}$$

qui valor ſubſtitutus in aequatione pro x praebet

$$4 x \sin. g - (x x + y y) \cos. g = -4 \cos. g$$

vnde fit $x x + y y = \frac{4 (x \sin. g + \cos. g)}{\cos. g}$, vnde colligimus hanc aequationem: $y y + (2 \text{ tag. } g - x)^2 = \frac{4}{\cos. g^2}$. Hinc patet, Aequatorem in proiectione fore circulum radio $= \frac{2}{\cos. g}$ deſcriptum. Ad centrum autem huius circuli inueniendum capiatur interuallum $\text{C I} = 2 \text{ tag. } g$, vt fiat $\text{I X} = 2 \text{ tag. } g - x$, et cum fieri debeat $\text{X S}^2 + \text{I X}^2 = \frac{4}{\cos. g^2}$, patet fore $\text{I S} = \frac{2}{\cos. g}$ hoc eſt quantitati conſtanti. Erit ergo hoc ipſum punctum I centrum circuli Aequatorem referentis, exiſtente $\text{C I} = 2 \text{ tag. } g$. Quare ex

Tab. I. Fig. 6.

C erigatur perpendiculum $CD = 2$, et cum hinc fiat recta $ID = \frac{2}{\text{coſ.}\, g}$, patet Aequatorem deſcriptum iri, ſi ex centro I et radio ID circulus delineetur.

§. 12. Definiamus nunc quoque omnes circulos Aequatori parallelos in noſtra proiectione, atque vt calculos taedioſos euitemus ſtatuamus breuitatis gratia $a = 2\, \text{ſin.}\, g\, \text{coſ.}\, \alpha$, $b = 2\, \text{coſ.}\, g\, \text{ſin.}\, \alpha$, $c = 1 + \text{coſ.}\, g\, \text{coſ.}\, \alpha$ et $d = \text{ſin.}\, g\, \text{ſin.}\, \alpha$ et $e = 4 - 4\, \text{coſ.}\, g\, \text{coſ.}\, \alpha$, vbi α ſcripſimus loco v, vt diſtantia Paralleli a polo ſit $= \alpha$, quo facto noſtrae aequationes ita ſe habebunt: $x = \frac{a - b\, \text{coſ.}\, t}{c + d\, \text{coſ.}\, t}$ et $xx + yy = \frac{e - 4d\, \text{coſ.}\, t}{c + d\, \text{coſ.}\, t}$, ex quarum priore colligitur $\text{coſ.}\, t = \frac{a - cx}{b + dx}$, qui valor in altera ſubſtitutus praebet $xx + yy = \frac{d(e + 4c)x + be - 4ad}{bc + ad}$. Reſtitutis vero valoribus aſſumtis erit $xx + yy = \frac{4(x\, \text{ſin.}\, g + \text{coſ.}\, g - \text{coſ.}\, \alpha)}{\text{coſ.}\, g + \text{coſ.}\, \alpha}$, quae aequatio reducta ad hanc formam

$$yy + \left(\frac{2\, \text{ſin.}\, g}{\text{coſ.}\, g + \text{coſ.}\, \alpha} - x\right)^2 = \frac{4\, \text{ſin.}\, \alpha^2}{(\text{coſ.}\, g + \text{coſ.}\, \alpha)^2}$$

monſtrat, proiectionem Paralleli propoſiti eſſe circulum, cuius radius $= \frac{2\, \text{ſin.}\, \alpha}{\text{coſ.}\, g + \text{coſ.}\, \alpha}$, centrum autem in ipſo axe EF eſſe ſitum puta in puncto L ita vt ſit $CL = \frac{2\, \text{ſin.}\, g}{\text{coſ.}\, g + \text{coſ.}\, \alpha}$.

§. 13. Inueſtigemus nunc etiam proiectionem omnium
Tab. I. Meridianorum; ac primo quidem cum ſumto $t = 0$ ipſa recta
Fig. 6. HK referet Meridianum principalem, a quo reliquos computemus, ponamus declinationem Meridiani quaeſiti ab hoc principali eſſe $= \beta$, vt ſit $t = \beta$, et aequationes noſtrae erunt

$$x = \frac{2(\text{ſin.}\, g\, \text{coſ.}\, v - \text{coſ.}\, \beta\, \text{coſ.}\, g\, \text{ſin.}\, v)}{1 + \text{coſ.}\, g\, \text{coſ.}\, v + \text{coſ.}\, \beta\, \text{ſin.}\, g\, \text{ſin.}\, v}$$

$$y = \frac{2\, \text{ſin.}\, \beta\, \text{ſin.}\, v}{1 + \text{coſ.}\, g\, \text{coſ.}\, v + \text{coſ.}\, \beta\, \text{ſin.}\, g\, \text{ſin.}\, v} \quad \text{et}$$

$$xx + yy = \frac{4(1 - \text{coſ.}\, g\, \text{coſ.}\, v - \text{coſ.}\, \beta\, \text{ſin.}\, g\, \text{ſin.}\, v)}{1 + \text{coſ.}\, g\, \text{coſ.}\, v + \text{coſ.}\, \beta\, \text{ſin.}\, g\, \text{ſin.}\, v}$$

ex quibus aequationibus quantitatem v eliminare oportet. Hunc in finem conſideremus formulam

$$\frac{y}{x} = \frac{\text{ſin.}\, \beta\, \text{ſin.}\, v}{\text{ſin.}\, g\, \text{coſ.}\, v - \text{coſ.}\, \beta\, \text{coſ.}\, g\, \text{ſin.}\, v} = \frac{\text{ſin.}\, \beta\, \text{tang.}\, v}{\text{ſin.}\, g - \text{coſ.}\, \beta\, \text{coſ.}\, g\, \text{tang.}\, v}$$

ex qua colligitur $\text{tang.}\, v = \frac{y\, \text{ſin.}\, g}{y\, \text{coſ.}\, \beta\, \text{coſ.}\, g + x\, \text{tang.}\, \beta}$.

§. 14.

§. 14. Quo nunc facilius hoc valore in reliquis aequationibus vti queamus, formemus hanc aequationem:

$$4 - xx - yy = \frac{8\,\mathrm{cos.}\,g\,\mathrm{cos.}\,v + 8\,\mathrm{cos.}\,\beta\,\mathrm{sin.}\,g\,\mathrm{sin.}\,v}{1 + \mathrm{cos.}\,g\,\mathrm{cos.}\,v + \mathrm{cos.}\,\beta\,\mathrm{sin.}\,g\,\mathrm{sin.}\,v}$$

quae per y diuisa praebet

$$\frac{4 - xx - yy}{y} = \frac{4\,\mathrm{cos.}\,g\,\mathrm{cos.}\,v + 4\,\mathrm{cos.}\,\beta\,\mathrm{sin.}\,g\,\mathrm{sin.}\,v}{\mathrm{sin.}\,\beta\,\mathrm{sin.}\,v} = \frac{4\,\mathrm{cos.}\,g + 4\,\mathrm{cos.}\,\beta\,\mathrm{sin.}\,g\,\mathrm{tang.}\,v}{\mathrm{sin.}\,\beta\,\mathrm{tang.}\,v}$$

in qua loco tang. v valorem ante inuentum scribamus, vnde fiet

$$\frac{4 - xx - vy}{y} = \frac{4y\,\mathrm{cos.}\,\beta + 4x\,\mathrm{sin.}\,\beta\,\mathrm{cos.}\,g}{y\,\mathrm{sin.}\,\beta\,\mathrm{sin.}\,g}$$

ex qua deducimus

$$xx + yy = 4 - \frac{4y\,\mathrm{cos.}\,\beta - 4x\,\mathrm{sin.}\,\beta\,\mathrm{cos.}\,g}{\mathrm{sin.}\,\beta\,\mathrm{sin.}\,g}$$

quae aequatio itidem est pro circulo; vnde tuto concludere possumus, omnes circulos maximos in sphaera ductos etiam per arcus circulares exprimi, vel adeo per lineas rectas.

§. 15. Quo nunc tam centrum quam radium cuiusque Meridiani pro nostra proiectione assignemus, aequationem inventam in hanc formam transfundamus: Tab. I. Fig. 8.

$$\left(\frac{2\,\mathrm{cos.}\,g}{\mathrm{sin.}\,g} + x\right)^2 + \left(\frac{2\,\mathrm{cos.}\,\beta}{\mathrm{sin.}\,\beta\,\mathrm{sin.}\,g} + y\right)^2 = \frac{4}{\mathrm{sin.}\,\beta^2\,\mathrm{sin.}\,g^2}.$$

Sint igitur puncta H et K poli in proiectione, ita vt sit

$$CH = 2\,\mathrm{tang.}\,\tfrac{1}{2}g = \frac{2\,\mathrm{sin.}\,g}{1 + \mathrm{cos.}\,g} \quad \text{et} \quad CK = 2\,\mathrm{cot.}\,\tfrac{1}{2}g = \frac{2\,\mathrm{sin.}\,g}{1 - \mathrm{cos.}\,g}$$

ideoque totum interuallum $HK = \frac{4}{\mathrm{sin.}\,g}$ eiusque semissis $= \frac{2}{\mathrm{sin.}\,g}$ quod medium in punctum O incidat, eritque $CO = \frac{2\,\mathrm{cos.}\,g}{\mathrm{sin.}\,g}$; hinc sumto $CX = x$ erit $OX = \frac{2\,\mathrm{cos.}\,g}{\mathrm{sin.}\,g} + x$. Ex O erigatur perpendiculum $= \frac{2\,\mathrm{cos.}\,\beta}{\mathrm{sin.}\,\beta\,\mathrm{sin.}\,g}$, sumtaque XL ipsi ON aequali erit $LS = \frac{2\,\mathrm{cos.}\,\beta}{\mathrm{sin.}\,\beta\,\mathrm{sin.}\,g} + y$, quocirca esse oportet OX^2 (siue LN^2) $+ LS^2 = NS^2 = \frac{4}{\mathrm{sin.}\,\beta^2\,\mathrm{sin.}\,g^2}$, ideoque $NS = \frac{2}{\mathrm{sin.}\,\beta\,\mathrm{sin.}\,g}$. Vnde patet, punctum N esse centrum Meridiani describendi, radium vero $= \frac{2}{\mathrm{sin.}\,\beta\,\mathrm{sin.}\,g}$, qui radius praecise aequalis erit rectae NH, quod egregie cum natura rei conuenit; quandoquidem omnes Meridiani etiam in proiectione per polos N et H transire debent.

Com-

Comparatio huius proiectionis cum formulis generalibus.

§. 16. Hic igitur quaeritur, cuius modi forma functioni Δ tribui debeat, vt proiectio modo descripta inde sequatur. Ac primo patet, potestates prima altiores in ea occurrere non posse, quia alioquin multipla angulorum t et v ingrederentur; deinde vero haec functio debebit esse fractio, quoniam formulae pro x et y inuentae sunt fractiones. Hanc ob caussam functioni $\Delta : z$ talem formam generalem tribuamus $\frac{a+bz}{c+dz}$: at vero pro z sumamus formam postremam supra expositam, qua erat $z = \text{tang.}\, \frac{1}{2} v\, (\text{cos.}\, t \pm \sqrt{-1}\, \text{sin.}\, t)$

~~ita vt nostra functio euadat~~

$$\frac{a + b\, \text{tang.}\, \frac{1}{2} v\, (\text{cos.}\, t + \sqrt{-1}\, \text{sin.}\, t)}{c + d\, \text{tang.}\, \frac{1}{2} v\, (\text{cos.}\, t \pm \sqrt{-1}\, \text{sin.}\, t)}$$

quae, loco tang. $\frac{1}{2} v$ scribendo $\frac{\text{sin.}\, v}{1 + \text{cos.}\, v}$ induet hanc formam:

$$\frac{a\,(1 + \text{cos.}\, v) + b\, \text{sin.}\, v\, (\text{cos.}\, t \pm \sqrt{-1}\, \text{sin.}\, t)}{c\,(1 + \text{cos.}\, v) + a\, \text{sin.}\, v\, (\text{cos.}\, t \pm \sqrt{-1}\, \text{sin.}\, t)}.$$

§. 17. Pro calculi commodo loco huius formae vtamur hac concinniore: $\frac{P \pm Q\sqrt{-1}}{R \pm S\sqrt{-1}}$ vt sit

$$P = a\,(1 + \text{cos.}\, v) + b\, \text{sin.}\, v\, \text{cos.}\, t; \quad Q = b\, \text{sin.}\, v\, \text{sin.}\, t$$
$$R = c\,(1 + \text{cos.}\, v) + d\, \text{sin.}\, v\, \text{cos.}\, t; \quad S = d\, \text{sin.}\, v\, \text{sin.}\, t$$

Hinc autem coordinatae x et y ita prodibunt determinatae:

$$x = \frac{P + Q\sqrt{-1}}{R + S\sqrt{-1}} + \frac{P - Q\sqrt{-1}}{R - S\sqrt{-1}} \text{ et}$$
$$y\sqrt{-1} = \frac{P + Q\sqrt{-1}}{R + S\sqrt{-1}} - \frac{P - Q\sqrt{-1}}{R - S\sqrt{-1}}$$

vnde colligimus

$$x = \frac{2PR + 2QS}{RR + SS} \text{ et } y = \frac{2QR - 2PS}{RR + SS}.$$

§. 18. Quod si iam loco P, Q, R, S valores assumtos restituamus, pro denominatore communi reperiemus

$$RR + SS = ce\,(1 + \text{cos.}\, v)^2 + 2cd\,(1 + \text{cos.}\, v)\, \text{sin.}\, v\, \text{cos.}\, t + dd\, \text{sin.}\, v^2$$
$$= (1 + \text{cos.}\, v)\,(cc\,(1 + \text{cos.}\, v) + 2cd\, \text{sin.}\, v\, \text{cos.}\, t + dd\,(1 - \text{cos.}\, v)).$$

Tum

Tum vero pro numeratore ipſius x fiet

$$PR + QS = (1+\cos. v)(ac(1+\cos. v) + (bc+ad)\sin. v \cos. t + bd(1-\cos. v)).$$

denique pro numeratore ipſius y

$$QR - PS = (1+\cos. v)(bc-ad)\sin. v \sin. t$$

ſicque pro coordinatis nanciſcimur has expreſſiones:

$$x = \frac{2ac(1+\cos. v) + 2(bc+ad)\sin. v\cos. t + 2bd(1-\cos. v)}{cc(1+\cos. v) + 2cd\sin. v\cos. t + da(1-\cos. v)}$$

$$y = \frac{2(bc-ad)\sin. v\sin. t}{cc(1+\cos. v) + 2cd\sin. v\cos. t + dd(1-\cos. v)}.$$

§. 19. Quod ſi iam has formulas cum iis comparemus, quas ſupra inuenimus, quae erant

$$x = \frac{2\sin. g\cos. v - 2\cos. g\sin. v\cos. t}{1+\cos. g\cos. v + \sin. g\sin. v\cos. t} \text{ et } y = \frac{2\sin. t\sin. v}{1+\cos. g\cos. v + \sin. g\sin. v\cos. t}$$

egregium iam conſenſum deprehendimus: at facile erit conſtantes a, b, c, d ita aſſumere, vt conſenſus fiat perfectus. Primo igitur vt denominatorem ad identitatem perducamus, requiritur, vt ſit $cc+dd=1$, $cc-dd=\cos. g$ et $2cd=\sin. g$. Ex duabus prioribus fit

$$cc = \frac{1+\cos. g}{2} = \cos. \tfrac{1}{2}g^2 \text{ et } dd = \frac{1-\cos. g}{2} = \sin. \tfrac{1}{2}g^2$$

vnde fit $c=\cos. \frac{1}{2}g$ et $d=\sin. \frac{1}{2}g$, quibus valoribus iam tertiae conditioni ſatisfit; fiet enim

$$2cd = 2\sin. \tfrac{1}{2}g\cos. \tfrac{1}{2}g = \sin. g.$$

Pro numeratore ipſius x perfectus conſenſus poſtulat, vt fiat

$$ac+bd=0, \quad ac-bd=\sin. g, \quad bc+ad=-\cos. g$$

vbi ſi loco c et d valores modo inuentos ſcribamus, fiet

$$a\cos. \tfrac{1}{2}g + b\sin. \tfrac{1}{2}g = 0, \quad a\cos. \tfrac{1}{2}g - b\sin. \tfrac{1}{2} = \sin. g,$$
$$b\cos. \tfrac{1}{2}g + a\sin. \tfrac{1}{2}g = -\cos. g.$$

Ex binis prioribus fit

$$a = \frac{\sin. g}{2\cos. \frac{1}{2}g} = \sin. \tfrac{1}{2}g, \text{ porro } b = -\frac{2\sin. g}{2\sin. \frac{1}{2}g} = -\cos. \tfrac{1}{2}g$$

hisque valoribus etiam tertiae conditioni ſponte ſatisfit. Tantum

 igi-

igitur ſupereſt, vt etiam videamus, an iſti valores cum numeratore ipſius y conueniant, quo requiritur, vt ſit $bc - ad = 1$; eſt vero $bc = -\text{coſ.}\,\frac{1}{2}g^2$ et $ad = \text{ſin.}\,\frac{1}{2}g^2$ vnde ſit $bc - ad = -1$. Probe autem notandum eſt, ambas coordinatas tam poſitiue quam negatiue ſumi poſſe, ita vt hic perfecta identitas agnoſci debeat.

§. 20. His valoribus inuentis manifeſtum eſt, formulas noſtras generales perducturas fuiſſe ad hanc proiectionem ſtereographicam, ſi pro functione $\Delta : z$ aſſumſiſſemus ſtatim hanc formam:

$$\frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}g - z\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}g}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}g + z\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}g} \quad \text{ſiue} \quad \frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}g - z}{1 + z\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}g}.$$

Ceterum hic obſeruari conueniet, iſtum caſum ad vſus practicos, quos in Geographia poſtulamus maxime eſſe accommodatum, quandoquidem veram figuram regionum terreſtrium non admodum detorquet. Imprimis autem notari meretur, quod in hac proiectione non ſolum omnes Meridiani et Paralleli circulis vel adeo lineis rectis exhibeantur, ſed etiam omnes circuli maximi in Sphaera deſcripti etiam per arcus circulares vel adeo lineas rectas exprimantur, dum e contrario aliae Hypotheſes, quae pro functione Δ fingi poſſent, his commodis penitus eſſent cariturae.

DE