1778

De formulis exponentialibus replicatis

Leonhard Euler

DE FORMVLIS EXPONENTIALIBVS REPLICATIS.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Communicauit nuper cum Academia Illuſtr. *Marchio de Condorcet* profundiſſimas ſpeculationes circa formulas Analyticas fere penitus inſolitas, inter quas primum locum tenent formulae, quas hic appellare liceat exponentiales replicatas; quandoquidem quaelibet poteſtas abit in exponentem ſequentis poteſtatis; cuiusmodi expreſſio hoc modo vulgo repraeſentari ſolet $r^{r^{r^{r^{\alpha}}}}$. Quoniam autem indoles talium expreſſionum etiamnunc parum eſt perſpecta, etiam vis illarum inueſtigationum incredibili ſagacitate erutarum neutiquam clare percipi et cognoſci poteſt; hanc ob rem haud inutile erit, hoc loco praecipuas proprietates talium expreſſionum explicare.

§. 2. Hunc in finem, cum ſupremus exponens poſitus ſit α, ipſa autem quantitas continuo eleuanda denotetur littera r, ſtatuamus primam poteſtatem $r^{\alpha} = \beta$, atque iam β erit exponens ſecundae poteſtatis $r^{r^{\alpha}} = r^{\beta}$, quam porro deſignemus littera γ, quae cum ſit exponens tertiae poteſtatis, ſtatuamus ſimili modo $r^{\gamma} = \delta$; tum vero porro $r^{\delta} = \varepsilon$; $r^{\varepsilon} = \zeta$ etc. ita vt hoc modo totum negotium reducatur ad conſiderationem progreſſionis fionis litterarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ etc. quarum quaelibet reperitur, fi quantitas fixa r ad praecedentem eleuetur, quae ergo lex progreffionis hoc modo clariffime ob oculos ponetur $\beta = r^{\alpha}$; $\gamma = r^{\beta}$; $\delta = r^{\gamma}$; $\varepsilon = r^{\delta}$; $\zeta = r^{\varepsilon}$; vnde ftatim patet, fi incipiamus ab $\alpha = 0$ fore $\beta = 1$ et $\gamma = r$; fequentes vero $\delta = r^{r}$; $\varepsilon = r^{r^{r}}$ etc.

§. 3. Hic primo euidens eft, fi pro r capiatur numerus modice magnus, terminos noftrae feriei mox in immenfum excrefcere; fi enim tantum fumamus $r = 2$, pofito $\alpha = 0$, vt fit $\beta = 1$ et $\gamma = 2$, fequentes termini erunt $\delta = 4$; $\varepsilon = 16$; $\zeta = 65536$; vbi tantum fequentem terminum η nemo facile euoluet, fiquidem conftaret ex 19729 figuris. Hinc iam manifeftum eft, fi pro r numerum adhuc maiorem fumeremus, tum noftram feriem α, β, γ etc. multo rapidius in immenfum effe excreturam. Contra autem fponte intelligitur, fi loco r numeri binario minores accipiantur, tum huiusmodi augmentationem multo lentius effe proceffuram, quandoquidem pro cafu $r = 1$ omnes noftrae feriei termini in infinitum perpetuo manebunt vnitati aequales.

§. 4. Hic igitur ftatim quaeftio maximi momenti fe offert: vbi ifta enormis augmentatio incipiat? neque enim, ftatim ac numerus r vnitatem fuperet, ifta augmentatio contingit, id quod vnico cafu oftendiffe fufficiet, quo fumatur $r = \sqrt{2}$, vbi adeo primo exponenti α iam maiorem valorem tribuamus quam $\sqrt{2}$. Sit fcilicet $\alpha = 2$ ac prodibit $\beta = 2$, hincque porro $\gamma = 2$, ficque deinceps omnes termini noftrae progreffionis nullam augmentationem accipiunt, dum omnes binario aequales manent. Quin etiam idem phoenomenon locum habebit, fi primo exponenti α adhuc maiorem valorem tribuamus, fcilicet $\alpha = 4$; tum enim prodibit $\beta = 4$ et $\gamma = 4$, neque vlla vlterior augmentatio occurret; ftatim autem ac α vltra 4 augebitur,

bitur, veluti ſi ſumatur $\alpha = 6$, tum reperietur $\beta = 8$; hincque porro $\gamma = 16$; $\delta = 256$, ſequentes vero ob ſummam magnitudinem vix et ne vix quidem exprimere licebit.

§. 5. Cum igitur caſu $r = \sqrt{2}$, incipiendo ab $\alpha = 0$, augmentatio terminorum non vltra modicam quantitatem excreſcat, cum ſumpto $r = 2$ ea quaſi ſubito in infinitum dilatetur, maxime ſine dubio operae erit pretium limitem aſſignare, vbi iſta augmentatio incipiat; quem ante quam ex principiis Analyticis definiamus, haud abs re erit, caſus quosdam intra limites $\sqrt{2}$ et 2 examini ſubiicere, id quod facili negotio per logarithmos expedire licebit. Cum enim ſit $\beta = r^{\alpha}$, erit $l\beta = \alpha l r$ et $ll\beta = l\alpha + llr$; ſimilique modo erit $ll\gamma = l\beta + llr$; tum vero $ll\delta = l\gamma + llr$ et ita porro. Hoc igitur modo examinemus caſum, quo $r = \frac{3}{2}$ vnde ſit

$$lr = 0,1760913 \quad \text{et} \quad llr = 9,2457379$$

et quia, noſtram ſeriem a cyphra incipiendo, ſtatim peruenimus ad terminum $\frac{3}{2}$, incipiamus a poſitione $\alpha = \frac{3}{2}$ et calculus ſequenti modo concinne abſoluetur.

$l\alpha = 0,1760913$ hincque $\alpha = 1,5000$
$llr = 9,2457379$
$ll\beta = 9,4218292$

$l\beta = 0,2641370$ hincque $\beta = 1,8371$
$llr = 9,2457379$
$ll\gamma = 9,5098749$

$l\gamma = 0,3235004$ hincque $\gamma = 2,1062$
$llr = 9,2457379$
$ll\delta = 9,5692383$

$l\delta = 0,3708841$ hincque $\delta = 2,3490$
$llr = 9,2457379$

$ll\varepsilon =$

$ll\varepsilon = 9,6166220$

$l\varepsilon = 0,4136396$ hincque $\varepsilon = 2,5920$

$llr = 9,2457379$

$ll\zeta = 9,6593775$

$l\zeta = 0,4564335$ hincque $\zeta = 2,8604$

$llr = 9,2457379$

$ll\eta = 9,7021714$

$l\eta = 0,5036993$ hincque $\eta = 3,1893$

$llr = 9,2457379$

$ll\theta = 9,7494372$

$l\theta = 0,5616140$ hincque $\theta = 3,6443$

§. 6. Hic ergo termini noſtrae progreſſionis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. tam lente increſcunt, vt dubitare queamus, an non ad certum quendam limitem conuergant; verum quia poſtremae differentiae manifeſto increſcunt, neceſſe eſt, vt ipſi termini tandem continuo vltra creſcant, vnde concludere licet, limitem, quem quaerimus, infra $\frac{3}{2}$ ſubſiſtere. Examinemus ergo ſimili modo caſum $r = \frac{4}{3}$, atque incipiendo ab $\alpha = \frac{4}{3}$ calculus ſequenti modo procedet.

$l\alpha = 0,1249387$ hincque $\alpha = 1,3333$

$llr = 9,0966972$

$ll\beta = 9,2216359$

$l\beta = 0,1665850$ hincque $\beta = 1,4675$

$llr = 9,0966972$

$ll\gamma = 9,2632822$

$l\gamma = 0,1833505$ hincque $\gamma = 1,5252$

$llr = 9,0966972$

$ll\delta = 9,2800477$

$l\delta = 0,1905670$ hincque $\delta = 1,5508$

$llr = 9,0966972$

$ll\varepsilon = 9,2872642$

$l\varepsilon = 0,1937600$ hincque $\varepsilon = 1,5622$

$llr = 9,0966972$

$ll\zeta = 9,2904572$

$l\zeta = 0,1951898$ hincque $\zeta = 1,5674$.

Hic iam differentiae manifesto continuo decrescunt; vnde satis tuto concludere licet, terminos nostrae progressionis non vltra certam quantitatem auctum iri. Quoniam autem suspicari possemus etiam hoc casu differentias iterum augeri, solutio sequentis problematis omnem tollet dubitationem.

Problema.

Inuestigare limitem, quem simulac radix r *superare inceperit, termini nostrae progressionis α, β, γ, δ etc. in infinitum excrescant.*

Solutio.

§. 7. Quaeri ergo oportet maximum valorem radicis r, pro quo termini nostrae seriei non in infinitum augeantur, sed versus certum quendam limitem finitum conuergant. Denotet igitur a terminum infinitesimum nostrae progressionis, qui cum iam limitem quaesitum attigerit, necesse est, vt terminus ipsum sequens, qui est r^ω, illi sit aequalis, ita vt habeamus hanc aequationem: $r^\omega = \omega$; vnde maximum valorem, quem littera r attingere potest, definiri oportet.

§. 8. Cum igitur sumptis logarithmis fiat $\omega\, lr = l\omega$, hinc erit $lr = \frac{l\omega}{\omega}$, siue etiam $r = \omega^{\frac{1}{\omega}}$. Maximus igitur valor inuestigari ri debet, quem isto fractio $\frac{l\omega}{\omega}$ acquirere potest: Quod autem hic maximum detur, inde intelligitur, quod sumpto tam $\omega = 1$ quam $\omega = \infty$, haec fractio vtroque casu euanescat. Hinc ergo ad casum maximi inueniendum, differentiale huius fractionis nihilo aequetur; quem in finem denotet $l\omega$ logarithmum hyperbolicum ipsius ω, vt eius differentiale statui possit $\frac{d\omega}{\omega}$, sicque peruenietur ad hanc aequationem $l\omega = 1$; vnde si e designet numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, quem nouimus esse 2,718281828, erit $lr = \frac{1}{e}$, ideoque $r = e^{\frac{1}{e}}$.

§. 9. Hoc modo iam didicimus, quoties radix r maior accipiatur hoc valore inuento $e^{\frac{1}{e}}$, toties progressionem nostram $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ etc. in infinitum augeri debere; contra autem si radix r intra istum valorem subsistat, tum nostram seriem perpetuo ad certum quendam limitem conuergere, qui adeo limes pro ipso casu inuento $r = e^{\frac{1}{e}}$ erit $\omega = e$; cuius veritas vicissim hinc patet, quod hoc modo fiat terminus sequens $e^{\frac{1}{e}} = e$. Hic haud inutile erit obseruare, denotante x numerum quemcunque diuersum ab e siue maiorem siue minorem, semper fore $x^{\frac{1}{x}} < e^{\frac{1}{e}}$. Quod quo clarius perspiciatur, calculum pro casibus simplicioribus instituamus; quem infinem ponamus $x^{\frac{1}{x}} = z$, eritque logarithmis communibus sumendis $lz = \frac{lx}{x}$ hincque porro $llz = llx - lx$, vnde valor ipsius z quouis casu facillime colligitur. Primo quidem perspicuum est sumto $x = 1$ fore $z = 1$, pro sequentibus autem valoribus calculus ita instituetur secundum formulam $\frac{lx}{x}$:

	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$	$x = 6$
lx	0,3010300	0,4771213	0,6020600	0,6989700	0,7781513
$\frac{lx}{x}$	0,1505150	0,1590404	0,1505150	0,1397940	0,1296919
z	1,41421	1,44225	1,41421	1,37972	1,34800

Pa-

Patet hic valores ipſius z, dum x vltra limitem $= e$ augetur, continuo decreſcere et tandem ad vnitatem conuergere; tum vero hinc etiam liquet, maximum valorem ipſius z inter poſitiones $x = 2$ et $x = 3$ incidere, ita vt is certe maior ſit quam $1,44225$.

§. 10. Quaeramus igitur hunc ipſum maximum valorem ipſius z ex caſu $x = e = 2,718281828$ et quoniam eſt $llz = lle = le$, calculus ita ſe habebit

ob $le = 0,4342944$
erit $lle = 9,6377842$
hinc ſubtr. $le = 0,4342944$

fit $llz = 9,2034898$
et $lz = 0,1597679$ tandem $z = 1,44467$

qui ergo valor proxime eſt $z = 1\frac{4}{9}$.

§. 11. Si quis iſtum valorem maximum ipſius r accuratius deſiderauerit, quam vt tabulae logarithmicae vulgares ei ſufficiant, is eundem ope ſeriei maxime conuergentis commodiſſime obtinere poterit; cum enim ſit

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + \text{etc.}$$

erit valor quaeſitus

$$e^{\frac{1}{e}} = 1 + \tfrac{1}{e} + \tfrac{1}{2ee} + \tfrac{1}{6e^3} + \tfrac{1}{24e^4} + \text{etc.}$$

pro qua ſerie ſingulae poteſtates reciprocae ipſius e paſſim ad plures figuras decimales euoluti reperiuntur.

§. 12. Quodſi ergo pro r accipiatur numerus quicunque minor quam valor modo inuentus $1,4447$, tum ſeries inde reſultans $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ etc. certe ad quendam limitem finitum conuerget, qui, ſi dicatur $= \Phi$, ita definietur vt ſit $e^{\Phi} = \Phi$, ideoque $r = \Phi^{\frac{1}{\Phi}}$. Ex praecedentibus autem patet, ſemper binos dari valores ipſius Φ; vnde eadem radix r oriri queat, quemadmodum in caſibus ſupra euolutis valores $x = 2$ et $x = 4$ eundem

dem valorem pro z produxerunt; atque hi duo valores ipsius Φ eo magis a se inuicem discrepabunt, quo magis radix assumpta r a limite inuento $1,4447$ differat, siquidem in ipso limite ambo valores in vnum coalescunt. His igitur valoribus inveniendis sequens problema destinamus.

Problema.

Si pro radice r *accipiatur numerus quicunque minor quam limes inuentus* $e^{\frac{1}{e}} = 1,4445$, *inuestigare binos illos valores, ad quos progressio nostra* α, β, γ, δ *etc. conuergere potest, siue quaerere duplicem valorem ipsius* Φ, *vt euadat* $r^\Phi = \Phi$; *vbi tamen obseruari necesse est, valorem radicis* r *vnitate maiorem accipi debere, quandoquidem valores vnitate minores peculiarem explicationem postulant.*

Solutio.

§. 13. Hic primo haud parum alienum videbitur, quod talis aequatio $r^\Phi = \Phi$ duas inuoluat radices reales, quotiescunque r intra limites 1 et $e^{\frac{1}{e}}$ continetur, neque Analysis vllam methodum certam praescribit hos duos valores inueniendi; quoniam autem iam certo nouimus duos dari huiusmodi valores, designemus alterum littera ψ, ita vt etiam sit $r^\psi = \psi$; hinc igitur, eliminando litteram r, impetrabimus hanc aequationem inter Φ et ψ: $\frac{l\Phi}{\Phi} = \frac{l\psi}{\psi}$.

§. 14. Iam ad hanc aequationem resoluendam ponamus $\psi = p\Phi$, vt sit $l\psi = lp + l\Phi$, vnde facta substitutione reperitur $l\Phi = \frac{lp}{p-1}$; tum vero $\Phi = p^{\frac{1}{p-1}}$; at alter valor iam erit $\psi = p^{\frac{p}{p-1}}$, qui ergo in genere exprimunt binos valores quaesitos.

§. 15. Sumpto ergo pro lubitu numero p, inde colliguntur bini exponentes quaesiti Φ et ψ; ipsa vero radix proposita r ita

 per

per p exprimetur, vt fit $lr = \frac{p^{\frac{-1}{p-1}} lp}{p-1}$. Hinc autem viciſſim ex data radice r numerus p aliter colligi nequit, niſi approximando; quem in finem notaſſe iuuabit, ſi fuerit $p = 1$, hoc caſu bini exponentes ϕ et ψ euadere aequales inter ſe atque adeo ipſi numero e, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$; quod quo clarius appareat, ponamus $p = 1 + \omega$, exiſtente ω infinite paruo, eritque $\phi = (1 + \omega)^{\frac{1}{\omega}}$ ideoque $l\phi = \frac{1}{\omega} l(1 + \omega)$. Quia igitur eſt $l(1 + \omega) = \omega$, erit $l\phi = 1$ ideoque $\phi = e$; tum vero erit $lr = \frac{1}{e}$ ideoque $r = e^{\frac{1}{e}}$; qui eſt ipſe limes pro radice r ſupra inuentus; hoc ergo caſu bini valores ϕ et ψ inter ſe conueniunt.

§. 16. Pro reliquis autem caſibus, quibus r minorem ſortitur valorem, bini iſti valores continuo magis a ſe inuicem diſcrepabunt. Ita ſi capiamus $p = 2$, vt fiat $\psi = 2\phi$, prodibit $\phi = 2$ et $\psi = 4$, tum vero porro $r = \sqrt{2}$, qui eſt ipſe caſus, quem ſupra fuſius euoluimus, quandoquidem hinc manifeſto fit $(\sqrt{2})^2 = 2$ et $(\sqrt{2})^4 = 4$. Sin autem ſumamus $p = 3$, fiet $\phi = \sqrt{3}$ et $\psi = 3\sqrt{3}$, qui ergo bini valores locum habent pro $lr = \frac{l3}{2\sqrt{3}}$; ipſa ergo radix erit $r = 3^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$. Tales autem expreſſiones, vbi exponentes ſunt irrationales, inter quantitates interſcendentes referri ſolent.

§. 17. Vt igitur hoc incommodum euitemus, ponamus $p = 1 + \frac{1}{n}$, denotante n numerum quantumuis magnum, eritque $\phi = \frac{(n+1)^n}{n^n}$ et $\psi = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}$; tum vero erit $lr = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} l \frac{n+1}{n}$, vnde ipſe valor ipſius r haud commode referri poteſt. Pro caſibus autem ſpecialibus hi valores ita ſe habebunt

I. Si

I. Si $n = 1$, erit $\Phi = 2$ et $\psi = 4$; tum vero $r = \sqrt{2}$, vt supra notauimus.

II. Si $n = 2$, erit $\Phi = \frac{9}{4}$ et $\psi = \frac{27}{8}$; tum vero $lr = \frac{8}{9} l \frac{3}{2}$, ideoque $r = (\frac{3}{2})^{\frac{8}{9}}$; hinc enim manifesto fit $r^{\Phi} = \frac{9}{4} = \Phi$, at $r = \frac{27}{8} = \psi$.

III. Si $n = 3$, erit $\Phi = \frac{64}{27}$ et $\psi = \frac{256}{81}$; tum vero erit $lr = \frac{81}{64} l \frac{4}{3}$ ideoque $r = (\frac{4}{3})^{\frac{81}{64}}$; hinc enim fit $r^{\Phi} = \frac{64}{27} = \Phi$ et $r^{\psi} = \frac{266}{81} = \psi$.

IV. Si $n = 4$, erit $\Phi = \frac{625}{256}$ et $\psi = \frac{3125}{1024}$; hinc vero erit $lr = \frac{1024}{625} l \frac{5}{4}$ ideoque $r = (\frac{5}{4})^{\frac{1024}{625}}$; hinc autem fiet $r^{\Phi} = \frac{625}{356} = \Phi$ et $r^{\psi} = \frac{3125}{1024} = \psi$.

Solutio geometrica eiusdem problematis.

§. 18. Super axe A O eiusmodi curua describatur, pro qua, si ponatur abscissa A X $= x$ et applicata X Y $= y$, fit $y = r^x$, quae ergo curua erit logarithmica, et pro initio $x = 0$ fiet prima applicata A B $= 1$; tum vero, sumpta abscissa A C $= 1$, erit applicata C D $= r$ quae ergo exhibeat nostram radicem r; sicque abscissae x nobis dabunt exponentes potestatum r^x, applicatae vero y exhibebunt ipsas potestates. Iam ex initio A producatur recta A Q U, cum axe faciens angulum semirectum, quam curua in duobus punctis Q et U secabit, siquidem fuerit $r < e^{\frac{1}{e}}$. Hoc modo pro puncto Q erit abscissa A P $= \Phi$ simulque P Q $= r^{\Phi} = \Phi$. Simili modo pro altera intersectione U abscissa erit A T $= \psi$ simulque T U $= r^{\psi} = \psi$. Tab. I. Fig. 1.

§. 19. Ab initio igitur ista curua supra rectam A Q versabitur a puncto B vsque ad Q; at vero a puncto Q vsque ad U curua infra istam rectam cadit, a termino autem U vlterius continuata in regionem superiorem in infinitum vsque ascendet. Hinc intelligitur, quamdiu abscissa x minor fuerit quam Φ, tum applicatam $y = r^x$ fore maiorem quam x ideoque ad limitem P Q propius accedere, donec sumpto $x =$ A P $= \Phi$ etiam fiet $y = r^{\Phi} = \Phi$. Quando autem x superat Φ, ita

ta-

tamen vt minor ſit quam ψ, tum applicata y erit minor quam x ideoque propius ad terminum Φ accedet; hocque eueniet, quamdiu abſciſſa x minor fuerit quam ψ: ſumpto autem $x = \psi$ etiam fiet $y = \psi$. Denique vero ſi capiatur $x > \psi$, tum manifeſto applicata y maior erit quam x, ideoque magis a termino ψ recedet atque adeo tandem in infinitum elongabitur.

§. 20. Hic igitur ſingulare Phoenomenon ſe offert, in hoc conſiſtens, quod, quam diu abſciſſa x minor accipitur termino maiore ψ, tum applicata y ſemper propius ad terminum minorem Φ accedat quam x, hocque eueniet quamdiu fuerit $x < \psi$, et non niſi in ipſo hoc altero termino $x = \psi$, applicata quoque fiet $y = \psi$. Statim enim atque abſciſſa x vel minimum diſcrepat a ψ, applicata y adhuc magis a ψ diſcrepabit.

§. 21. Bini igitur valores ſupra aſſignati Φ et ψ in hoc eſſentialiter a ſe inuicem differunt, quod ſi x ſiue maior ſiue minor capiatur quam Φ, tum y propius ad Φ accedat; contrarium autem euenit in altero termino ψ, quippe a quo, ſtatim atque x diſceſſerit, etiam y adhuc magis diſcedit.

§. 22. Quo hoc ſummum diſcrimen clarius appareat, conſideremus caſum, quo $r = \sqrt{2}$; $\Phi = 2$ et $\psi = 4$; atque iam ſatis liquet, ſi progreſſionis noſtrae numerorum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. primus terminus α accipiatur minor quam 2, tum ſequentes β, γ, δ etc. continuo propius ad 2 eſſe acceſſuros; quandoquidem ſumpto $\alpha = 2$ omnes ſequentes eundem valorem recipient. Sumamus igitur $\alpha > 2$, attamen minus quam 4 et quaeramus ſequentes terminos β, γ, δ, etc. ex formula $ll\beta = l\alpha + llr$ pro qua

$$lr = 0,1505150 \text{ et } llr = 9,1775798.$$

quem in finem tribuamus primo termino α valorem 3, vtpote medium inter binos limites 2 et 4 et calculus ſequenti modo ſe habebit

ad

$$\text{ad. } l\alpha = 0,4771213 \quad \text{hincque } \alpha = 3,0000$$
$$\text{add. } llr = 9,1775798$$
$$ll\beta = 9,6547011$$
$$l\beta = 0,4515451 \quad \text{hincque } \beta = 2,8284$$
$$llr = 9,1775798$$
$$ll\gamma = 9,6291249$$
$$l\gamma = 0,4257209 \quad \text{hincque } \gamma = 2,6651$$
$$llr = 9,1775798$$
$$ll\delta = 9,6033007$$
$$l\delta = 0,4011442 \quad \text{hincque } \delta = 2,5185$$
$$llr = 9,1775798$$
$$ll\varepsilon = 9,5787240$$
$$l\varepsilon = 0,3790740 \quad \text{hincque } \varepsilon = 2,3937$$

Hinc iam patet istos terminos continuo magis ad limitem 2 conuergere.

§. 23. Ne quis autem putet hoc aliter esse euenturum, si ipsi α valor parum tantum a 4 discrepans tribuatur, euoluamus casum $\alpha = 3,99$ et calculus sequenti modo se habebit.

$$l\alpha = 0,6009729 \quad \text{hincque } \alpha = 3,9900$$
$$llr = 9,1775798$$
$$ll\beta = 9,7785527$$
$$l\beta = 0,6005548 \quad \text{hincque } \beta = 3,9861$$
$$llr = 9,1775798$$
$$ll\gamma = 9,7781346$$
$$l\gamma = 0,5999770 \quad \text{hincque } \gamma = 3,9808$$
$$llr = 9,1775798$$

$ll\delta$

$$ll\delta = 9,7775568$$

$$l\delta = 0,5991792 \text{ hincque } \delta = 3,9735$$

$$llr = 9,1775798$$

$$ll\varepsilon = 9,7767590$$

$$l\varepsilon = 0,5980795 \text{ hincque } \varepsilon = 3,9635$$

Hic ergo quoque euidens eſt, terminos $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ etc. continuo magis a limite $\psi = 4$ recedere et continuo magis ad alterum limitem $\phi = 2$ appropinquare.

§. 24. Interim tamen manifeſtum eſt, ſi ſtatuatur exacte $\alpha = 4$, tum omnes ſequentes terminos prorſus eundem valorem eſſe retenturos; ſtatim vero ac littera α vel tantillum ſuperauerit limitem 4, ſequentes terminos continuo magis eum eſſe ſuperaturos, quemadmodum ſequens calculus, ſumendo $\alpha = 4,01$ oſtendet.

$$l\alpha = 0,6031444 \text{ ideoque } \alpha = 4,0100$$

$$llr = 9,1775798$$

$$ll\beta = 9,7807242$$

$$l\beta = 0,6035652 \text{ hincque } \beta = 4,0138$$

$$llr = 9,1775798$$

$$ll\gamma = 9,7811450$$

$$l\gamma = 0,6041502 \text{ hincque } \gamma = 4,0293$$

$$llr = 9,1775798$$

$$ll\delta = 9,7817300$$

$$l\delta = 0,6049645 \text{ hincque } \delta = 4,0268$$

$$llr = 9,1775798$$

$$ll\varepsilon = 9,7825443$$

$$l\varepsilon = 0,6061000 \text{ hincque } \varepsilon = 4,0373$$

hinc

Hinc patet indolem limitis $\psi = 4$ similem esse limiti aequilibrii labilis, quo acus cuspidi quidem insistere potest, simulac vero quam minime deturbetur, penitus procumbit.

§. 25. Hic autem probe meminisse necesse est, huiusmodi binos limites ϕ et ψ locum habere non posse, nisi radix r infra valorem $e^{\frac{1}{e}}$ substiterit; statim vero ac r hunc valorem superauerit, hi limites fiunt imaginarii; atque adeo haec ipsa imaginaria assignare licebit, cuiusmodi inuestigationes cum adhuc parum sint tritae, haud inutile erit sequens problema adiicere.

Problema.

Si radix r maior fuerit, quam limes supra assignatus $e^{\frac{1}{e}}$, exponentem imaginarium ω inuestigare, vt fiat $r^{\omega} = \omega$.

Solutio.

§. 26. Cum quicquid in Analysi imaginarii occurrere potest semper in hac forma contineatur $x + y\sqrt{-1}$, ita vt tam x quam y sint quantitates reales, statuamus $\omega = x + y\sqrt{-1}$, ita vt esse debeat

$$r^{x + y\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1} \text{ siue } r^x . r^{y\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}$$

ex qua aequatione binas litteras x et y erui oportet.

§. 27. Quoniam constat esse

$$e^{z\sqrt{-1}} = \cos. z + \sqrt{-1} \sin. z,$$

statuatur $r^{y\sqrt{-1}} = e^{z\sqrt{-1}}$, vt fiat $y\sqrt{-1} . lr = z\sqrt{-1}$, ob $le = 1$, eritque ergo $z = ylr$, sicque habebimus

$$r^{y\sqrt{-1}} = \cos. ylr + \sqrt{-1} \sin. ylr$$

quo valore substituto aequatio nostra erit

$$r^x (\cos. ylr + \sqrt{-1} \sin. ylr) = x + y\sqrt{-1}$$

vnde cum partes reales et imaginariae inter se seorsim aequari debeant, oriuntur hac duae aequationes:

I. $r^x \cos. y\, l\, r = x$

II. $r^x \sin. y\, l\, r = y$

quarum posterior per priorem diuisa praebet $\text{tang.}\, y\, l\, r = \frac{y}{x}$, ex qua colligimus $x = \frac{y}{\text{tang.}\, y l r}$, ita vt ex valore ipsius y cognito valor ipsius x assignari queat.

§. 28. Pro y autem inueniendo posterioris aequationis capiantur logarithmi, qui dabunt

$$x\, l\, r + l \sin. y\, l\, r = l\, y, \text{ ideoque } \frac{y\, l\, r}{\text{tang.}\, y l r} + l \sin. y\, l\, r = l\, y.$$

siue $\frac{y\, l\, r}{\text{tang.}\, y l r} = l \frac{y}{\sin. y\, l\, r}$; sicque totum negotium huc est perductum, vt quantitas y ex data radice r eliciatur. Quo autem ista relatio commodius exprimi possit, statuamus $y\, l\, r = \theta$, vt obtineamus hanc aequationem $\frac{\theta}{\text{tang}\theta} = l \frac{y}{\sin. \theta}$, vnde colligimus

$$l\, y = l \sin. \theta + \frac{\theta}{\text{tang}\theta} \text{ ideoque } y = e^{\theta \cot. \theta} \sin. \theta$$

hincque porro $l\, r = \frac{\theta\, e^{-\theta \cot. \theta}}{\sin. \theta}$; atque hinc tandem erit $x = e^{\theta \cot. \theta} \cos. \theta$.

§. 29. Optandum quidem foret, vt ex data radice r angulus θ definiri posset; verum contenti esse debemus, quod hinc ex quolibet valore ipsius θ haud difficulter radix erui queat, vbi quidem facile intelligitur, pro extremo valore $r = e^{\frac{1}{e}}$, vbi imaginaria incipiunt, esse debere $y = 0$, id quod euenit ponendo $\theta = 0$, quo casu ob $\theta \cot. \theta = \frac{\theta \cos. \theta}{\sin. \theta} = 1$; erit $x = e$, quemadmodum natura rei postulat, dum vtique fiet $e^e = e$; reuera autem hinc prodibit $l\, r = \frac{1}{e}$, consequenter $r = e^{\frac{1}{e}}$. Quia autem hic assumimus, valorem ipsius r maiorem esse quam $e^{\frac{1}{e}}$, hi casus prodibunt, si angulo θ maiores valores tribuantur. Quod quo clarius appareat, fingamus angulum θ minimum, vt sit

$$\sin. \theta = \theta - \tfrac{1}{6}\theta^3 \text{ et } \cos. \theta = 1 - \tfrac{1}{2}\theta^2 \text{ vnde fit}$$

θ cot.

$$\theta \cot.\theta = \frac{\theta \operatorname{cof}.\theta}{\operatorname{fin}.\theta} = \frac{1-\frac{1}{2}\theta\theta}{1-\frac{1}{6}\theta\theta} = 1-\frac{1}{3}\theta\theta$$

hincque erit

$$e^{\theta \cot.\theta} = e.e^{-\frac{1}{3}\theta\theta} = e(1-\frac{1}{3}\theta^2)$$

ex quo valore colligimus

$$x = e(1-\frac{5}{6}\theta^2) \text{ et } y = e\,\theta(1-\frac{1}{3}\theta^2)$$

hincque quoniam

$$lr = \frac{\theta}{y} \text{ erit } lr = \frac{1}{e(1-\frac{1}{3}\theta^2)} = \frac{1+\frac{1}{3}\theta^2}{e}$$

vnde patet fore $lr > \frac{1}{e}$, ideoque $r > e^{\frac{1}{e}}$, fimulque intelligitur quantumuis magnum valorem ipfi r tribuere velimus, femper pro θ angulum conuenientem affignari poffe, quandoquidem eius valor iam in infinitum augebitur, fi capiatur $\theta = 180° = \pi$. Cafus hic prae caeteris memoratu dignus occurrit, quando capitur $\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$; tum enim ob $\cot.\theta = 0$ fiet $x = 0$ at $y = 1$ hincque porro $lr = \frac{\pi}{2}$ ideoque $r = e^{\frac{\pi}{2}}$; tum igitur erit

$$r^{x+y\surd-1} = e^{\frac{1}{2}\pi\surd-1} = \surd-1$$

id quod egregie conuenit cum formulis iam pridem cognitis, quibus, fumendis logarithmis, erat $\frac{1}{2}\pi\surd-1 = l\surd-1$ fiue $\frac{1}{2}\pi = \frac{l\surd-1}{\surd-1}$ vel etiam $\pi = \frac{2\,l\,-1}{\surd-1}$.

Confideratio cafuum, quibus radix r vnitate minor accipitur.

§. 30. Hic ante omnia obferuandum eft omnes terminos noftrae feriei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ etc. tanquam vnitate minores fpectari poffe; quantumuis enim magnus primus α accipiatur veluti $\alpha = 10$, fecundus $\beta = r^{10}$ eo minor erit fractio, quo maior fuerit α. Quam ob rem, ne calculus logarithmicus inftituendus turbetur, tam loco radicis r, quam fingulorum terminorum noftrae nostrae progressionis fractiones in calculum introducamus, sitque $r = \frac{1}{s}$; $\alpha = \frac{1}{a}$; $\beta = \frac{1}{b}$; $\gamma = \frac{1}{c}$; $\delta = \frac{1}{d}$ etc. et cum sit

$$\beta = r_\alpha^\alpha \text{ erit } \frac{1}{b} = \frac{1}{s^{\frac{1}{a}}} \text{ ideoque } s^{\frac{1}{a}} = b$$

Per logarithmos ergo erit $\frac{1}{a}\, l s = l b$ siue $l s = a\, l b$; porro $l l s = l a + l l b$ ideoque $l l b = l l s - l a$, cuius formulae ope ex datis s et a reperitur b; similique modo erit $llc = lls - lb$ et $l l d = l l s - l c$ et ita porro.

§. 31. Illustremus nunc casum exemplo, sitque $r = \frac{1}{2}$ sumaturque $\alpha = \frac{1}{2}$; erit $s = 2$ et $a = 2$, vnde calculus ita se habebit

a $lls = 9,4786098$
subtr. $la = 0,3010300$ propterea quod $\alpha = 0,5000$

$llb = 9,1775798$
$lb = 0,1505150$ hinc $l\beta = 9,8494850$ hinc
$\beta = 0,70710$

$lls = 9,4786098$
$lb = 0,1505150$

$llc = 9,3280948$
$lc = 0,2128604$ hinc $l\gamma = 9,7871396$ vnde
$\gamma = 0,61254$

$lls = 9,4786098$

$lld = 9,2657494$
$ld = 0,1843951$ hinc $l\delta = 9,8156049$ ergo
$\delta = 0,65404$

$lls = 9,4786098$

$lle = 9,2942147$

$le =$

$le = 0,1968859$ hinc $l\varepsilon = 9,8031141$ ergo
$\varepsilon = 0,63549$

$lls = 9,4786098$

$llf = 9,2817239$

$lf = 0,1913039$ hinc $l\zeta = 9,8086961$ ergo
$\zeta = 0,64371$

$lls = 9,4786098$

$llg = 9,2873059$

$lg = 0,1937789$ hinc $l\theta = 9,8062211$ ergo
$\theta = 0,64006.$

§. 32. Hinc igitur elucet terminos noſtrae progreſſionis continuo magis ad certum quendam valorem fixum conuergere, quem alternatim ſuperant ab eoque deficiunt, qui valor circiter erit $0,64$, ad quem ſimul ac fuerit peruentum, ſequentes omnes ipſi manebunt aequales. Ad hunc valorem fixum inueniendum obſeruemus logarithmos numerorum a, b, c, d etc. conuergere ad valorem propemodum $0,192$; vnde ſi verum medium ſit lm neceſſe eſt vt fiat $lm + llm = lls$; hanc autem inueſtigationem aliter niſi tentando elicere non licet, quod per aliquot hypotheſes exequemur:

$lm =$	0,192	0,1925	0,1928	0,1929
add. $llm =$	9,2833012	9,2844307	9,2851070	9,2853322
debeb. eſſe	9,4753012	9,4769307	9,4779070	9,4782322
eſt ver. $lls =$	9,4786098	9,4786098	9,4786098	9,4786098
error (—)	0,0033086	0,0016791	0,0007028	0,0003776

$lm =$

$lm =$	0,1930	0,1931
add. $llm =$	9,2855573	9,2857823
debebat esse	9,4785573	9,4788823
est vero $lls =$	9,4786098	9,4786098
error	−0,0000525	+0,0002725

Patet igitur verum valorem subsistere inter binas postremas hypotheses 0, 1930 et 0, 1931, quarum differentia est 0, 0001, ex qua oritur differentia errorum 0, 0003250; debebat autem esse 0, 0002200; quare vt summa errorum ad differentiam hypothesium, ita error penultimus ad excessum veritatis super penultimam; quocirca verus valor erit $lm = 0,1930161$, cuius complementum est, 9, 8069839, cui respondet terminus progressionis quaesitus 0, 64118, ad quem termini alternatim continuo propius accedunt.

§. 33. Ex his intelligitur, semper eiusmodi exponentem ω definiri posse, vt sit $r^{\omega} = \omega$; siue posito $\omega = \frac{1}{z}$, vt sit $s^{\frac{1}{z}} = z$ siue $s = z^z$. Quoniam enim s est numerus vnitate maior, semper assignari poterit eiusmodi numerus z vt fiat $z^z = s$.

§. 34. In exemplo quidem ante euoluto, quo erat $r = \frac{1}{2}$, termini nostrae progressionis continuo propius conuergebant ad valorem quendam fixum; verum hic ingens discrimen occurrit, quando pro r sumitur fractio valde exigua, veluti si sumamus $r = \frac{1}{20}$ siue $s = 20$ et calculum vt supra instituamus, incipiendo ab $a = 2$ ob $ls = 1,3010300$ calculus ita se habebit

a $lls = 1,1142873$
subtr. $la = 0,3010300$ hinc $\alpha = 0,50000$

$llb = 9,8132573$

$lb = 0,6505149$ hinc $l\beta = 9,3494841$ ergo $\beta = 0,22360$

$lls = 0,1142873$

$llc =$

$llc = 9,4637724$

$lc = 0,2909192$ hinc $l\gamma = 9,7090808$ ergo $\gamma = 0,51177$

$lls = 0,1142873$

$lld = 9,8233681$

$ld = 0,6658373$ hinc $l\delta = 9,3341627$ ergo $\delta = 0,21585$

$lls = 0,1142873$

$lle = 9,4484500$

$le = 0,2808342$ hinc $\varepsilon = 9,7191658$ ergo $\varepsilon = 0,52380$

$lls = 0,1142873$

$llf = 9,8334531$

$lf = 0,6814800$ hinc $\zeta = 9,3185200$ ergo $\zeta = 0,20821$

$lls = 0,1142873$

$llg = 9,4328043$

$lg = 0,2708988$ hinc $\eta = 9,7291012$ ergo $\eta = 0,53592$

etc. etc.

§. 35. Hinc ergo clare perſpicitur, terminos huius progreſſionis continuo longius a ſe inuicem recedere atque alternatim ad duos valores fixos appropinquare, quorum maior erit $> 0,53592$, minor vero erit $< 0,20821$. Hoc ergo ſingulare phoenomenon ſine vllo calculo in hoc ſimplici exemplo, quo $r = \frac{1}{16}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, conſideremus; tum enim erit $\beta = (\frac{1}{16})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$, $\gamma = r^{\beta} = \frac{1}{2}$, $\delta = r^{\gamma} = \frac{1}{4}$ etc. omnes igitur termini alternatim erunt $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$. Vt igitur hos duos limites fixos inueſtigemus, quoties quidem tales occurrunt, deſignemus eos litteris Φ et Ψ, ita vt ſit $r^{\Phi} = \Psi$ et $r^{\Psi} = \Phi$, ſiue ſi ponamus $r = \frac{1}{s}$, $\Phi = \frac{1}{x}$ et $\Psi = \frac{1}{y}$, pro dato valore s requiruntur bini numeri x et y, vt fiat $s = x^{y}$ et $s = y^{x}$.

§. 36. Sumptis ergo logarithmis erit primo $ls = ylx$ et $ls = xly$, ita vt esse debeat $ylx = xly$. Ponatur hic $y = px$ fietque $plx = lp + lx$, vnde colligitur $lx = \frac{lp}{p-1}$ ideoque $x = p^{\frac{1}{p-1}}$ atque $y = p^{\frac{p}{p-1}}$; porro vero habebitur $ls = \frac{p^{\frac{p}{p-1}}\, lp}{p-1}$.

§. 37. Hinc iam primo discimus casum duorum limitum fixorum locum habere non posse, nisi valor ipsius s in hac aequatione $ls = \frac{p^{\frac{p}{p-1}}\, lp}{p-1}$ contineatur; tum vero ambo illi limites erunt $x = p^{\frac{1}{p-1}}$ et $y = p^{\frac{p}{p-1}}$, quae ergo eo magis a se inuicem discrepabunt, quo maior numerus pro p accipiatur; aliquos igitur casus iuuabit attulisse. Sit primo $p = 2$ eritque $x = 2$ et $y = 4$ ideoque $s = 16$, ita vt sit $r = \frac{1}{16}$; $\Phi = \frac{1}{2}$ et $\psi = \frac{1}{4}$, quem casum iam supra sumus contemplati; sit nunc $p = \frac{3}{2}$ eritque $x = \frac{9}{4}$ et $y = \frac{27}{8}$, tum vero $s = (\frac{27}{8})^{\frac{9}{4}}$; consequenter erit $r = (\frac{8}{27})^{\frac{9}{4}}$, $\Phi = \frac{4}{9}$ et $\psi = \frac{8}{27}$.

§. 38. Hinc autem quoque ipsum limitem assignare poterimus, quem simul ac numerus s superauerit, bini valores fixi x et y se exerant. Euidens autem est hunc limitem constitui debere in eo loco, vbi bini numeri x et y fiunt aequales, siue vbi $p = 1$; supra autem vidimus hoc casu fieri $x = e$ simulque $y = e$, denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, tum vero erit $s = e^e$; quam ob rem habebimus $r = \frac{1}{e^e}$ et $\Phi = \psi = \frac{1}{e}$, vnde patet huiusmodi binos valores semper locum habere, quando radix r minor fuerit quam $\frac{1}{e^e}$.

§. 39. Operae igitur pretium erit hunc ipsum limitem accuratius definire; cum igitur sit $e = 2,7182818$, $le =$

$le = 0,4342944$ et $ls = ele$, erit $lls = le + lle = 0,0721786$, ideoque $ls = 1,1808000$; hinc $lr = 8,8192000$, consequenter $r = 0,065948$, siue etiam $r = \frac{1}{15,164}$; vnde intelligitur quamdiu radix r maior fuerit hac fractione $\frac{1}{15,164}$, tum omnes terminos nostrae progressionis semper ad certum limitem fixum conuergere; contra autem quando fuerit $r < \frac{1}{15,164}$ tum accessionem ad duos limites diuersos alternatim conuergere.

De theoremate, quod Illustr. *Marchio de Condorcet* nobiscum communicauit.

§. 40. His mirabilibus phoenomenis perpensis multo facilius erit vim memorati theorematis circa hoc ipsum argumentum intelligere; descripsit autem vir illustris seriem quandam infinitam, cuius termini lege tantopere perplexa formari debent, vt eius indolem non nisi summa patientia adhibita perspicere licet, istius autem seriei summam affirmat esse talem formulam exponentialem replicatam, quam hactenus fusius sumus perscrutati; demonstrationem quidem non addidit: manifestum autem est, eam per inuersionem ex solutione sequentis problematis erui debere.

Problema.

Sumpta pro lubitu radice r, *si formata fuerit ista progressio* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ *etc. ita vt sit* $\beta = r^{\alpha}$, $\gamma = r^{\beta}$, $\delta = r^{\gamma}$ *etc. tum eam inuestigare progressionem, quae resultabit, si primus exponens* α *quapiam quantitate siue augeatur siue minatur.*

Solutio.

§. 41. Ponamus igitur primum exponentem esse $= \alpha(1 + z)$ similique modo pro sequentibus terminis statuamus

$$r^{\alpha(1+z)} = \beta(1 + z'); \quad r^{\beta(1+z')} = \gamma(1 + z''); \quad r^{\gamma(1+z'')} = \delta(1 + z''') \text{ etc.}$$

 quo

quo pacto progredi licebit, quovsque lubuerit; horum vero terminum vltimum illustris auctor indefinitum assumpsit.

§. 42. Cum igitur sit $r^{\alpha(1+z)} = \beta(1+z')$ ideoque ob $r^{\alpha} = \beta$ habebitur $r^{\alpha z} = (1+z')$, vnde quantitatem z' erui oportet; cum igitur $r^{\alpha z}$ per seriem infinitam sit

$$1 + \alpha z l r + \tfrac{1}{2}\alpha^2 z^2 (lr)^2 + \tfrac{1}{6}(\alpha z l r)^3 + \tfrac{1}{24}(\alpha z l r)^4 + \tfrac{1}{120}(\alpha z l r)^5 \text{ etc.}$$

assequimur hanc determinationem aequalem isti z seriei, primo termino sublato. Ponamus autem breuitatis gratia $\alpha z l r = v$ vt fiat

$$z' = v + \tfrac{1}{2} v v + \tfrac{1}{6} v^3 + \tfrac{1}{24} v^4 + \tfrac{1}{120} v^5 + \text{ etc.}$$

Cum autem sit $\alpha l r = l\beta$ erit $v = z l \beta$ sicque facili negotio valor z' definietur.

§. 43. Simili modo cum sit $r^{\beta(1+z')} = \gamma(1+z'')$ vnde ob $r^{\beta} = \gamma$, si breuitatis gratia ponamus $\beta z' l r = v'$, ita vt sit $v' = z' l \gamma$, colligitur fore

$$z'' = v' + \tfrac{1}{2} v'^2 + \tfrac{1}{6} v'^3 + \tfrac{1}{24} v'^4 + \tfrac{1}{120} v'^5 + \text{ etc.}$$

simili modo si porro ponamus $\gamma z'' l r = z'' l \delta = v''$ erit

$$z''' = v'' + \tfrac{1}{2} v''^2 + \tfrac{1}{6} v''^3 + \tfrac{1}{24} v''^4 + \tfrac{1}{120} v''^5 + \text{ etc.}$$

Porro vero si fiat $v''' = z''' l \varepsilon$ erit

$$z'''' = v''' + \tfrac{1}{2} v'''^2 + \tfrac{1}{6} v'''^3 + \tfrac{1}{24} v'''^4 + \tfrac{1}{120} v'''^5 + \text{ etc.}$$

quae progressio iam facillime percipitur; ac si continuo ipsam quantitatem z substituere velimus, nullum est dubium, quin ipsa series ab illustri *Condorcet* proposita oriatur.

DE