1776

De circulo maximo fixo in coelo constituendo, ad quem orbitae planetarum et cometarum referantur. Auctore L. Eulero

Leonhard Euler

DE CIRCVLO MAXIMO FIXO IN COELO CONSTITVENDO, AD QVEM ORBITAE PLANETARVM ET COMETARVM REFERANTVR.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum nunc quidem satis superque sit euictum, planetas ob eorum actionem mutuam in motu suo aliquam perturbationem pati, quae potissimum in promotione apheliorum cernitur: nullo modo dubitare licet, quin etiam positio et inclinatio mutua, quam orbitae planetarum inter se tenent, non leues mutationes subire debeat, quae quidem demum post longum temporis interuallum fiant notabiles. Hinc in recentioribus tabulis astronomicis progressio annua nodorum cuiusque planetae sollicite assignari solet, etiamsi Astronomi circa quantitatem huius motus parum inter se consentiant; ex quo intelligitur, plurimum adhuc abesse, vt ista nodorum mutatio satis sit explorata. Quod quo clarius appareat, ex tabulis tam *Cassinianis* quam *Halleianis* promotionem

tionem fecularem nodorum cuiusque planetae excerpamus

Promotio fecularis lineae nodorum

	ex tabulis Caffinianis			ex tabulis Halleianis		
Pro Saturno	1°	35′	11″	0°	30′	0″
Pro Ioue	0	40	9	1	23	20
Pro Marte	0	56	40	1	3	20
Pro Venere	0	56	40	0	51	40
Pro Mercurio	1	24	40	1	23	20.

§. 2. Cauffa huius enormis diffenfus manifefto in hoc eft quaerenda, quod ex recentioribus obferuationibus, etiamfi aliquot feculis a fe inuicem diftent, vix quicquam de vero loco nodi cuiusque planetae definire licet; cum error aliquot graduum in loco nodi commiffus tam exiguum diferimen in latitudine planetae pariat, vt in obferuationibus, nifi fint exquifitiffimae, vix fentiri poffit, propterea quod inclinationes orbitarum ad eclipticam nimis funt paruae, quam vt effectus ex tali errore oriundus fatis diftincte definiri queat. Antiquiffimae vero obferuationes plerumque tantopere funt incertae, vt errores plurium minutorum primorum in iis agnofci debeant; vnde nihil prorfus pro fitu nodorum, qui illo tempore locum obtinuerit, concludi poffit. Solae obferuationes illius temporis, vnde aliquid certi definiri poffe videtur, funt fine dubio occultationes ftellarum fixarum a planetis commemoratae, quae autem rariffime occurrunt; ac praeterea haud leuis incertitudo circa loca illarum ftellarum fixarum hunc hanc disquisitionem plurimum impedit. Multo maiorem autem fontem huius incertitudinis in inclinatione, quam orbitae planetarum antiquissimis illis temporibus tenuerint, mox detegemus.

§. 3. Quamuis autem Astronomi super motu nodorum tantopere inter se dissentiant: tamen in hoc inter se omnes conuenire videntur, quod inclinationem orbitarum ad eclipticam inuariabilem statuant, quemadmodum ex sequenti comparatione tabularum astronomicarum patebit

Inclinatio orbitarum planetarum ad eclipticam

	ex tabulis Cassinianis			ex tabulis Halleianis		
Pro Saturno	2°	30′	36″	2°	30′	10″
Pro Ioue	1	19	30	1	19	10
Pro Marte	1	50	54	1	51	0
Pro Venere	3	23	20	3	23	20
Pro Mercurio	7	0	0	6	59	20.

Verum ex hoc egregio consensu plus concludere non licet, quam quod his posterioribus seculis inclinationes planetarum ita se habuerint, prouti hic assignantur. Nihil autem hinc certi pro antiquoribus temporibus colligi potest, dum isti auctores sine vlla ratione quasi tacite supponunt, eandem inclinationem pro singulis planetis omni tempore locum habuisse; id quod non solum theoriae maxime aduersatur, vti mox clarissime ostendemus, verum etiam nullis plane obseruationibus confirmari potest. Atque hinc simul patebit, etiam positionem nodorum pro temporibus anti-

antiquissimis maxime incertam esse debere. Si enim his temporibus inclinatio cuiuspiam planetae maior minorue fuisset quam hodie deprehenditur, nihil certi nequidem ex occultationibus stellarum fixarum illis temporibus obseruatarum concludi poterit; vnde intelligitur, hanc incertitudinem etiam in motum nodorum maxime redundare. Ex quo patet, astronomos etiamnunc circa hoc argumentum in Astronomia vtique maximi momenti in grauissimis tenebris versari.

§. 4. Si quidem ecliptica, vti omnes Astronomi ante hac sunt arbitrati, in coelo perpetuo eundem locum occuparet: rationes non deessent, cur orbitae planetarum semper eandem inclinationem ad eclipticam seruarent, non obstante eorum actione mutua, prorsus vti inclinatio media orbitae lunaris ad eclipticam omni tempore eadem est obseruata. Verum cum nunc quidem nullum amplius dubium supersit, quin obliquitas eclipticae ab antiquissimis temporibus ingentem diminutionem sit passa, atque hinc etiam insignem alterationem non solum in longitudine stellarum fixarum, sed etiam in earum latitudine esse ortam: certum omnino est, eclipticam hodie longe alium situm inter stellas fixas occupare quam seculis praeterlapsis. Quare cum solae stellae fixae nobis in coelo loca reuera fixa exhibere sint censendae, si quidem hinc non nullas stellas peculiares excludamus, in quibus Astronomi quandam mutationem obseruarunt: certissimis rationibus iam est euictum, positionem eclipticae in coelo insigni mutationi esse

ob

obnoxiam. Tanto minus igitur praetendi poterit, orbitas planetarum respectu eclipticae eandem perpetuo inclinationem conseruare. Si enim hodie ecliptica vltra 20 minuta prima a situ quem tempore Hipparchi tenuit recessit, quo iure quisquam affirmare poterit, inclinationem orbitarum planetarum respectu eclipticae illis temporibus eandem fuisse, quanta hodie obseruatur?

§. 5. Quae cum ita sint, facile intelligitur, neque ex obseruationibus neque etiam ex theoria quidquam certi circa motum nodorum et inclinationem orbitarum planetarum cognosci et statui posse, quamdiu haec elementa ad circulum in coelo tantopere variabilem, qualis est ecliptica, referuntur: sed omnino necesse esse, vt ea perpetuo ad circulum quendam fixum in coelo, qui omni tempore eundem situm obtinuerit, reducantur; quandoquidem hinc demum concludi potest, quantum lineae nodorum super tali circulo fuerint promotae et quantam variationem inclinatio orbitae cuiusque planetae respectu eiusdem circuli sit passa. Atque adeo hanc necessitatem iam nonnulli insignes Geometrae, qui hoc ipsum argumentum tractare sunt aggressi, agnouerunt et aequatorem solarem proposuerunt, ad quem perpetuo orbitae planetarum referantur. Cum autem super hoc aequatore solari Astronomi nondum sint satis certi et introductio talis circuli ab ecliptica tantopere diuersi calculos nimium molestos postularet, quibus opus esset ad loca planetarum obseruata eo reducenda, praeterquam quod adhuc incertum fit, vtrum iste aequator Solis tandem non aliquam alterationem patiatur nec ne: multo commodius hoc negotium confici posse videtur, si loco talis circuli in coelo immoti ipsae eclipticae situs substituatur, quem certo quodam tempore obtinuit. Sic enim multo facilius loca planetarum, quae tempore quocunque fuerit obseruata, ad istam eclipticam determinatam reuocari poterunt; vnde non dubito, eum circulum maximum in coelo pro hoc scopo stabilire, quocum ipso initio huius seculi ecliptica conuenerit.

§. 6. Positio igitur quam ecliptica ipso initio huius seculi in coelo tenuit, nobis commodissime eum circulum fixum in coelo suppeditare videtur, ad quem quouis tempore tam loca planetarum et cometarum quam eorum orbitae referantur. Hic enim circulus reuera in coelo stellato tanquam immobilis spectari poterit, propterea quod perpetuo per easdem stellas fixas transibit eiusque respectu omnes plane stellae fixae semper eandem longitudinem et latitudinem sint habiturae, quem in finem etiam principium huius circuli, a quo longitudines stellarum computentur in ipso puncto aequinoctii verni, in quo illo tempore versabatur, constitui conueniet. Hinc autem eas paucissimas stellas fixas excludi oportebit, in quibus Astronomi quempiam alterationem animaduerterunt.

Tab. XVI. Fig. 4.

§. 7. Sit igitur M A B N iste circulus maximus immotus seu positio eclipticae pro initio huius seculi,

seculi, in quo A sit eius principium seu punctum aequinoctiale vernum, quod huic epochae respondebat, in quo existere fingamus stellam fixam notabilem, quae ergo perpetuo in hoc loco A haerere est censenda. Praeterea vero concipiamus aliam stellam fixam in B ab illo interuallo quadrantis $AB = 90^\circ$ remotam; ita vt his duabus stellis fixis in A et B positio nostri circuli maximi fixi perpetuo in coelo determinetur, vbi arcus A B a principio A secundum signorum seriem porrigi est censendus. Hoc igitur circulo constituto ante omnia inquirendum erit, quemnam situm ecliptica ad quoduis tempus tam ante quam post hanc epocham eius respectu tenuerit. Sic enim facillime omnia loca in coelo respectu eclipticae determinata ad nostrum circulum fixum M A B C transferri poterunt.

§. 8. Quo autem facilius hanc inuestigationem instituam, in subsidium vocabo ea, quae olim in Memor. Academiae Reg. Boruss. pro anno MDCCLIV. pag. 296. de Variationibus quibus latitudo stellarum fixarum est obnoxia, sum commentatus. Hinc igitur resumam regulam, cuius ope ex data tam longitudine quam latitudine cuiuspiam stellae fixae pro initio huius seculi eius locus pro quouis alio tempore facile assignari potest. Sit igitur λ longitudo cuiuspiam stellae fixae pro initio huius seculi, atque elapso vno seculo huius stellae longitudo erit $= \lambda + 1^\circ, 23'$, eius vero distantia a polo boreali eclipticae interea diminuitur quantitate $47\frac{1}{2}''$ sin. $\lambda + 6\frac{1}{2}''$ cos. λ;

 vnde

vnde facile eius latitudo innotescit, vti videre licet pag. 328 libri citati.

§. 9. Hinc igitur definiamus loca, vbi ambae nostrae stellae fixae A et B elapso vno seculo respectu eclipticae reperientur. Et cum stellae A longitudo fuerit $\lambda = 0$, eius longitudo post vnum seculum erit $1^\circ. 23'$; et quia eius distantia a polo eclipticae erat $= 90^\circ$, eius latitudo borealis erit $6\frac{1}{2}''$. Deinde alterius stellae B, quia eius longitudo initio huius seculi erat $\lambda = 3^s$, et distantia a polo pariter $= 90^\circ$ eius post vnum seculum longitudo erit $3^s. 1^\circ. 23'$, latitudo vero borealis $= 47\frac{1}{2}''$. Hinc igitur elapso vno seculo ecliptica eiusmodi tenebit situm, vt stellae A latitudo fiat $6\frac{1}{2}''$, stellae vero $B = 47\frac{1}{2}''$ vtraque borealis. Aequinoctium autem vernum tum ibi erit, vt stellae A longitudo euadat $1^\circ. 23'$.

Tab. XVI. Fig. 5. §. 10. Manente igitur $MABN$ nostro circulo immobili, qui simul erat ecliptica pro initio huius seculi seu pro anno 1700, hinc elapso vno seculo referat circulus Oab eclipticam pro illo tempore seu pro anno 1800, quae priorem circulum secet in puncto O; ad quam ex punctis A et B demittantur perpendicula Aa et Bb, quorum ergo illud esse debebit $6\frac{1}{2}''$ hoc vero $= 47\frac{1}{2}''$. Vt autem nostram determinationem generalem reddamus ponamus $Aa = a$ et $Bb = b$; tum vero pro puncto O, quod praecipue quaeritur, sit arcus $AO = x$ et angulus $AOa = \omega$, eritque ex triangulo OAa, $\sin a = \sin. x \sin. \omega$, et ob arcum $AB = 90^\circ$, ideoque $OB = 90^\circ + x$, ex triangulo

angulo BOb cof. x fin. $\omega =$ fin. b; vbi, quia arculi a et b funt quam minimi, noftrae aequationes ita exhiberi poterunt

I. fin. x fin. $\omega = a$ et II. cof. x fin. $\omega = b$

vnde quadratis addendis fiet fin. $\omega^2 = aa + bb$ fiue fin. $\omega = \sqrt{aa + bb} = \omega$, quia etiam angulus ω erit quam minimus. Tum vero aequatio prima per fecundam diuifa praebet tang. $x = \frac{a}{b}$. Fiat igitur nunc $a = 6\frac{1}{2}''$ et $b = 47\frac{1}{2}''$, ac reperietur $\omega = \sqrt{2298\frac{1}{2}''} = 48''$ proxime. Porro vero erit tang. $x = \frac{13}{95}$, hinc $l$tang. $x = 9{,}1162198$, ideoque $x = 7^\circ.\ 27'$; vnde reperitur arcus AO, a quo arcu plane non difcrepabit arcus $Oa = 7^\circ.\ 27'$, in quo fi capiatur arcus $a♈ = 1^\circ.\ 23'$ erit ♈ aequinoctium pro hoc tempore, fcilicet pro anno 1800.

§. 11. Cum iftae mutationes fint quam minimae, per fe patet, eas per plura fecula tam antecedentia quam fequentia eosdem valores retinere; vnde elapfis ω feculis ab epocha noftra 1700, hinc ex iisdem formulis colligetur angulus $AOa = \omega = n.\ 48$; arcus vero $AO = x$ manet vt ante $= 7^\circ.\ 27'$, ita vt punctum O in noftro circulo immoto quafi fixum fit cenfendum. Pro aequinoctio autem huius temporis capi debebit $a♈ = n\ 1^\circ.\ 23'$. At fi pofitionem eclipticae defideremus pro tempore quod n feculis noftram epocham anteceffit, inueftigatio fimili modo inftituetur. Si enim circulus $O\alpha\beta$ eclipticam huius temporis referat, punctum O etiamnunc eundem tenebit locum; ita vt fit arcus $AO = 7^\circ.\ 27'$. Tab. XVI. Fig. 6.

 Nunc

Nunc autem ecliptica $O\alpha\beta$ in regionem borealem verget, eritque angulus $AO\alpha = 48.n''$, at punctum aequinoctiale cadet in ♈, vt sit α♈ $= n\,1^\circ.\,23'$ seu $83\,n'$, ita vt sit arcus O♈ $= 7^\circ.\,27' + 83\,n$, cum casu praecedente fuisset $7^\circ.\,27' - 83\,n'$. Denique quia punctum O est fixum, notasse iuuabit, eius longitudinem initio nostrae epochae fuisse $11^s.\,22^\circ.\,33'$.

§. 12. Hoc igitur punctum O sine dubio maxime est notatu dignum, cum omni tempore ecliptica per id transeat, quod etiam de puncto coeli ipsi opposito est tenendum. Quare cum ecliptica semper per haec duo puncta transeat et circum ea motu angulari conuertatur, ea aptissime tanquam cardines eclipticae seu orbitae terrae spectare licet, hocque nomine ea etiam in posterum designabo. Haec ergo duo puncta in coelo ita sunt constituta, vt initio huius seculi eorum longitudo fuerit siue $11^s.\,22^\circ.\,33'$ siue $5^s.\,22^\circ.\,33'$. Atque orbita terrae circa hos cardines ita motu angulari vertetur, vt singulis seculis conficiat angulum $48''$ a septentrione meridiem versus. Tum vero cum initio huius seculi puncta aequinoctialia ab his cardinibus distarent quantitate $7^\circ.\,27'$, elapsis n seculis ab iis distabunt quantitate $7^\circ.\,27' - 83.\,n'$. Totidem vero seculis ante nostram epocham distantia punctorum aequinoctialium ab his cardinibus erit $7^\circ.\,27' + 83.\,n'$.

§. 13. Haec omnia perinde sum persecutus quasi essent certissima, et siue per obseruationes siue per theoriam accuratissime determinata, quod autem longe

longe fecus fe habet; quandoquidem ex obferuationibus vix quicquam certi definire licet. In theoria autem, qua loco fupra allegato fum vfus, ratio praecipue habetur maffae Veneris cuius quantitas adhuc penitus eft ignota. Interim tamen ob Solis parallaxin nuper accuratius definitam maffa Veneris aliquanto maior ftatuenda videtur, quam in illis calculis affumferam, vnde motus fecularis circa illos cardines aliquanto maior quam 48″ prodiret; atque ob eandem rationem interuallum A O quod inuenimus $= 7^{\circ}.\ 27'$ pro non parum incerto haberi debet. Aftronomorum igitur erit, haec elementa accuratius definire: ad quod fine dubio multo maior apparatus tam obferuationum quam Theoriae requiretur. Mihi autem hoc loco fufficiet, fontem detexiffe, vnde in pofterum maxima incrementa Aftronomiae funt petenda.

§. 14. Quemadmodum idea cardinum maxime ideoneum modum fuppeditat, motum et mutationes eclipticae ad quoduis tempus determinandi: ita etiam pro orbitis omnium planetarum dabuntur cardines circa quos fimili modo conuertantur; ita vt, fi pro qualibet orbita cogniti fuerint cardines et promotio fecularis, inde ad quoduis tempus vera pofitio huius orbitae in coelo commodiffime affignari poffit. Et cum ifte motus fit lentiffimus, facile intelligitur, eosdem cardines vna cum motu feculari nullam mutationem pati. Interim tamen, quoniam conftitutio cardinum a nodis reliquorum planetarum, a quorum actione hae mutationes producuntur, pendet,

det, si numerus seculorum nimis magnus statueretur, tandem in locis cardinum perinde atque in motu seculari quaepiam alteratio oriri posset; vnde patet, quantopere adhuc incerti simus, si tabulas astronomicas, quae nuncquidem ad coelum perfecte essent accommodatae, applicare vellemus. Ceterum vsu non carebit, si, quantum obseruationes permittunt, etiam in cardines reliquorum planetarum inquiramus.

De cardinibus orbitae Saturni eiusque motu seculari.

§. 15. Pro initio nostrae epochae ad annum 1700 tabulae astronomicae praebent nodum ascendentem

$3^s. 21^\circ. 13'. 29''$ secundum Cassini et
3. 21. 5. 6 secundum Halleium

at vero post vnum seculum elapsum seu anno 1800 locus nodi ascendentis est

$3^s. 22^\circ. 48'. 40''$ secundum Cassini et
3. 21. 35. 0 secundum Halleium.

Pro vtroque autem tempore eadem statuitur inclinatio

$2^\circ. 30'. 36''$ secundum Cassini et
2. 30. 10 secundum Halleium.

Tab. XVI. Fig. 7. §. 16. Sit igitur pro anno 1700 OAN ecliptica, in qua capiatur secundum Cassini arcus $AN = 3^s. 21^\circ. 13'$, et cum sit interuallum $= 7^\circ. 27$ erit arcus $ON = 3^s. 28^\circ. 40'$. Deinde in ecliptica pro anno 1800 capiatur arcus $\Upsilon n = 3^s. 22^\circ. 49'$ vnde

vnde ob arcum $OM = 7°.27' - 83' = 6°.4'$, erit arcus $On = 3^s.28°.53'$; vbi angulus ad O, vti vidimus, erat $48''$. Hinc si circulus ☋ N Ω repraesentet orbitam Saturni pro 1700, at $n\Omega$ orbitam pro 1800 erunt anguli $ON\Omega = 2°.30'.36'' = On\Omega$. Quoniam vero maxime probabile est, inclinationem per seculum aliquantillum mutari, statuamus angulum $On\Omega = 2°.30'.36'' + \alpha''$ et cum sit $Op = ON$, erit $np = 13'$. Nunc autem ob angulum O minimum, erit hoc perpendiculum $Np = 48''$ sin. $ON = 42''$. Hinc si orbita $N\Omega$ secet arcum On in s, ob angulum $Nsn = 2°.31'.24''$ erit spatium $sp = 15'.56''$, ideoque $sn = 28'.56''$; sicque in triangulo $s\Omega n$ habemus latus sn cum angulis $On\Omega = 2°.30'.(36 + \alpha'')$ et angulum externum Nsn, quem supposuimus proxime $2°.31'.24''$.

§. 17. Cum autem minima differentia in his angulis ingens discrimen in loco cardinis Ω pariat, istos angulos accuratissime nosse oporteret. Cum igitur angulus ONp a recto non discrepet, erit angulus $sNp = 87°.29'.24''$, vnde ex triangulo rectangulo Nsp reperitur cos. Nsp = sin. sNp cos. Np = sin. sNp, vnde colligitur angulus $Nsp = 2°.30'.36''$. Omni autem accuratione adhibita cum ex triangulo rectangulo ONp sit cos. ON = cot. O. cot. ONp, erit tang. $ONp = \frac{1\,\text{cot.}\,O}{\text{cos}.\,ON}$. Vnde si ponamus angulum $ONp = 90° + x''$, reperietur $x = -48''$ cos. ON, vnde fit $x = 23''$, ideoque $ONp\ 90°.0'.23''$; hincque $sNp = 87°.29'.47''$, ex quo colligitur $Nsp = 2°.30'.13''$,

 ideo-

ideoque notabiliter minor quam ante sumseramus. Concipitur ex n in arcum $N s$ demissum perpendiculum $n q$, eritque angulus $s n q = 90^\circ - 2^\circ. 30'. 13''$, cui addatur angulus $s n \Omega = 2^\circ. 30'. (36 + \alpha'')$, proditque angulus $\Omega n q = 90^\circ. 0'. (23 + \alpha'')$. Quod si ergo iste angulus esset rectus, arcus $n \Omega$ et $q \Omega$ forent quadrantes et angulus ad Ω aequaretur perpendiculo $n q$, cuius sinus $=$ sin. $s n$. sin. $q s n$; vnde fit perpendiculum $n q = 1'. 16''$, cui ergo aequalis foret angulus ad Ω, quo simul promotio orbitae secularis circa cardinem Ω indicaretur, existente arcu $n \Omega = 90^\circ$. Hoc ergo eueniret si angulus $\Omega n q$ esset rectus, hoc est si esset $\alpha = -23''$.

§. 18. Quod si autem cum Astronomis supponamus $\alpha = 0$, foret in triangulo $\Omega n q$ angulus $\Omega n q = 90^\circ + 13''$, quem, quo rem in genere consideremus, ponamus $90^\circ + n''$, eritque ex Trigometria $\text{tang.}\, n \Omega = \frac{\text{tang.}\, n q}{\text{cos.}\,(90^\circ + n'')} = -\frac{\text{tang.}\, n q}{\text{sin.}\, n''} = -\frac{76''}{n}$, ita vt si n fuerit numerus positiuus, arcus $n \Omega$ futurus sit quadrante maior. Ponamus ergo arcum $n \Omega = 90^\circ + z$, eritque $\text{cot.}\, z = \frac{76}{n}$. Inuento autem z reperietur angulus exiguus $\Omega = \frac{76''}{\text{sin.}\,(90^\circ + z)} = \frac{76''}{\text{cos.}\, z}$. Hinc igitur si sumamus $\alpha = 0$, vt sit $n = 23''$, erit $\cot z = \frac{76}{23} = 3,330$, ideoque $z = 16^\circ. 17'$; ex quo porro colligitur angulus ad $\Omega = 1'. 19''$, existente arcu $n \Omega = 90^\circ + 16^\circ. 17'$.

Tab. XVI. Fig. 8. §. 19. Secundum tabulas igitur Cassinianas, si omni numero essent absolutae, ambo cardines orbitae Saturni sequenti modo determinarentur. Sumatur in

circulo

circulo nostro fixo arcus $O\,N = 3^s.\ 28^\circ.\ 40'$, et per punctum N agatur circulus maximus ♄N☊, faciens angulum $O\,N$☊ $= 2^\circ.\ 30'.\ 36''$, in quo capiatur arcus N☊ $= 106^\circ.\ 17'$; tum vero ad alteram partem N♄ $= 73^\circ.\ 43'$, eruntque puncta ☊ et ♄ et orbitae Saturni cardines et ipse circulus ♄N☊ exhibebit orbitam Saturni pro anno 1700; tum vero si proximus ducatur circulus ♄n☊ ab illo declinans angulo $= 79''$, is positionem orbitae Saturni pro anno 1800 exhibebit. Sic itaque orbita Saturni singulis seculis circa suos cardines conuerteretur per angulum $= 79''$; vnde pro quouis tempore proposito tam ipsa positio orbitae Saturni quam eius intersectio et inclinatio ad eclipticam determinari poterit.

§. 20. Videamus nunc, quantum hae deter- Tab. XVI.
minationes sint discrepaturae ab iis quas tabulae Hal- Fig. 7.
leianae praebebunt. Iisdem igitur vestigiis insistentes habebimus arcum $O\,N = 3^s.\ 28^\circ.\ 32'$, et pro anno 1800 $O\,n = 3^s.\ 27^\circ.\ 39'$, inclinatio autem pro vtroque tempore statuitur $2^\circ.\ 30'.\ 10''$; hinc iterum erit $O\,p = O\,N = 3^s.\ 28^\circ.\ 32'$, vnde fit $np = -53'$. Praeterea vero erit vt ante $N\,p = 42''$ et angulus $O\,N\,p = 90^\circ + 23''$, hincque $s\ N\ p = 87^\circ.\ 30'.\ 13''$; Fig. 9.
vnde fit angulus $N\,s\,p = 2^\circ.\ 29'.\ 47''$, vnde colligitur $s\,p = 16'.\ 7''$ et hinc $s\,n = -36'.\ 53''$, quod interuallum quia prodiit negatiuum peculiari figura nobis erit opus, in qua erit $s\,n = 2213''$. Ducto igitur ex n ad s☊ perpendiculo $n\,q$, ob angulum $n\,s\,q = 2^\circ.\ 29'.\ 47''$, reperietur $n\,q = 1'.\ 36''$, et angulus $s\,n\,q = 87^\circ.\ 30'.\ 13''$, qui subtractus ab angulo

 $s\,n$☊

$s\,n\,\Omega = 177^\circ.\ 29'.\ 50''$ relinquit angulum $\Omega\,n\,q = 89^\circ.\ 59'.\ 37''$. Vnde cum sit $\text{tang.}\,n\,\Omega = \frac{\text{tang.}\,n\,q}{\text{cos.}\,\Omega\,n\,q}$, ponamus $\Omega\,n\,q = 90^\circ - 23''$ erit $\text{tang.}\,n\,\Omega = \frac{96}{23}$, ideoque $n\,\Omega = 76^\circ.\ 32'$, hincque porro angulus $\Omega = \frac{n\,q}{\text{sin.}\,n\,\Omega} = 99''$.

§. 21. Quoniam puncta N et n parum a se inuicem sunt remota, secundum Halleium ambo cardines orbitae Saturni ita erunt constituti in punctis Ω et ♄, vt sit $N\,\Omega = 76^\circ.\ 32'$ et $N\,♄ = 103^\circ.\ 28'$, qui ergo plurimum differunt a cardinibus Cassinianis. Maxime autem enorme discrimen cernitur in ipso motu, quo orbita Saturni circa hos cardines gyrari deberet, cum adeo iste motus angularis in contrarium sensum vergat, quandoquidem secundum Cassinum hic motus foret dextrorsum, per $79''$ vno seculo. Secundum Halleium idem motus sinistrorsum prodiit directus et quidem per 99 minuta secunda pro vno seculo; vnde patet Astronomos adhuc in maxima ignoratione versari circa variationem orbitae Saturni. Sin autem medium quoddam inter has duas determinationes assumere vellemus, orbita Saturni propemodum quiescens statui deberet. At vero post plura secula hoc discrimen in tantum augeri debet, vt mirum videatur, hanc litem per obseruationes antiquissimas dirimi nondum potuisse. Optimum autem remedium ex theoria peti poterit; cum enim Saturnus a solo Ioue perturbationem patiatur, eodem modo mutatio orbitae Saturni exploretur, quo mutationem eclipticae ex actionibus Iouis et Veneris olim definiui.

De

De cardinibus orbitae Iouis eiusque motu seculari.

§. 22. Pro initio nostrae epochae seu ad annum 1700 tabulae astronomicae praebent nodum ascendentem Iouis

$3^s.\ 7^\circ.\ 29'.\ 53''$ secundum Cassini
$3.\ 7.\ 34.\ 10$ secundum Halleium

et pro anno 1800 colligitur nodus ascendens

$3^s.\ 8^\circ.\ 10'.\ 1''$ secundum Cassini
$3.\ 8.\ 57.\ 30$ secundum Halleium.

Pro vtroque autem termino statuitur inclinatio

$1^\circ.\ 19'.\ 30''$ secundum Cassini
$1.\ 19.\ 10$ secundum Halleium.

Hinc ergo iam videmus etiam maximum discrimen inter determinationes ex tabulis Cassinianis et Halleianis deductas oriri debere; vtramque igitur definitionem seorsim inuestigemus.

§. 23. Incipiamus a tabulis Cassinianis et sit N locus nodi pro anno 1700 et n pro anno 1800, et cum sit $AN = 3^s.\ 7^\circ.\ 29'.\ 53''$ et $OA = 7^\circ.\ 27'$, erit $ON = 3^s.\ 14^\circ.\ 57'$. Similique modo pro anno 1800 cum sit $♈ n = 3^s.\ 8^\circ.\ 10'$ et $O ♈ = 6^\circ.\ 4'$, erit arcus $On = 3^s.\ 14^\circ.\ 14'$. Demittatur nunc perpendiculum Np, et ob angulum ad $O = 48''$ erit $Np = 48''$ sin. $ON = 46''$ et $Op = ON = 3^s.\ 14^\circ.\ 57'$, ideoque $pn = 43'$. Porro erit angulus Tab. XVII. Fig. 1.

$ONp = 90^\circ - \frac{Np}{cos. ON} = 90^\circ - 48''$ tang. $ON = 90^\circ + 3'$.

Hinc auferatur angulus $ONs = 1^\circ.\ 19'.\ 30''$, vt remaneat angulus $sNp = 90^\circ + 3' - 1^\circ.\ 19'.\ 30''$, qui a

$90°$ subtractus relinquit angulum $N s p = 1°. 16'. 30''$, vnde reperitur $s p = \frac{n p}{\text{tang. } N s p} = 32'. 12''$, vnde fit $s n = 10'. 48''$. Demisso nunc perpendiculo $n q$ ex triangulo $n s q$ erit angulus $s n q = 88°. 43'. 30''$ et $n q = n s$ sin. $N s p = 14''$. Deinde vero erit angulus $\Omega n q = 89°. 57'. 0''$, hincque concluditur arcus $\Omega n = 4°. 27'$ et $\Omega = \frac{n q}{\text{sin. } \Omega n} = 3'$. Hoc modo cardines forent in ☊ et ♃, ita vt esset propemodum $N \Omega = 4°. 27'$, ideoque N ♃ $= 175°. 33'$. Et circa hos cardines orbita Iouis verteretur interuallo vnius seculi per angulum $\Omega = 180''$ in sensum $s n$, qui motus sine dubio a veritate plurimum aberrare videbitur.

Tab. XVII. Fig. 2. §. 24. Secundum tabulas Halleii autem habebimus $O N = 3^s. 15°. 1'$ et $O n = 3^s. 15°. 1'$; hinc demisso perpendiculo $N p$ erit vt ante $N p = 43$ et $p s = 32'. 12''$; atque angulus $N s p = 1°. 16'. 30''$. Quare cum sit $O p = O N = O n$, erit $n p = o$, hincque $n s = 32'. 12''$. Nunc vero reperitur perpendiculum $n q = 43''$. Iam quia triangulum $n q s$ pro rectilineo haberi potest, erit angulus $s n q = 88°. 43'. 30''$, cui angulus $s n \Omega = 1°. 19'. 10''$ additus dat angulum $\Omega n q = 90°. 2'. 40''$; hincque ex triangulo $\Omega n q$ erit tang. $n \Omega = \frac{n q}{\text{cos. } \Omega n q} = -\frac{43''}{160''} = -0, 2687$, ergo arcus $\Omega n = 164°. 57'$. Denique reperietur ipse angulus $\Omega = \frac{n q}{\text{sin. } 15°. 3'} = 2'. 45''$.

§. 25. Hinc igitur abunde patet, quam immane discrimen inter tabulas Cassinianas et Halleianas oriatur; cum non solum loca cardinum vltra centum

centum sexaginta gradus discrepent, sed etiam motus seculares in plages contrarias vertanter. Ex quo fateri cogimur, nihil adhuc in Astronomia circa inclinationem mutuam orbitarum planetarum eiusque mutabilitatem nobis constare, vnde prorsus superfluum foret hanc inuestigationem pro reliquis planetis prosequi. Etiamsi enim ambae hae tabulae non tam enormiter discrepent, tamen nihil omnino inde pro cardinibus harum planetarum concludere licebit, cuius incertitudinis caussa in eo potissimum est sita, quod Astronomi orbitarum ad eclipticam inclinationem sine vlla ratione tanquam immutabilem spectauerint, cuius erroris emendatio magis ex theoria quam ex obseruationibus expectanda videtur, quam ob rem hoc argumentum sequenti Problemate claudamus.

Problema.

§. 26. *Datis cardinibus duorum planetarum cum vtriusque promotione seculari, ad quoduis temporis tam interfectionem quam inclinationem vtriusque orbitae determinare, siquidem haec elementa pro nostra epocha 1700 fuerint cognita.*

Solutio.

Sit pro nostra epocha 1700 P N orbita vnius planetae et Q N orbita alterius, puncta vero P et Q cardines harum orbitarum et punctum N earum interfectio; dati ergo erunt arcus $PN = p$ et $QN = q$, cum inclinatione mutua seu angulo $PNQ = i$. Praeterea vero sit motus secularis prioris orbitae $PN = \alpha$, alterius vero orbitae $QN = \beta$, vterque in eundem Tab. XVII. Fig. 3.

sen-

sensum N T. Hinc iam quaeri debeat positio harum orbitarum post elapsa n secula, quarum intersectio tum cadat in punctum n, ita vt tum ambae orbitae futurae sint Pn et Qn. Habebimus igitur angulos $NPn = n\alpha$ et $NQn = n\beta$, qui anguli pro minimis haberi possunt. Iam primo ex N in Pn demittatur perpendiculum N T, eritque $NT = n\alpha\,\text{sin.}\,p$ et angulus $PNT = 90^\circ - n\alpha\,\text{cos.}\,p$; propterea quod $PT = PN$ et angulus PNT minime a recto discrepabit. Sit iam S intersectio arcuum QN et Pn et in triangulo SNT erit angulus $SNT = 90^\circ - n\alpha\,\text{cos.}\,p - i$ hincque quia triangulum S N T vt planum spectari potest, erit angulus $NST = n\alpha\,\text{cos.}\,p + i$, vnde colligitur arcus

$$NS = \frac{n\alpha\,\text{sin.}\,p}{\text{sin.}\,(n\alpha\,\text{cos.}\,p + i)} \text{ et } ST = \frac{NT}{\text{tang.}\,(n\alpha\,\text{cos.}\,p + i)}$$

quibus inuentis erit $QS = q - \frac{n\alpha\,\text{sin.}\,p}{\text{sin.}\,(n\alpha\,\text{cos.}\,p + i)}$, quem breuitatis gratia statuamus $= s$. Nunc igitur in triangulo QSn data erunt $1^\circ.\, QS = s = q - \frac{n\alpha\,\text{sin.}\,p}{\text{sin.}\,(n\alpha\,\text{cos.}\,p + i)}$; $2^\circ.$ ang. $SQn = n\beta$ ac $3^\circ.$ ang. $NSn = n\alpha\,\text{cos.}\,p + i = \omega$. Ad hoc igitur triangulum resoluendum ex Q in arcum Pn demittatur perpendiculum QV, eritque ex triangulo QSV $\text{sin.}\,QV = \text{sin.}\,s\,\text{sin.}\,\omega$ et $\text{tang.}\,SV = \text{tang.}\,s\,\text{cos.}\,\omega$, praeterea $\text{tang.}\,SQV = \frac{\text{cot.}\,\omega}{\text{cos.}\,s}$. Sit autem breuitatis gratia SQV $\text{fin.}\,SQV = v$, eritque angulus $VQn = v + n\beta$ ita vt in triangulo rectangulo QVn habeamus latus QV cum angulo VQn, vnde reperimus $\text{tang.}\,Qn = \frac{\text{tang.}\,QV}{\text{cos.}\,v + n\beta}$, ac denique $\text{sin.}\,QnP = \frac{\text{sin.}\,QV}{\text{sin.}\,Qn}$ et

$$\text{sin.}\,Vn = \text{sin.}\,Qn.\,\text{sin.}\,(v + n\beta)$$

vnde si subtrahatur S V remanebit Sn, cui propterea addi-

addi debet arcus P S = P N − S T. Hoc igitur modo inuenti sunt ambo arcus P n et Q n, qui referunt ambas orbitas pro tempore praescripto, vna cum earum intersectione n et inclinatione mutua scilicet angulo Q n V; sicque hoc problema perfecte est resolutum. Vbi hoc tantum adiecisse iuuabit, quod si positio harum orbitarum ad tempus quod n seculis nostram epocham praecessit desideretur, tantum numerum n negatiuum capi debere.

Solutio alia eaque elegantissima eiusdem problematis.

§. 27. Maneant eaedem denominationes vt ante, scilicet P N $= p$, Q N $= q$, inclinatio P N Q $= i$, et anguli P $= n\alpha$, Q $= n\beta$; tum ex N in arcus P n et Q n demittantur perpendicula N R et N S, vt fiat N R $= n\alpha$ sin. p et N S $= n\beta$ sin. q, vnde ob angulos p et q minimos erit etiam P R $= p$ et Q S $= q$; anguli vero erunt P N R $= 90° - n\alpha$ cos. p et Q N S $= 90° - n\beta$ cos. q, ideoque angulus Tab. XVII. Fig. 4.

$$P N S = 90° + i - n\beta \text{ cos. } q,$$

hincque angulus

$$R N S = i - n\beta \text{ cos. } q + n\alpha \text{ cos. } p.$$

Hoc modo nostrum problema eo reducitur, vt ex arcubus N R et M S vna cum angulo intercepto R N S definiantur arcus R n et S n vna cum ipso angulo n, quod est insigne Problema trigonometricum sphaericum, cuius Solutio ita elegantissime expeditur.

§. 28. Ponamus breuitatis gratia arcus NR $= r = n\alpha$ sin. p, NS $= s = n\beta$ sin. q et angulum RNS $= \Phi = i - n\beta$ cos. $q + n\alpha$ cos. p. Iam producantur arcus RN et SN retro vsque in r et s, vti arcus Rr et Ss fiant quadrantes, eritque punctum r polus circuli PRn et s polus circuli QSn, vnde arcus ex n ad hos polos r et s ducti scilicet nr et ns erunt etiam quadrantes, qui ergo ad arcum rs erunt perpendiculares et arcus rs mensura erit anguli rns. Quia igitur anguli rnR et snS sunt recti, erit angulus $rns =$ RnS, quem hic potissimum quaeri oportet. Deinde angulus Rrn aequabitur arcui Rn, cuius ergo complementum erit angulus nrN. Simili modo erit angulus Ssn aequalis arcui Sn, quem ergo angulus rsN angulo recto superat; ita vt, si ponamus arcus quaesitos R$n = x$ et S$n = y$, futurus sit angulus nrN $= 90° - x$ et angulus nsN $= 90° + y$.

§. 29. Nunc igitur tota nostri problematis Solutio reducitur ad resolutionem trianguli sphaerici Nrs, in quo cognita sunt latera N$r = 90° - r$ et N$s = 90° - s$, vna cum angulo intercepto rN$s = \Phi$. Hinc ergo resolutio huius trianguli primo suppeditabit tertium latus rs, cui aequalis est angulus rns, quem vocemus $= \Psi$, vt sit $nr = \Psi$; secundo angulus Nrs dat $90° - x$; tertio vero angulus N$sr = 90° + y$, sicque tria nostra incognita x, y et Ψ innotescunt.

§. 30. Resolutio autem huius trianguli primo nobis praebet

$\cos. rs = \cos. sNr \sin. Nr \sin. Ns + \cos. Nr \cos. Ns$

sicque erit

$$\cos. \psi = \cos. \Phi \cos. r \cos. s + \sin. r \sin. s.$$

Praeterea vero regulae praebent

$$\text{tang.}(90° - x) = \frac{\sin.(90° - r)\sin.\Phi}{\cos.(90° - r)\sin.(90° - s) - \sin.(90° - r)\cos.(90° - s)\cos.\Phi} \text{ et}$$

$$\text{tang.}(90° + y) = \frac{\sin.(90° - s)\sin.\Phi}{\sin.(90° - r)\cos.(90° - s) - \cos.(90° - r)\sin.(90° - s)\cos.\Phi}$$

quae ergo reducuntur ad sequentes formas

$$\cot. x = \frac{\cos. r \sin. \Phi}{\sin. r \cos. s - \cos. r \sin. s \cos. \Phi} \text{ et } -\cot. y = \frac{\cos. s \sin. \Phi}{\cos. r \sin. s - \sin. r \cos. s \cos. \Phi}$$

quae hoc modo fient commodiores

$$\text{tang.}\, x = \frac{\text{tang.}\, r \cos. s}{\sin. \Phi} - \sin. s \cot. \Phi \text{ et}$$

$$\text{tang.}\, y = \sin. r \cot. \Phi - \frac{\cos. r \,\text{tang.}\, s}{\sin. \Phi}.$$

Sicque omnes tres nostras incognitas x, y et Φ perquam succincte expressimus.

§. 31. Quia autem nostro casu angulus ψ quam minime ab angulo Φ discrepabit, statuamus $\psi = \Phi + \omega$, ita vt ω sit angulus quam minimus, eritque $\cos. \psi = \cos. \Phi - \omega \sin. \Phi$. Hinc ergo habebimus

$$\cos. \Phi - \omega \sin. \Phi = \cos. \Phi \cos. r \cos. s + \sin. r \sin. s.$$

Quia vero est $r = n\alpha \sin. p$ et $s = n\beta \sin. q$, ideoque quam minimi, erit $\cos. r = 1 - \frac{1}{2} nn\alpha\alpha \sin. p^2$ et $\cos. s = 1 - \frac{1}{2} nn\beta\beta \sin. q^2$; tum vero $\sin. r = n\alpha \sin. p$ et $\sin. s = n\beta \sin. q$, vnde fiet

$$\cos.\Phi - \omega \sin.\Phi = \cos.\Phi - \tfrac{1}{2} nn\alpha\alpha \sin. p^2 \cos.\Phi - \tfrac{1}{2} nn\beta\beta \sin. q^2 \cos.\Phi + nn\alpha\beta \sin. p \sin. q,$$

vnde colligitur

$$\omega = \frac{nn\alpha\alpha \sin. p^2 + nn\beta\beta \sin. q^2}{2 \,\text{tang.}\, \Phi} - \frac{nn\alpha\beta \sin. p \sin. q}{\sin. \Phi}.$$

 Vnde

Vnde patet, hanc differentiam ω inter angulos Φ et ψ esse quasi infinite paruum secundi ordinis, quod ergo penitus neglectum dabit angulum

$$P n Q = \Phi = i + n \alpha \operatorname{cos.} p - n \beta \operatorname{cos.} q,$$

ita vt inclinatio orbitarum post n secula crescat quantitate $n \alpha \operatorname{cos.} p - n \beta \operatorname{cos.} q$, quam mutationem ergo patet modo positiuam modo negatiuam fieri posse.

§. 32. Si simili modo sumamus

$$\operatorname{fin.} r = n \alpha \operatorname{fin.} p, \quad \operatorname{fin.} s = n \beta \operatorname{fin.} q$$

et $\operatorname{cos.} r = 1$ et $\operatorname{cos.} s = 1$, reperiemus binas reliquas incognitas x et y sequenti modo expressas:

$$\operatorname{tang.} x = \frac{n \alpha \operatorname{fin.} p}{\operatorname{fin.} \Phi} - n \beta \operatorname{fin.} q \operatorname{cot.} \Phi \text{ et}$$

$$\operatorname{tang.} y = n \alpha \operatorname{fin.} p \operatorname{cot.} \Phi - \frac{n \beta \operatorname{fin.} q}{\operatorname{fin.} \Phi},$$

vnde patet hos arcus $Rn = x$ et $Sn = y$ esse quam minimos; et cum sit proxime $\Phi = i$, hunc valorem sumsisse sufficiet, ex quibus colligitur, fore arcus nostros quaesitos

$$R n = x = \frac{n \alpha \operatorname{fin.} p - b \beta \operatorname{fin.} q \operatorname{cof.} i}{\operatorname{fin.} i} \text{ et}$$

$$S n = y = \frac{n \alpha \operatorname{fin.} p \operatorname{cof.} i - n \beta \operatorname{fin.} q}{\operatorname{fin.} i}.$$

Hocque modo nacti sumus Solutionem facillimam nostri Problematis, quae quidem initio maxime abstrusa erat visa. Atque hinc iam luce meridiana clarius apparet, quam perperam ab Astronomis inclinatio orbitarum planetarum mutua tanquam variabilis spectari soleat, et quantopere necessarium sit vt haec doctrina maximi in Astronomia momenti omni studio penitius exploretur.

Supple-

Supplementum.

§. 33. Quoniam igitur Theoria de mobilitate orbitarum planetarum poſtulat, vt in qualibet orbita duo puncta ſibi e diametro oppoſita, quae eius cardines appellamus, aſſignentur, circa quos ea orbita ſaltem per interuallum aliquot ſeculorum conuertatur, ſimulque motus ſecularis definiatur, hos ambos cardines cuiusque orbitae a ſe inuicem diſtingui conuenit, quorum alterum vocabimus aſcendentem alterum vero deſcendentem. Ita ſi P et p fuerint ambo cardines cuiuspiam orbitae, ita vt PMp referat ſemicirculum, ponamus ordinem ſignorum a P ad p per M; Tab. XVII. Fig. 5. tum vero elapſo ſeculo hic ſemicirculus in ſitum Pmp perueniat magis ad auſtrum vergentem; punctumque P huius orbitae cardinem deſcendentem appellare licebit punctum vero p cardinem adſcendentem, quia altera orbitae medietas circa p boream verſus aſcendit. Ipſe vero angulus Mpm nobis erit motus ſecularis.

§. 34. Quod ſi iam puncta P et Q fuerint cardines deſcendentes duarum orbitarum PN et QN, Fig. 6. quae noſtra epocha anno 1700 ſe mutuo interſecent in puncto N ſub angulo $PNQ = i$, pro priore autem motus ſecularis fuerit $= \alpha$, pro altera vero $= \beta$; tum pro mutatione harum orbitarum elapſis n ſeculis facta inuenienda ſumantur anguli

$$NPn = n\alpha \text{ et } NQn = n\beta,$$

et ponantur arcus $PN = p$ et $QN = q$. Nunc vero interſectio cadat in punctum n, eritque vti ante inuenimus inclinatio mutua orbitarum

$$PnQ = i + n\alpha \operatorname{coſ.} p - n\beta \operatorname{coſ.} q.$$

 Prae-

Praeterea vero arcus

$$Pn = p + x = p + \frac{n\,\alpha\,\text{fin.}\,p - n\,\beta\,\text{fin.}\,q\,\text{cof.}\,i}{\text{fin.}\,i}$$

et arcus

$$Qn = q + y = q + \frac{n\,\alpha\,\text{fin.}\,p\,\text{cof.}\,i - n\,\beta\,\text{fin.}\,q}{\text{fin.}\,i}.$$

Harum igitur formularum ope omnia quae huc fpectant multo faciliori calculo expediri poterunt, quam ante eft factum. Id quod exemplis reliquorum planetarum illuftrabimus.

§. 35. Sit igitur P N orbita Terrae, ideoque $\alpha = 48''$; at Q N orbita Martis pro tempore noftrae epochae, et geminae tabulae aftronomicae quibus ante fumus vfi fatis vnanimiter praebent angulum P N Q $= 1^\circ.\ 50'.\ 54''$ fec. Caffinum et $1^\circ.\ 51'.\ 0''$ fec. Halleium, vnde medium fumendo fit angulus P N Q $= 1^\circ.\ 50'.\ 57''$; longitudo autem nodi afcendentis $1^s.\ 17^\circ.\ 24'.\ 42''$, vnde addendo $7^\circ.\ 27'$ fit arcus P N $= p = 1^s.\ 24^\circ.\ 52'$. Pro anno 1800 autem haec nodi longitudo affignatur $1^s.\ 18^\circ.\ 28'.\ 2''$, eiusque ergo promotio fecularis refpectu aequinoctii erat $3'.\ 20''$, vnde pro n feculis colligitur arcus $Pn = 1^s.\ 17^\circ.\ 25' + 7^\circ.\ 27' - 83'\,n + n.\ 1^\circ.\ 3'.\ 20''$ ideoque $x = n.\ 1^\circ.\ 3'.\ 20'' - 33''\,n$, vnde omnia ad minuta fecunda reducendo erit

$$-1180'' = \frac{48''\,\text{fin.}\,p - \beta\,\text{fin.}\,q\,\text{cof.}\,i}{\text{fin.}\,i} = 1216 - \frac{\beta\,\text{fin.}\,q}{\text{tang.}\,i} \text{ ideoque}$$

$$\beta\,\text{fin.}\,q = 2396.\ \text{tang.}\,i = 77.$$

Dummodo ergo quantitatum β et q alteram noffemus, altera hinc determinaretur.

§. 36.

§. 36. Cum autem nihil nobis plane constet de mutatione inclinationis seculari, nihil amplius etiam nobis hinc concludere licet. Ponamus autem pro anno 1800 inclinationem fuisse $1^\circ.\ 50'.\ 57'' + \delta$; ita vt δ sit augmentum seculare inclinationis, atque esse oportebit $n\,\delta = n\,\alpha \operatorname{cos.} p - n\,\beta \operatorname{cos.} q$, siue $\delta = 27'' - \beta \operatorname{cos.} q$, ideoque $\beta \operatorname{cos.} q = 27'' - \delta''$. Quod si ergo hoc incrementum δ fuerit exploratum, ambas quantitates β et q assignare poterimus; vicissim autem si innotuerit quantitas β, ambae litterae δ et q definiri poterunt. At vero ex priore aequatione $77 = \beta \operatorname{sin.} q$ manifestum est, numerum β minorem quam 77 esse non posse, vnde si motum secularem Martis statuere velimus $\beta = 77''$, foret $q = 90^\circ$, hincque $\delta = 27$, siue augmentum seculare inclinationis orbitae Martis foret $27''$; quod fortasse a veritate parum recedit. Neque ergo super hoc articulo in omnimoda ignoratione versamur, quoniam certi sumus, motum secularem orbitae Martis maiorem esse quam 77, id quod maxime verisimile videtur; cum actio Iouis in Martem non solum maior sit quam in Terram, sed etiam Mars ab ipsa Terra praeterquam a Venere sollicitetur.

§. 37. Simili modo orbitam Veneris contemplemur, pro qua nouimus esse $i = 3^\circ.\ 23'.\ 20''$; et pro anno 1700 erat longitudo nodi Veneris ascendentis $2^s.\ 13^\circ.\ 57'.\ 53''$, hincque $p = 2^s.\ 21^\circ.\ 4'.\ 53''$. At pro anno 1800 tabulae dant longitudinem eiusdem nodi $2^s.\ 14^\circ.\ 49'.\ 33''$. Vnde si statim sumamus

mus $n = 1$ et addamus $6^\circ. 4'$ habebimus

$$p + x = 2^s. 20^\circ. 53'. 33'', \text{ ita vt fit}$$

$$x = -11'. 20'' = -680'' = \frac{48 \sin. p - \beta \sin. p \cos. i}{\sin. i}.$$

Eſt vero $\frac{48'' \sin. p}{\sin. i} = 802''$ vnde fit $\beta \sin. q = 1482''$ tang. $i = 88''$. Atque hinc iam diſcimus motum ſecularem orbitae Veneris certe minorem eſſe non poſſe quam $88''$. Quod ſi autem ſumamus eſſe $\beta = 88$ ideoque $q = 90$ operitur angulus $P n Q = i + \alpha \cos. p = 3^\circ. 23'. 27''$, ita vt inclinatio orbitae Veneris ſingulis ſeculis augmentum caperet $7''$, quod ſatis probabile videtur. Vbi notaſſe iuuabit ſi arcus q maior minorue eſſet quam 90°, pro β maiorem valorem accipi debere quam 88 ſec.

§. 38. Euoluamus etiam hanc inueſtigationem pro orbita Mercurii, cuius inclinatio ad eclipticam anno 1700 erat $i = 6^\circ. 59'. 20$ ſec. Halleium et longitudo nodi aſcendentis $1^s. 14^\circ. 47'. 20''$ et pro anno 1800 $= 1^s. 16^\circ. 10'. 40''$, vnde ſumto $n = 1$ habebimus $p = 1^s. 22^\circ. 14'. 20''$ et $p + x = 1^s. 22^\circ. 14'. 40''$ ideoque

$$x = \ldots\ldots = \frac{48'' \sin. p - \beta \sin. q \cos. i}{\sin. i}.$$

Eſt vero $\frac{48 \sin. p}{\sin. i} = 312''$, vnde fit $\beta \sin. q = 292$ tang. $i = 36''$, vnde patet motum ſecularem orbitae Mercurii minorem eſſe non poſſe quam $36''$. Quod ſi autem ſumamus eſſe $\beta = 36''$, ideoque $q = 90^\circ$, reperitur angulus $P n Q = i + \alpha \cos p = 6^\circ. 59'. 49''$, ita vt inclinatio orbitae Mercurii ſingulis ſeculis augmentum capiat $29''$; vbi eadem obſeruatio quae ſupra valet, ſcilicet ſi arcus q maior minorue eſſet quam 90° pro β maiorem valorem accipi debere quam $36''$.

§. 39.

§. 39. His quasi praegustatis, quae adhuc tam ex obseruationibus quam Theoria deducere licuit, vix quicquam vlterius ex vtroque fonte expectare posse videtur, nisi circulus reuera immobilis in coelo stabiliatur, ad quem tam loca obseruata quam effectus ex mutua planetarum actione oriundi referantur, vnde has meditationes sequenti problemate concludamus.

Problema.

§. 40. *Si tempore quocunque locus planetae in coelo more solito fuerit obseruatus, eius situm ad circulum nostrum fixum in coelo reducere.*

Solutio.

Ponamus obseruationem factam esse ante epocham nostram 1700 et planetae longitudinem deprehensam fuisse $= L$, latitudinem vero $= \Lambda$, quam vt borealem spectemus. Iam tempus obseruationis subtrahatur ab epocha nostra 1700 et interuallum annorum per 100 diuisum praebeat n secula. His positis referat O A B nostrum circulum in coelo fixum seu eclipticam pro 1700, in quo punctum O sit cardo eclipticae descendens, punctum A vero principium eclipticae hoc tempore siue punctum aequinoctiale, et iam vidimus fore arcum $OA = 7^\circ. 27'$. Iam pro tempore obseruationis positio eclipticae magis boream versus vergebat, quae ergo repraesentetur per circulum $O \Upsilon L$ a circulo nostro fixo declinans angulo $\Upsilon O A = 48\, n''$, in quo a puncto O capiatur arcus $O \Upsilon = 7^\circ. 27' + 83' n$, eritque punctum Tab. XVII. Fig. 7.

ctum ♈ aequinoctium vernum tempore obseruationis. Tum vero fuerit planeta in puncto S, vnde ad eclipticam illius temporis ducto arcu normali SL erat arcus ♈ L longitudo obseruata $= L$, at arcus L S latitudo obseruata $= A$; quare si ex S ad nostrum circulum fixum ducatur arcus normalis SM, arcus AM referet longitudinem respectu circuli fixi et M S latitudinem eiusdem respectu; quas igitur inuestigare nobis propositum est. Hunc in finem vocemus quantitates datas scilicet arcum $OL = 7^\circ.27' + 83''n + L = \alpha$ et arcum $LS = b$; tum vero quaesitas, scilicet arcum $OM = x$ et $MS = y$, ita vt $x - 7^\circ.27' = AM$ praebeat longitudinem planetae respectu circuli fixi et $SM = y$ eius latitudinem fixam. Nunc solutionem simili modo adstruamus, vti in problemate praecedente: arcus nempe LS et MS producantur vsque in l et m, vt toti arcus Ll et Mm fiant quadrantes, ideoque puncta l et m poli circulorum OL et OM. Hinc arcus ex O ad haec puncta l et m ducti erunt etiam quadrantes, illae normalis ad circulum OL hic vero ad OM, vnde angulus lOm angulo LOM aequalis hoc est $= 48''n$, quem breuitatis gratia littera ☊ designemus, cuius ergo mensura erit arcus $lm = \omega$; porro vero habebimus $OlL = \alpha$ et angulum $OmM = x$, vnde cum arcus lm ad quadrantes Ol et Om sit normalis, erunt anguli $mlS = 90^\circ - \alpha$ et $lmS = 90^\circ + x$. His obseruatis in triangulo sphaerico Slm cognita erunt haec tria elementa 1°.) latus $Sl = 90 - b$, 2°.) latus $lm = 48n'' - \omega$, 3°.) angulus interceptus $mlS = 90^\circ - \alpha$,

vnde

vnde quaeri oportet 1°.) tertium latus $Sm = 90° - y$; tum vero angulum $m l S = 90° + x$, vnde ergo colligimus tam x quam y; ita vt non indigeamus angulo $l S m$. At vero regulae trigometricae nobis dant

$$\text{cof. } S m = \text{cof. } m l S \cdot \text{fin. } l m \text{ fin. } l S + \text{cof. } l m \text{ cof. } l S,$$

vnde colligimus

$$\text{fin. } y = \text{fin. } a \text{ fin. } \omega \text{ cof. } b + \text{cof. } \omega \text{ fin. } b; \text{ deinde}$$

$$\text{tang. } l m s = \frac{\text{fin. } l S \text{ fin. } m l S}{\text{cof. } l S \text{ fin. } l m - \text{fin. } l S \text{ cof. } l m \text{ cof. } m l S},$$

quae formula in fymbolis dat

$$-\text{cot. } x = \frac{\text{cof. } b \text{ cof. } a}{\text{fin. } b \text{ fin. } \omega - \text{cof. } b \text{ cof. } \omega \text{ fin. } \omega} \text{ fiue}$$

$$\text{tang. } x = \frac{\text{cof. } b \text{ cof. } \omega \text{ fin. } a - \text{fin. } b \text{ fin. } \omega}{\text{cof. } a \text{ cof. } b},$$

ex quibus formulis ambae noftrae incognitae x et y funt computandae. Hic autem calculus adhuc multo facilior reddi poteft, perpendendo quod latus $lm = \omega = 48 n''$, femper eft quafi infinite paruus, ita vt poni poffit cof. $\omega = 1$ et fin. ω ipfi angulo ω aequalis: hoc modo nancifcemur

I. $\text{fin. } y = \omega \text{ fin. } a \text{ cof. } b + \text{fin. } b$,

vnde patet arcum y aliquanto maiorem effe quam b fcilicet erit

$$y = b + \omega \text{ fin. } a = b + 48'' n \text{ fin. } a$$

II. $\text{tang. } x = \frac{\text{fin. } a \text{ cof. } b - \omega \text{ cof. } b}{\text{cof. } a \text{ cof. } b} = \text{tang. } a - \frac{\omega}{\text{cof. } \alpha} \text{ tang. } b$,

vnde videmus effe x aliquanto minus quam a. Ponamus ergo $x = a - \alpha$, eritque $\text{tang. } x = \text{tang. } a - \frac{\alpha}{\text{cof. } a^2}$, vnde fit $\alpha = \omega \text{ cof } a \text{ tang. } b$ ideoque $x = a - 48 n'' \text{ cof. } a \text{ tang. } b$. Reftituamus igitur loco a et b valores affumtos

tos, ac reperiemus tam longitudinem quam latitudinem veram refpectu noftri circuli fixi: fcilicet longitudinem

$$A\,M = L + 83\,n' - 48''\,n\ \text{cof.}\ a\ \text{tang.}\ b$$

et latitudinem $MS = b + 48\,n''$ fin. a, exiftente vt vidimus $a = 7^\circ.\ 27' + 38'\,n + L$ et $b = \Lambda$. Sicque facillimo calculo femper hanc reductionem expedire licet.

OBSER-