1776

De traiectu citissimo stellae per duos circulos almucantarath datos pro qualibet elevatione poli. Auctore L. Eulero

Leonhard Euler

DE TRAIECTV CITISSIMO STELLAE PER DVOS CIRCVLOS ALMICANTARATH DATOS PRO QVALIBET ELEVATIONE POLI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Referat circulus B A Z P a b meridianum loci propositi, in quo punctum Z sit zenith et P polus; tum vero circuli A M a et B N b ambo almicantarath dati, ac ponamus quantitates, quae nobis dantur, 1°. complementum eleuationis poli seu distantiam poli a zenith $PZ = c$. 2°. Distantiam superioris almicantarath A a a zenith Z siue arcum $ZA = Za = a$, inferioris autem almicantarath distantiam a zenith $ZB = Zb = b$, interuallum autem inter hos circulos vocetur breuitatis gratia $AB = d = b - a$. His igitur datis quaeritur stella S, quae motu suo diurno percurrens parallelum S M N ambos almicantarath ita secet in punctis M et N, vt ductis circulis horariis P M et P N angulus M P N fiat omnium minimus, quandoquidem hic angulus praebet mensuram temporis, quo stella spatium inter hos almicantarath contentum traiiciat. Pro hac igitur Tab. XVI. Fig. 1.

tur ſtella ponamus eius diſtantiam a polo $PS = PM = PN = s$; vnde ſtatim innoteſcet declinatio huius ſtellae. Vocetur vero etiam angulus horarius $MPN = Z$.

§. 2. Ante omnia autem hic obſeruandum occurrit, hanc quaeſtionem tantum ad eas ſtellas fixas extendi, quae motu ſuo diurno per ambos circulos Aa et Bb tranſeunt. Primo igitur omnes eae ſtellae hic excluduntur, quarum diſtantia a polo minor eſt arcu $Pb = b - c$, propterea quod tales ſtellae non tranſirent per circulum Bb; deinde etiam excluduntur omnes ſtellae, quarum diſtantia a polo maior eſt arcu $PZA = a + c$, propterea quod tales ſtellae non per circulum ſuperiorem Aa tranſirent. His excluſis eae tantum ſtellae fixae relinquuntur, quorum diſtantia maior eſt quam $b - c$, ſimul vero minor quam $a + c$; ita vt iam certum ſit diſtantiam quaeſitam $PS = s$ contineri intra hos limites $s > b - c$ et $s < a + c$; vnde intelligitur, limitem $a + c$ maiorem eſſe debere quam $b - c$. Quodſi enim foret $a + c < b - c$ ſiue $2c < b - a$ ſiue etiam $c < \frac{1}{2}d$, quaeſtio noſtra foret impoſſibilis; quocirca neceſſe eſt, vt arcus $PZ = c$ ſuperet dimidium diſtantiae $AB = d$. Hoc autem niſi contigerit, etiam ſolutio, quam quaerimus, fieri debet imaginaria.

§. 3. Quoniam igitur ea diſtantia ſtellae a polo $PS = s$ requiritur, vnde angulus MPN oriatur omnium minimus, ſecundum methodum maximorum et minimorum concipiamus aliam ſtellam s a quaeſita infinite parum remotam, quae motu ſuo diurno

diurno ambos almicantarath traiiciat in punctis m et n; ac ductis horariis Pm et Pn necesse est, vt angulus mPn etiamnunc sit aequalis angulo MPN. Vnde manifesto sequitur, angulos elementares MPm et NPn inter se aequales esse debere; quare cum sit $PM = PN$ et $pm = pn$, ambo triangula elementaria PMm et PNn inter se perfecte erunt aequalia, ideoque erunt etiam anguli PMm et PNn inter se aequales. Auferantur vtrinque anguli recti PMS et PNS ac remanebit ista aequalitas

$$\text{ang.}\,SMm = \text{ang.}\,SNn \text{ siue ang.}\,SMA = \text{ang.}\,SNB.$$

Quoniam igitur ista aequalitas ex conditione minimi est deducta, distantia stellae a polo $PS = s$ ita definiri debet, vt parallelus a puncto P descriptus ad ambos nostros almicantarath Aa et Bb aequaliter inclinetur; ex qua proprietate solutio nostri problematis facillime deriuabitur.

§. 4. Ducatur nunc ex puncto Z ad ambo intersectionum puncta M et N circuli verticales ZM et ZN, qui ergo circulis Aa et Bb normaliter insistent. Vnde cum inuenerimus esse ang.SMA = ang.SNB, erunt etiam complementa SMZ et SNZ inter se aequalia; et quia anguli PMS et PNS etiam sunt recti, erunt quoque anguli ZMP et ZNP inter se aequales. Quare cum sit $ZA = ZM = a$ et $ZN = ZB = b$, praeterea vero posuerimus $PM = PN = s$, bina triangula sphaerica ZMP et ZNP non solum latus $PZ = c$ habent commune, sed etiam tam latera PM et PN, quam angulos ZMP et ZNP Tab. XVI. Fig. 2.

Z N P habebunt aequales. Quodſi ergo in verticali Z N abſcindamus portionem N Q $= M Z = a$, erit portio Z Q $= b - a = d$; et quia iam in binis triangulis ſphaericis P M Z et P N Q primo ſunt latera P M $=$ P N $= s$, deinde etiam M Z $=$ N Q $= a$, atque inſuper anguli intercepti Z M P $=$ Z N P, haec triangula perfecte inter ſe erunt aequalia. Hinc ergo etiam aequalia erunt tertia latera P Z $=$ P Q $= c$ et angulus Z P M $=$ ang. Q P N, a quibus ſi auferatur angulus communis M P Q, remanebunt anguli aequales Z P Q $=$ M P N $=$ Z. Sicque quia nunc in triangulo Z P Q omnia tria latera ſunt cognita, ſcilicet Z P $=$ P Q $= c$ et Z Q $= d$, inde ſtatim inveniri poteſt angulus Z P Q $=$ Z, qui nobis praebet menſuram temporis illius minimi, quo ſtella S ambos circulos almicantarath datos A a et B b traiicit.

§. 5. Cum triangulum Z P Q ob P Z $=$ P Q $= c$ ſit iſoſceles, biſecetur angulus Z P Q arcu P O, qui ergo erit normalis ad latus Z Q idque in O biſecabit, ita vt ſit angulus Q P O $=$ ang. Z P O $= \frac{1}{2}$ Z et latus Q O $=$ Z O $= \frac{1}{2} d$; quare cum in triangulo rectangulo P O Q ſit hypothenuſa P Q $= c$ et cathetus Q O $= \frac{1}{2} d$, ex regulis Trigonometricis erit

$$\text{ſin. } OPQ = \frac{\text{ſin. } QO}{\text{ſin. } PQ} \text{ hoc eſt ſin. } \tfrac{1}{2} Z = \frac{\text{ſin. } \frac{1}{2} d}{\text{ſin. } c}.$$

Sicque innoteſcit minimum tempus, quo ambo circuli A a et B b a ſtella traiici poſſunt. Ex hac formula iam ſtatim intelligitur, niſi fuerit ſin. $\frac{1}{2} d <$ ſin. c, talem tranſitum fieri impoſſibilem, quia prodiret

ſin. $\frac{1}{2}$

$\sin.\frac{1}{2}Z > 1$ id quod egregie conuenit cum conditione initio memorata, qua obſeruauimus eſſe $c > \frac{1}{2}d$.

§. 6. Vt nunc etiam alteram noſtram incognitam s, ſiue diſtantiam ſtellae a polo PS obtineamus, ex triangulo PQO definiemus angulum PQO ope regulae cognitae, qua eſt

$$\cos.\, PQO = \frac{\text{tang.}\, QO}{\text{tang.}\, PQ} = \frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}d}{\text{tang.}\, c}.$$

Hinc autem pro triangulo PQN erit

$$\cos.\, PQN = -\frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}d}{\text{tang.}\, c}.$$

Sicque in hoc triangulo habemus duo latera $PQ = c$ et $QN = a$ cum angulo intercepto PQN; vnde colligitur tertium latus $PN = s$ ope formulae

$\cos.\, PN = \cos.\, PQ \cos.\, NQ + \sin.\, PQ \sin.\, NQ \cos.\, PQN$

hoc eſt

$$\cos.\, s = \cos.\, c \cos.\, a - \sin.\, a \cos.\, c\ \text{tang.}\,\frac{1}{2}d$$

quae formula reducitur ad hanc

$$\cos.\, s = \frac{\cos.\, c}{\cos.\,\frac{1}{2}d}\,(\cos.\, a \cos.\,\frac{1}{2}d - \sin.\, a \sin.\,\frac{1}{2}d).$$

Cum autem in genere ſit

$$\cos.\, p \cos.\, q - \sin.\, p \sin.\, q = \cos.\,(p + q)$$

hac reductione adhibita ob $a + \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}(a + b)$ habebimus iſtam formulam ſatis concinnam

$$\cos.\, s = \frac{\cos.\, c \cos.\,\frac{1}{2}(a + b)}{\cos.\,\frac{1}{2}(b - a)}.$$

§. 7. Haec autem ſolutio elegantiſſima ſine vlla analyſi ſequenti modo geometrice repraeſentari poterit: interuallum binorum circulorum almicantarath, Tab. XVI. Fig. 3.

rath,

rath, ſcilicet arcus A B biſecetur in puncto, C eritque $AC = BC = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}(b-a)$ et arcus $ZC = \frac{1}{2}(a+b)$; quibus notatis primo pro loco ſtellae S ſeu eius diſtantia a polo P S habebitur iſta determinatio

$$\text{coſ. } PS = \frac{\text{coſ. } PZ\ \text{coſ. } ZC}{\text{coſ. } AC}$$

ac pro ipſo tempore traiectus minimo, cuius menſura eſt angulus M P N, erit

$$\text{ſin. } \tfrac{1}{2} MPN = \frac{\text{ſin. } AC}{\text{ſin. } PZ}$$

vbi arcus P Z eſt complementum eleuationis poli. Hoc igitur modo ſine dubio ſolutionem ſimpliciſſimam problematis propoſiti ſumus nacti, quae, niſi hoc artificium fuiſſet adhibitum, in calculos vehementer prolixos praecipitaſſet.

DE