1776

De gemina methodo tam aequilibrium quam motum corporum flexibilium determinandi et utriusque egregio consensu

Leonhard Euler

DE GEMINA METHODO TAM AEQVILIBRIVM QVAM MOTVM CORPORVM FLEXIBILIVM DETERMINANDI, ET VTRIVSQVE EGREGIO CONSENSV.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Iam in *Tomo III. Commentariorum priorum Academiae Imperialis* expoſui methodum vniuerſalem, inueniendi figuram, quam filum ſiue perfecte flexile ſiue inſuper elaſticum a potentiis quibuscunque ſollicitatum, induere debet, vt in aequilibrio conquieſcat. Methodus autem haec doctrina momentorum innitebatur; quandoquidem ſumma omnium momentorum, quae ex ſingulis viribus ſollicitantibus naſcuntur, pro quouis fili puncto cum eius elaſticitate vbique in aequilibrio conſiſtere debet. Deinde vero non ita pridem in *Tomo XV. nouorum Commentariorum* longe aliam methodum tradidi easdem

dem quaestiones resoluendi, quae notioni tensionum qua singula fili elementa afficiuntur erat innixa. Formulae autem quibus haec solutio posterior continetur, tantopere a solutione priori differe videntur, vt primo intuitu vix vllum consensum perspicere liceat; cuius diuersitatis ratio manifesto in eo est posita, quod haec duo principia, alterum scilicet momentorum, alterum tensionum tantopere a se inuicem discrepant, vt nihil commune habere videantur. Quin etiam, nisi pro huiusmodi problematibus determinatis ex vtraque methodo eadem plane solutio eliceretur, merito quis dubitare posset, num istae duae methodi inter se conuenirent, quod quidem dubium me ipsum non semel haesitantem reliquit. Quam ob rem Geometris munus haud ingratum me esse oblaturum confido, si egregium consensum inter haec duo principia toto coelo a se inuicem diuersa dilucide demonstrauero.

Status quaestionis.

§. 2. Proposito filo quocunque A M B, siue perfecte flexili, siue vtcunque elastico, cui in singulis elementis vires quaecunque fuerint applicatae, sit A M B eius figura, quam in statu aequilibrii induit, eaque more solito ad axem fixum A E referatur per coordinatas orthogonales $AP = x$ et $PM = y$; ipse autem arcus ponatur $AM = s$, cuius elemento $Mm = ds$ duae applicatae sint vires elementares, altera secundum directionem M P sollicitans $= P\,ds$, altera vero secundum directionem Tab. IV. Fig. 1.

M Q

M Q axi parallelam $= Q\, d\, s$; quibus viribus elementaribus adiungi oportet vires finitas, quibus filum vel in altero tantum termino, vel in vtroque sollicitatur. Praeterea vero ratione elasticitatis filum ita comparatum concipiatur, vt si ad elementum M m radius curuedinis fuerit $= r$, conseruatio huius curvaturae postulet virium momentum $= \frac{S}{r}$. Quo autem curuaturae ratio facilius habeatur, ponamus angulum A M P $= \Phi$, quem scilicet tangens curuae cum applicata constituit, eritque angulus M $m\,p$ $= \Phi + d\Phi$; hincque perspicuum est, radium osculi in M fore $= \frac{d\,s}{d\,\Phi}$, sicque momentum elasticitatis erit $\frac{S\,d\Phi}{d\,s}$. His autem positis erit fin. $\Phi = \frac{d\,x}{d\,s}$ et cos. $\Phi = \frac{d\,y}{d\,s}$, existente $d\,s^2 = d\,x^2 + d\,y^2$. Constitutis igitur his viribus determinari debet figura ad quam filum se componet, et in aequilibrio consistet: atque hic quidem momendum est, nos alias vires hic non admittere, nisi quae in idem planum cadant, in quo etiam totum filum continetur, quamvis quaestio non multo difficilior esset futura, si filo duplex curuatura tribueretur, ternis coordinatis definienda, vbi etiam triplicis ordinis vires in computum duci deberent. Verum perspicuitati potissimum consulentes omnia in eodem plano existere concipiamus. Interim tamen ipsum filum vtcunque inaequaliter crassum et elasticum statuere licet, quandoquidem hinc solutio non euadit difficilior.

Solu-

Solutio prior ex principio momentorum petita.

§. 3. Ista solutio in hoc consistit, vt omnium virium elementarium quae per totum arcum A M sunt applicatae momenta respectu puncti M quaerantur et in vnam summam colligantur, quae deinde elasticitati $\frac{S\,d\,\Phi}{d\,s}$ aequalis posita aequationem, exhibebit pro figura laminae quaesita. Dum igitur omnia ista momenta elementaria conquirimus punctum curuae M tanquam fixum, eiusque coordinatas x et y quasi constantes spectare debemus.

§. 4. Consideretur igitur portionis A M elementum quodcunque in Y, quod sit $= dS$, pro quo ponantur coordinatae variabiles $AX = X$ et $XY = Y$; tum vero vires isti elemento applicatae sint secundum $YX = p\,dS$ et secundum $YZ = q\,dS$; quae posterior directio axi parallela applicatae fixae P M occurrat in puncto V; quibus positis vis elementaris $p\,dS$ momentum respectu puncti M erit $p\,dS\,PX = p\,dS\,(x - X)$ quorum ergo momentorum summa erit $x \int p\,dS - \int X\,p\,dS$ pro arcu A Y. Iam promoueatur punctum Y vsque in M, et abibunt litterae X, Y, S, p in x, y, s, P, sicque istud momentum totale erit $x \int P\,ds - \int x\,P\,ds$, cuius differentiale est $dx \int P\,ds$, quod iterum integratum praebet istud momentum $= \int dx \int P\,ds$, quod curuaturam in M augere tendit. Tab. IV. Fig. 2.

§. 5. Simili modo vis elementaris $YZ = q\,ds$ momentum pro M producit

$$= q\,dS.\,MV = q\,dS\,(y - Y)$$

quod ergo curuaturam minuere conatur. Summa igitur omnium horum momentorum per arcum A Y erit $y\int q\,d\,S - \int Y\,q\,d\,S$, quod vsque ad M promotum, quoniam quantitates Y, q, S abeunt y, s et Q erit

$$y\int Q\,d\,s - \int y\,Q\,d\,s = \int d\,y\,Q\,d\,s.$$

§. 6. Cum igitur ex omnibus viribus arcui A M applicatis oriatur momentum ad curuaturam augendam tendens $= \int d\,x\int P\,d\,s - \int d\,y\int Q\,d\,s$; hoc vtique elasticitati aequale poni debet; vnde istam adipiscimur aequationem:

$$\int d\,x\int P\,d\,s - \int d\,y\int Q\,d\,s = \frac{S\,d\,\Phi}{d\,s}$$

qua natura curuae, quam lamina in statu aequilibrii accipit, determinatur, ita vt ope huius methodi semper figura laminae a quibuscunque viribus sollicitatae definiri queat. Neque vero hinc symptomata, quae figuram laminae comitantur, cognoscere licet, cuiusmodi sunt: tensio quam singula elementa sustinent; tum vero etiam vires normales ad curuaturam cuiusque elementi producendam requisitas; quem defectum per alteram methodum, cuius explicatio sequitur, supplere sum conatus.

§. 7. Ante autem quam hanc methodum deferamus aliam viam ostendisse iuuabit, qua sine consideratione elementorum intermediorum Y totum negotium confici poterit. Denotet M summam omnium momentorum ex viribus secundum directionem applicatarum M P agentium oriundam pro puncto M, eritque pro puncto m eadem summa

= M

$= M + dM$: verum si singularum virium elementarium momenta a puncto M vsque in m transferamus, singulae insuper per elementum dx multiplicare oportet; sicque incrementum dM reperitur, si omnes istae vires elementares, quarum summa vtique est $\int P\,ds$ per elementum dx multiplicentur, vnde fit $dM = dx \int P\,ds$ ideoque porro ipsum momentum $M = \int dx \int P\,ds$. Eodemque modo intelligitur fore summa omnium momentum, ex alteris viribus secundum directionem P A agentium $\int dy \int Q\,ds$; cuius ratiocinii ope praecedens aequatio pro figura laminae eruitur.

Solutio posterior ex principio tensionum petita.

§. 8. Quia tota lamina ob vires ipsi applicatas in statu violento tenetur, euidens est, si portio A M resecetur, reliquam portionem B M subito longe aliam figuram esse accepturam. Quod igitur ne eueniat, perpendamus, cuiusmodi vires puncto M applicari conueniat, quibus superior portio B M in eodem statu conseruetur, ac si cum portione M A mansisset connexa. Ac primo quidem facile intelligitur punctum M certa quadam vi quae sit $= T$ secundum tangentem M T trahi debere, qua scilicet tensio elementi Mm, quamcunque habuerit, obtineatur. Praeterea vero quia elementum Mm habet curuaturam $= \frac{d\Phi}{ds}$, vnde nascitur vis elastica $\frac{S\,d\Phi}{ds}$, requiritur vis quaepiam normalis T V quae sit $= V$, cuius momentum respectu puncti M cum elasticitate Tab. IV. Fig. 1. Fig. 3.

 in

in aequilibrio consistat. Hic scilicet loco tangentis MT virgam rigidam cogitare conuenit, vt idea momenti locum habere possit. Vocetur igitur distantia $MT = v$, et illius vis normalis momentum erit $= Vv$, quod elasticitati aequatum nobis suppeditat primam aequationem

$$\text{I. } Vv = \frac{S\, d\,\Phi}{d\,s}.$$

Simili igitur modo pro puncto m habebimus vim tangentialem $T + dT$ et normalem $tv = V + dV$, vna cum interuallo $mt = v + dv$; vnde pro puncto m nascetur momentum

$$(V + dV)(v + dv) = Vv + d.\,Vv.$$

§. 9. Reuera autem elementum $Mm = ds$ sustinet vt vidimus duas vires elementares $P\,ds$ et $Q\,ds$ secundum directiones MP et MQ (vide fig. 1.) ex quibus eliciamus duas alias vires, alteram secundum tangentem MT agentem, quae erit

$$P\,ds \operatorname{cos.}\Phi + Q\,ds \operatorname{sin.}\Phi;$$

cuius loco scribamus breuitatis gratia $p\,ds$; alteram vero isti normalem

$$P\,ds \operatorname{sin.}\Phi - Q\,ds \operatorname{cos.}\Phi,$$

cuius loco scribamus $q\,ds$, quam in M applicatam concipiamus $M = q\,ds$, dum alteram vi tangentiali addamus vt fit $Tp = p\,ds$.

§. 10. Nunc igitur pro tangente MT, adiectis istis viribus elementaribus, vis tangentialis erit $T + p\,ds$; tum vero praeter vim normalem $TV = V$ habebimus in M etiam vim normalem

Mq

$M\,q = q\,ds$, atque hae vires iunctim sumtae aequivalere debent viribus quas tangenti proximae $m\,t$ applicatas concipiamus (quandoquidem illis, quas tangenti $M\,T$ applicatas concepimus insuper binas vires elementum $M\,m$ vrgentes addidimus. Hunc in finem vires tangenti $m\,t$ applicatas transferamus in tangentem principalem $T\,M$, et quia angulus $T\,m\,t = d\,\Phi$ vis tangentibus $m\,t = T + d\,T$ dabit vim secundum

$$m\,T = (T + d\,T)\cos.\, d\,\Phi = T + d\,T,$$

praeterea vero etiam praebet vim normalem

$$m\,r = (T + d\,T)\,d\,\Phi.$$

Pro resolutione autem alterius vis figuram peculiarem consideremus (hic scilicet normalis $t\,u$ priorem tangentem secet in Φ) et sumamus vim $o\,u = V + d\,V$, quae resoluatur in vires, alteram normalem $o\,s = V + d\,V$, alteram vero secundum tangentem $s\,u = (V + d\,V)\,d\,\Phi$ ob angulum $u\,o\,s = d\,\Phi$. Tab. IV. Fig. 4.

§. 11. Vires igitur quae ex hac translatione prodierunt sunt, primo tangentialis $T + d\,T$ vna cum vi illa secundum $s\,u = (V + d\,V)\,d\,\Phi$, quae ergo superioribus tangentialibus aequales esse debent, quae erant $T + p\,d\,s$, vnde oritur ista aequatio:

$$T + d\,T + (V + d\,V)\,d\,\Phi = T + p\,d\,s$$

quae reducitur ad hanc:

$$d\,T + V\,d\,\Phi = p\,d\,s$$

quae est secunda aequatio ad quam peruenimus. Deinde translatio illa praebuit istas vires normales

$os = V + dV$ vna cum vi $mr = (T + dT) d\Phi$ in contrariam partem vergente, ficque harum differentia $V + dV - (T + dT) d\Phi$ aequalis effe debet viribus normalibus, quas tangenti MT applicatas reperimus, fcilicet viribus $TV = V$ et $Mq = q\,ds$, vnde ifta oritur aequatio tertia:

$$V + dV - (T + dT) d\Phi = V + q\,ds$$

quae reducitur ad hanc:

$$dV - T\,d\Phi = q\,ds.$$

At vero non fufficit iftas vires normales inter fe aequaffe, fed neceffe eft, vt etiam earum momenta refpectu eiusdem puncti m inter fe reddantur aequalia. Hunc in finem cum fit mo cof. $d\Phi = v + dv$ hoc eft $mo = v + dv$, erit virium translatarum momentum

$$(V + dV)(v + dv) - (T + dT).\,o = Vv + d.\,Vv$$

virium vero normalium tangenti mT actu applicatarum momentum fiet

$$V.\,Tm + q\,ds.\,Mm = V(v + ds) + q\,ds^2 = Vv + V\,ds,$$

quia alterum membrum continet infinite paruum fecundi ordinis; hinc igitur nafcitur ifta aequatio quarta

$$Vv + d.\,Vv = Vv + V\,ds \text{ fiue } d\,Vv = V\,ds.$$

§. 12. Has igitur quatuor aequationes ex ratiocinio fuperiori deductas eodem ordine repraefentemus quo eas in *Tomo XV. Comment. pag.* 329. retulimus

I.

$$\text{I.}\quad dT + V\,d\Phi = p\,ds$$
$$\text{II.}\quad dV - T\,d\Phi = q\,ds$$
$$\text{III.}\quad V\,ds = d.\,V\,v$$

quibus adiungi debet principalis hic primo loco inventa

$$\text{IV.}\quad V\,v = \frac{S\,d\,\Phi}{ds}$$

vbi intuenti nulla prorſus conuenientia cum praecedente ſolutione patebit. Vnde eo magis neceſſarium videtur, pulcherrimum conſenſum inter has duas ſolutiones toto coelo quaſi a ſe inuicem diſcrepantes demonſtrare.

Demonſtratio conſenſus inter has duas ſolutiones.

§. 13. Hic igitur ante omnia ipſas vires elementares in quaeſtione propoſitas, $P\,ds$ et $Q\,ds$ introducamus, et duae aequationes noſtrae priores hanc induent formam:

$$\text{I.}\quad dT + V\,d\Phi = P\,ds\,\text{coſ.}\,\Phi + Q\,ds\,\text{ſin.}\,\Phi$$
$$\text{II.}\quad dV - T\,d\Phi = P\,ds\,\text{ſin.}\,\Phi - Q\,ds\,\text{coſ.}\,\Phi.$$

Iam iſta combinatio I. coſ. Φ + II. ſin. Φ praebet

$$dT\,\text{coſ.}\,\Phi - T\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi + dV\,\text{ſin.}\,\Phi + V\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = P\,ds,$$

cuius integrale eſt

$$T\,\text{coſ.}\,\Phi + V\,\text{ſin.}\,\Phi = \int P\,ds.$$

Deinde vero iſta combinatio I. ſin. Φ − II. coſ. Φ praebet

$$dT\,\text{ſin.}\,\Phi + T\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi - dV\,\text{coſ.}\,\Phi + V\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi = Q\,ds$$

et integrando

$$T\,\text{ſin.}\,\Phi - V\,\text{coſ.}\,\Phi = \int Q\,ds.$$

Nunc

Nunc ſi prior in coſ. Φ, poſterior vero in ſin. Φ ducatur, ſumma prodibit

$$T = \cos.\ \Phi \int P\, ds + \sin.\ \Phi \int Q\, ds.$$

At ſi a priore ducta in ſin. Φ auferamus poſteriorem ductam in coſ. Φ relinquetur

$$V = \sin.\ \Phi \int P\, ds - \cos.\ \Phi \int Q\, ds.$$

Hoc igitur modo ambas vires incognitas V et T, quas ad ſtatum elementi Mm cognoſcendum in calculum induximus, per ſolas vires elementares $P\,ds$ et $Q\,ds$ quas tanquam cognitas ſpectare licet expreſſimus, ita vt nunc loco aequationum I et II nacti ſinus has

$$1^{\circ}.\ T = \cos.\ \Phi \int P\, ds + \sin.\ \Phi \int Q\, ds$$

$$2^{\circ}.\ V = \sin.\ \Phi \int P\, ds - \cos.\ \Phi \int Q\, ds.$$

§. 14. Nunc etiam conſideremus binas reliquas aequationes III et IV, in quibus tantum duae incognitae occurrunt, ſcilicet V et v; et quia IV^{ta} ſponte praebet $V v = \frac{S\, d\Phi}{ds}$, erit differentiando $d.\, V v = d.\, \frac{S\, d\Phi}{ds}$; per tertiam autem erat $V = \frac{d.\, V v}{ds}$, vnde colligimus $V = \frac{d.\, S\, d\Phi}{ds^2}$: in hac ſcilicet differentiatione elementum ds pro conſtante aſſumimus; quo ergo valore in priore ſubſtituto prodibit

$$v = \frac{S\, d\Phi}{V\, ds} = \frac{S\, d\Phi\, ds}{d.\, S\, d\Phi}.$$

Hoc igitur modo ambas incognitas V et v per ſymptomata ipſius curuae, per quantitatem elaſticitatis qua lamina in ſingulis elementis gaudet expreſſimus, ita vt nunc loco binarum aequationum III et IV. has duas nouas ſimus aſſequuti:

$$3^{\circ}.\ V = \frac{d.\, S\, d\Phi}{ds^2} \quad \text{et} \quad 4^{\circ}.\ v = \frac{S\, d\Phi\, ds}{d.\, S\, d\Phi}.$$

§. 15.

§. 15. Tali igitur euolutione geminum valorem pro eadem vi V scilicet No. 2 et 3 elicuimus, qui ergo inter se aequati sequentem nobis suppeditant aequationem:

$$\sin.\Phi \int P\, d s - \cos.\Phi \int Q\, d s = \frac{d.\, s\, d\Phi}{d s^2}$$

quam per $d s$ multiplicemus, et quoniam erat

$$d x = d s \sin.\Phi \text{ et } d y = d s \cos.\Phi$$

obtinebimus hanc aequationem:

$$d x \int P\, d s - d y \int Q\, d s = \frac{d.\, s\, d\Phi}{d s^2}$$

quae integrata praebet

$$\int d x \int P\, d s - \int d y \int Q\, d s = \frac{s\, d\Phi}{d s}$$

qua ergo aequatione natura curuae per mera elementa cognita exprimitur; atque haec aequatio manifesto est prorsus eadem, ad quam nos prior methodus ex doctrina momentorum petita deduxerat, ita vt nunc quidem pulcherrimus consensus vtriusque methodi clarissime eluceat. Verum methodus posterior priori vtique maxime antecellit, cum nobis non solum figuram laminae exhibeat, sed etiam statum violentum, in quo singula laminae elementa reperiuntur declaret.

§. 16. Quemadmodum binas vires T et V per solas vires elementares $\int P d s$ et $\int Q d s$ expressas dedimus, ita etiam interuallum $M T = v$ per easdem definire licet; cum enim sit

$$\frac{s\, d\Phi}{d s} = \int d x \int P\, d s - \int d y \int Q\, d s \text{ et}$$

$$\frac{d.\, s\, d\Phi}{d s} = d x \int P\, d s - d y \int Q\, d s \text{ erit}$$

$$v = \frac{d s \int d x \int P\, d s - d s \int d y \int Q\, d s}{d x \int P\, d s - d y \int Q\, d s}$$

Tab. IV. Fig. 5. In his autem formulis integralibus, quanquam solas vires elementares complectuntur, etiam vires finitae, quibus forte lamina in termino A sollicitatur, comprehendi possunt. Si enim lamina in ipso termino A vrgeatur a viribus A E et A F secundum directiones abscissarum et applicatarum, tum manifestum est, formulam integralem $\int P\, d\, s$ in se comprehendere debere vim A F, alteram vero formulam $\int Q\, d\, s$ vim A E. Id quod etiam ex altero laminae termino est intelligendum, quandoquidem calculum eodem modo pro altero termino B instituere possemus.

§. 17. Perpetuo autem probe tenendum est, si calculum quem hactenus pro termino laminae A instruximus eodem modo pro altero termino B instituamus, non solum eandem curuam pro figura laminae reperiri debere, sed etiam vires, quibus status violentus cuiusque elementi definitur, vtrinque easdem prodire debere. Fig. 6. Quod si enim tangentes T M et $t\,m$ ad alteram partem continuamus in M T' et $m\,t'$, tum etiam eaedem resultare debent vires tangentiales T et T + d T, atque etiam vires normales T V et T' V', cum interuallis M T et M T' necessario conuenire debent; quod idem de tangente proxima $t\,m\,t'$ est intelligendum. Praeterea vero etiam vires elementares, quibus laminae portio B M sollicitatur, tantum ratione signi ab illis quibus portio A M afficitur discrepabunt. Cum enim tota lamina supponitur esse in aequilibrio, necesse est, vt omnes vires vtrinque se mutuo destruant,

ita,

ita, vt valores $\int P\,ds$ et $\int Q\,ds$ pro altera BM abire debeant in $-\int P\,ds$ et $-\int Q\,ds$.

§. 18. Hic omni attentione dignae videntur egregiae relationes, quas posterior methodus nobis inter vires elementares et vires T et V cum interuallo $MT = v$ manifestauit; quae conuenientia, quanquam sine dubio in primis Staticae principiis est fundata, tamen non tam facile perspicitur, quam ob rem operae pretium erit istam conuenientiam in sequentibus theorematibus clarius ostendere.

Theorema I.

§. 19. Vis tangentialis T, quam status violentus elementi Mm postulat, reperitur, si summa omnium virium elementarium $\int P\,ds$ et $\int Q\,ds$ puncto M ita applicatae concipiantur, vt illa $\int P\,ds$ secundum directionem MP, altera vero secundum directionem MQ agat, tum vero ambae secundum directionem tangentis MT resoluantur; hoc enim modo resultat formula $\cos.\Phi\int P\,ds + \sin.\Phi\int Q\,ds$, cui vis tangentialis T aequalis est inuenta. Tab. IV. Fig. 7.

Theorema II.

§. 20. Vis normalis $TV = V$ ad statum violentum elementi Mm requisita, reperitur, si summa virium elementarium $\int P\,ds$ vt ante puncto M in directione MP applicata concipiatur, altera vero $\int Q\,ds$ in directione MQ, tum vero vtraque secundum directionem ad curuam normalem MN resoluatur; tum enim pro hac directione resultat vis $\sin.\Phi\, d\int P\,ds - \cos.\Phi\int Q\,ds$, Fig. 7.

 cui

cui vis illa normalis T V aequalis supra est inventa.

Theorema III.

Tab. IV. Fig. 7. §. 21. Si vires tangentialis T et normalis V puncto M secundum directiones M T et M N applicentur, eaeque secundum directiones coordinatarum M P et M Q resoluentur, pro directione M P prodibit summa omnium virium elementarium $\int P\,ds$: at pro directione M Q summa omnium elementarium $\int Q\,ds$. Hoc enim modo pro directione M P prodit vis $T \operatorname{cos.} \Phi + V \operatorname{sin.} \Phi = \int P\,ds$; tum vero pro directione M Q vis $T \operatorname{sin.} \Phi - V \operatorname{cos.} \Phi = \int Q\,ds$.

Theorema IV.

Fig. 3. §. 22. Si pro puncto laminae M tangenti MT applicata sit vis $TV = V$, in distantia $MT = v$; similique modo pro puncto laminae proximo m eius tangenti mt applicata sit in t vis normalis $tv = V + dV$ in distantia $mt = v + dv$, harum ambarum virium T V et tv momenta respectu puncti m sumta semper inter se erunt aequalia. Cum enim pro vi T V sit distantia $mT = V + ds$, erit eius momentum $= Vv + V\,ds$; alterius vero vis tv momentum erit $(V + dV)(v + dv) = Vv + d.Vv$; quorum momentorum aequalitas praebet $V\,ds = d.Vv$, quae est ipsa aequalitas supra (III §. 12.) exhibita.

§. 23. Quoniam statum violentum in quo laminae elementum Mm reperitur ad binas vires T et V perduximus, quarum ista V in distantia $MT = v$ applicata est concipienda, fieri potest, vt vt ista distantia v adeo vsque in infinitum augeatur, quo quidem casu ipsa vis V ita euanescit, vt eius momentum V v certum habeat valorem: scilicet elasticitati elementi $f \frac{d\Phi}{ds}$ aequalem. Cum igitur hunc casum ob oculos ponere non liceat, quo facilius istum effectum ob oculos ponamus, in genere obseruandum est, semper loco vis T V = V in distantia M T = v agentis in datis duobus punctis α et β binas vires $\alpha\eta$ et $\beta\theta$ applicari posse, quae plane eundem effectum sint praestaturae. Sint enim distantiae M $\alpha = \alpha$ et M $\beta = \beta$; tum vero vires quaesitae $\alpha\eta = \eta$ et $\beta\theta = \theta$; ac primo necesse est vt sit $\eta - \theta = V$; praeterea vero etiam momenta respectu puncti M aequalia esse debent, vnde fit $Vv = \eta\alpha - \theta\beta$. Cum igitur ex priore sit $\eta = V + \theta$, erit nunc $Vv = V\alpha + \alpha\theta - \beta\theta$, vnde colligitur $\theta = \frac{V(v - \alpha)}{\alpha - \beta}$, hincque $\eta = \frac{V(v - \beta)}{\alpha - \beta}$. Quare si in punctis α et β istae vires applicentur, elementi Mm status perinde conseruabitur atque a momento V v, dummodo insuper vis tangentialis T adiungatur. Ab his autem duabus viribus η et θ tangens curuae quasi vellicabitur, quippe quo pacto elemento Mm curuatura induci potest. Tab. IV. Fig. 8.

Applicatio ad laminas elasticas, quae in statu naturali iam sunt incuruatae.

§. 24. Hactenus tantum eiusmodi laminas elasticas sumus contemplati, quae naturaliter in directum sunt extensae; facile autem negotio, omnia, quae

quae de statu aequilibri violento supra determinauimus etiam ad laminas naturaliter curuas transferri possunt, quemadmodum iam in *Tomo Comment. XV. supra allegato pagina* 329. obseruaui. Sit igitur A μ B figura, quam lamina in situ naturali tenet, in qua arcui A μ $= s$ conueniat radius osculi μ ϱ $= r$, ita, vt r spectari possit tanquam functio data arcus A μ $= s$. Nunc vero a viribus quibuscunque, quas vt ante per vires elementares P $d s$ et Q $d s$ repraesentemus huic laminae inducta sit figura A M B (fig. 5.), ad axem arbitrarium A C relatam, atque omnia manebunt vt ante, nisi quod elasticitas in puncto M non amplius soli formulae $\frac{d \Phi}{d s}$ proportionalis sit censenda, sed eius excessui supra formulam $\frac{1}{r}$, ita vt in superiore solutione nihil aliud opus sit, nisi vt vbique loco formulae $\frac{S d \Phi}{d s}$ scribatur haec formula: $S(\frac{d\Phi}{d s} - \frac{1}{r})$.

Tab. IV. Fig. 9

§. 25. Hoc igitur facto, primum figura laminae in statu violento exprimetur hac aequatione:

$$\int d x \int P\, d s - \int d y \int Q\, d s = S(\frac{d\Phi}{d s} - \frac{1}{r})$$

praeterea vero vires ad statum violentum elementi M $m = d s$ repraesentandum requisitae manebunt vt ante

$$T = \cos.\Phi \int P\, d s + \sin.\Phi \int Q\, d s \text{ et}$$
$$V = \sin.\Phi \int P\, d s - \cos.\Phi \int Q\, d s$$

tum vero etiam ex elasticitate nunc immutata erit

$$V = \frac{1}{d s} d.\, S(\frac{d\Phi}{d s} - \frac{1}{r}) \text{ et } w = \frac{S\, d s (\frac{d\Phi}{d s} - \frac{1}{r})}{d.\, S(\frac{d\Phi}{d s} - \frac{1}{r})}.$$

Sicque

Sicque facile sunt expedita omnia, quae de statu aequilibrii filorum quoque elasticorum desiderari possunt, si modo tam figura quam vires sollicitantes in eodem plano fuerint constitutae. Quemadmodum autem inuestigatio motus, quo huiusmodi laminae concitari possunt, facile ad statum aequilibrii reuocari possit, in loco allegato *Tomi XV. Commentariorum nouorum* satis dilucide exposui, ita vt hic nihil amplius adiiciendum censeam.

DE