1776

Regula facilis pro diiudicanda firmitate pontis aliusve corporis similis excognita firmitate moduli

Leonhard Euler

REGVLA FACILIS PRO DIIVDICANDA FIRMITATE PONTIS ALIVSVE CORPORIS SIMILIS EX COGNITA FIRMITATE MODVLI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Orta est nuper haec quaestio occasione pontis perennis trans fluuium Neuam construendi. Cum enim plures hoc opus aggredi fuissent conati, atque in hunc finem modulos confecerint, ad quorum similitudinem ipse pons exstrui posset, plerique sunt arbitrati, pontem satis firmitatis esse habiturum, si modo modulus certo firmitatis gradu fuisset praeditus. Putarunt scilicet, si modo modulus simile onus gestare valeret, quale ipse pons sustinere debeat, tum nullum esse dubium, quin ipse pons secundum similitudinem moduli exstructus satis roboris esset habiturus. Hanc autem conclusionem esse fallacem, exinde satis est manifestum, quod talis pons certe non ad quantumuis magnam distantiam, veluti vnius pluriumue milliarium extendi queat, quin proprio pondere corruat, quantumuis etiam roboris modulus habuisse videatur. Ex quo perspicuum est, firmitatem

tatem pontis neutiquam ex firmitate moduli secundum principium similitudinis definiri posse. Quam ob rem, quemadmodum ex firmitate moduli firmitas ipsius pontis, quantumuis magni cognosci queat, hic accuratius sum inquisiturus.

§. 2. Firmitas autem tam ipsius pontis quam moduli vtique componitur ex firmitate singularum partium et modo, quo inter se sunt coniunctae, ac diiudicari debet ex viribus quas sustinere valent, quin disrumpantur. Duplicis autem generis hic occurrunt vires, quibus tales machinae resistere debent, quarum alterae tendunt ad partes a se inuicem diuellendas, alterae vero ad eas frangendas, seu a compage reliquarum abrumpendas. Prius genus potissimum habet locum, si funes adhibeantur, quorum tenacitate tota machina innitatur; quando autem machina trabibus inter se coniunctis constat, alterum genus potissimum locum habet, vt scilicet trabes fractioni satis resistent, ne a viribus quas sustinere debent abrumpantur. Vtrumque igitur hoc genus accuratius est perpendendum, vt diiudicare valeamus, quanta vi singulae partes tam diuulsioni quam fractioni resistant.

§. 3. Quod igitur ad genus prius pertinet, consideremus funem crassitiei datae, ac videamus, quantam tensionem sustinere valeat, antequam rumpatur. Ac primo quidem manifestum est, istam vim a tenacitate filorum ex quibus funis componitur pendere, quae si in variis funibus fuerit eadem, quando

quando scilicet simili modo ex filamentis fuerint contorti, euidens est, eorum firmitatem eo fore maiorem, quo fuerint crassiores. Ita si crassities talis funis vocetur $= cc$, vis quam sustinere valebit, quin rumpatur proportionalis erit ipsi cc. Dabitur igitur certa quaedam longitudo L, vt productum Lcc pro mensura eius vis, quam funis sustinere valet haberi possit; vbi manifestum est, quantitatem istam L a tenacitate filamentorum pendere. Quoniam igitur hoc productum Lcc massam ideoque pondus eiusdem funis refert, si eius longitudo esset $= L$, hinc patebit, quantam longitudinem funis habere debeat, vt verticaliter suspensus a proprio pondere diuellatur.

§. 4. Quoniam ista longitudo L a vi, qua minimae particulae singulorum filorum inter se cohaerent, ~~seu potius a quapiam caussa externa~~ ad se inuicem comprimuntur, pendet, si haec compressio a solo pondere Atmosphaerae oriretur, quo nouimus, duo marmora polita inter quae nullus aer reperiatur tanta vi ad se inuicem apprimi, quae respondeat altitudini Barometri, quam ponamus $= k$, pro crassitie $= cc$ cohaesio superari posset a pondere columnae mercurii, cuius basis esset $= cc$ et altitudo $= k$; vnde si mercurius n vicibus grauior statuatur quam materia funis, foret vtique $L = nk$ ideoque $= 28$ dig. At vero experientia satis declarat, plerosque funes multo maius pondus sustinere posse, vnde patet, caussam cohaesionis non in pondere Atmosphaerae esse quaerendam, sed potius in vi elastica aetheris, qua omnia corpora in contactu, vbi Aether penitus excluditur ad se inuicem apprimuntur. Ac plura quidem experimenta ostendunt, istam vim Aetheris propemodum millies maiorem statui debere quam pressionem Atmosphaerae; sicque facile intelligitur, dari eiusmodi materias, pro quibus longitudo L ad mille atque adeo plures pedes assurgere queat.

§. 5. Quaecunque autem fuerit caussa firmitatis et cohaesionis corporum, pro praesenti instituto plane non est opus illam longitudinem L absolute nosse, quoniam hic non de absoluta firmitate cuiusque materiae, ex qua machinae componi solent, agitur, sed tota praesens quaestio tantum versatur circa comparationem roboris, quo varii funes ex eadem materia confecti fuerint praediti. Quantacunque igitur fuerit ista longitudo L, si duo funes simili modo confecti inter se comparandi occurrant, quorum alterius crassities sit cc, alterius vero $= CC$, quoniam vires, quas gestare valent sunt Lcc et LCC, eae vtique inter se erunt vt $cc : CC$, ideoque tenebunt rationem crassitiei. Atque haec ratio sufficit, ad comparationem inter firmitatem plurium funium instituendam, si modo simili ratione fuerint compositi, atque vires quibus tales funes tenduntur simili modo fuerint applicati; id quod tuto assumere possumus; quandoquidem in omnibus huius generis machinis moduli ad perfectam similitudinem parari solent.

Tab. II. Fig. 7. et 8. §. 6. His praemissis consideremus duos funes acb et ACB, non solum ex simili materia confectos

fectos sed etiam simili modo tensos, quorum minoris crassities sit $= cc$, maioris vero $= CC$; pro minore autem distantia $ab = a$, pro maiore distantia $AB = A$. Iam denotet v vim, quam minor funis gestare valet quin rumpatur, V vero vim quam maior sustinere valeat; ac dummodo hae vires simili modo fuerint applicatae, manifestum est fore $v : V = cc : CC$, ita vt sit $V = \frac{CC}{cc} v$, vbi quidem dimensiones a et A non aliter in censum veniunt, nisi quatenus similitudinem crassitiei sequuntur.

§. 7. Vires v et V duabus partibus constare sunt censendae, quarum altera continet ipsum pondus vtriusque funis, cum partibus quae ipsis vi compagis sunt coniunctae, altera vero continet onera quae vterque funis gestare debet, et quae ipsis deinceps vel imponuntur vel appenduntur, hunc ipsum in finem, vt firmitas maioris ex firmitate minoris concludi possit. Sit igitur p pondus funis minoris et P maioris, atque ob similitudinem manifestum est fore $p : P = abc : ABC$, ita vt sit $P = \frac{ABC}{abc} p$. Iam per experimentum exploretur, quantum onus minor funis sustinere valeat quin rumpatur, sitque hoc onus $= q$, atque hinc definire poterit onus Q, quod maior funis gestare valebit sine ruptione.

§. 8. Quoniam igitur totae vires v et V vtrinque sustinendae aggregatis ex ipso pondere et onere aequales sunt censendae: habebimus $v = p + q$ et $V = P + Q$: vtrinque enim licebit ipsum pondus cum onere coniungere. Quare cum sit $V = \frac{BC}{bc} v$

 erit

erit $P + Q = \frac{BC}{bc}(p+q)$. Vnde cum ſit $P = \frac{ABC}{abc}p$ reperietur onus, quod maior funis geſtare valebit

$$Q = \frac{BC}{bc}(p+q) - \frac{ABC}{abc}p = \frac{BC}{bc}(p+q - \frac{A}{a}p).$$

Ex quo ſtatim patet, niſi fuerit $p + q > \frac{A}{a}p$ ſiue $q > \frac{A-a}{a}p$ maiorem funem non ſolum nullum onus ſuſtinere poſſe, ſed etiam proprio pondere disruptum iri, etiamſi minor funis ſatis notabile onus geſtare potuerit. Sicque manifeſto iam eſt euictum, ad ſimilitudinem moduli ipſam machinam non ad quamvis magnitudinem augeri poſſe, ſed maximam longitudinem A, quam etiamnunc obtinere liceat eſſe $A = \frac{p+q}{p}.a$, quam ſi transgredi voluerimus, machinam plane conſiſtere non poſſe.

§. 9. Hinc iam haud difficulter diiudicare poterimus, vtrum ope funium pontem transfluuium Neuam, cuius latitudo eſt circiter 1000 ped. Rhenan. conſtruere liceat nec ne. Hunc infinem conficiatur modulus ad longitudinem quantumuis exiguam veluti 20 pedum, cui ipſe pons perfecte ſimilis eſſe debeat, ita vt ſit $\frac{A}{a} = 50$, ac niſi iſte modulus onus ſuſtinere queat, quod plus quam 49 vicibus ſuperet proprium pondus, pons plane ſubſiſtere non poterit. Ac ſi forte hoc ſucceſſerit: tamen certum eſt, ſi latitudo fluuii adhuc eſſet maior, talem pontem nullo modo locum habere poſſe. Praeterea vero non ſufficit, vt pons proprium pondus ſuſtinere queat, ſed etiam neceſſe eſt, vt inſignia onera geſtare valeat, ideoque valor ipſius Q ex noſtra formula reſultans debitum nanciſcatur valorem.

§. 10.

§. 10. His de firmitate funium expeditis, perpendamus, quomodo trabes aliaue corpora rigida ruptioni resistant. Consideremus igitur trabem A C E F, iam tantopere inflexum, vt tantum non in A C abrumpatur. Referat igitur angulus A C A' maximam hanc inflexionem, quam sustinere valet, ita vt fibrillae extremae A A' non amplius elongari queant, sitque l ista extensio maxima $= A A'$ et L vis, qua sese contrahere conentur, atque manifestum est, hanc vim L eam ipsam esse vim, qua ante vidimus funes diuulsioni resistere, ita vt, si tota trabs secundum longitudinem A E traheretur a vi, quae eius ponderi, si longitudinem haberet $= L$ esset aequalis, tum tantum non penitus diuelleretur. Tab. II. Fig. 9.

§. 11. Ponamus nunc crassitiem trabis $AC = c$, dum scilicet trabs circa punctum C abrumpi concipitur, latitudinem vero trabis esse $= b$. Nunc in spatio A C capiamus abscissam indefinitam $CP = x$, vbi ergo fibrillarum longitudo erit $PP' = \frac{lx}{c}$, quarum ergo vis contrahendi in eadem ratione erit minor, quam in extremitate A A', ita vt ista vis futura sit $\frac{Lx}{c}$; haec igitur multiplicata per elementum $Pp = dx$ dabit vim elementarem $\frac{Lx\,dx}{c}$ quam denuo per latitudinem trabis multiplicari oportet, vt prodeat $\frac{Lbx\,dx}{c}$. Quoniam vero motus quo abruptio peragitur fit circa axem C, momentum istius vis elementaris respectu huius axis erit $= \frac{Lbxx\,dx}{c}$, cuius integrale $\frac{Lbx^3}{3c}$ per totam crassitiem trabis statuendo

 $x = a$

$x = c$ extensum praebebit totum momentum virium quibus trabs ruptioni resistit, quod ergo erit $= \frac{1}{3} Lbcc$. Quae expressio cum constet quatuor dimensionibus, ternae exprimunt aliquod volumen, cuius pondus vi abrumpenti aequatur, quarta vero dimensio exhibet longitudinem vectis, qua ista vis operatur. Quod si ergo haec trabs a tantis viribus sollicitetur, quarum momentum respectu puncti C superet valorem formulae $\frac{1}{3} Lbcc$, trabs in hoc loco certe abrumpetur.

§. 12. Quod si iam in modulo hae dimensiones b et c referuntur ad singulas trabeculas, quarum firmitas ruptioni resistere debet; pro ipso ponte autem litterae B et C similes dimensiones trabium quibus constat exprimant, virium momenta, quibus tam modulus, quam ipse pons fractioni resistant inter se erunt vt bcc ad BCC. Vbi obseruari debet, actionem virium in eum tendere sensum, vt trabes secundum crassitiem AC rumpere conentur. Si enim secundum latitudinem, quam ponimus $= b$ vim suam exererent, momenta virium inter se forent vt bbc ad BBC.

§. 13. Sit nunc longitudo moduli $= a$, ipsius pontis autem $=$ A; tum vero denotet v summam omnium virium, quas modulus sustinere valet, quin rumpatur, littera vero V denotet summam omnium virium, quarum actioni etiamnunc resistere valet: vtroque autem casu omnes istas vires simili modo per totam longitudinem tam moduli quam ipsius pontis distributas esse supponimus. Quo

posito

posito manifestum est momenta omnium harum virium tam in modulo quam in ponte fore inter se vt $av : AV$, vnde concludimus, hanc insignem proportionem, qua esse oportet

$$av : AV = bcc : BCC,$$

vnde sequitur

$$v : V = \frac{bcc}{a} : \frac{BCC}{A}.$$

§. 14. Consideremus nunc hic vires verticales quarum actionem pons sustinere debet, et quae oriuntur tam a proprio pondere pontis quam ab oneribus, quibus sustentandis par esse debet, pro quibus ergo litterae c et C referent crassitiem trabium qua viribus verticalibus resistunt, dum altera dimensio b latitudinem earum repraesentat. Statuamus igitur primo pro modulo eius proprium pondus a firmitate sustentandum $= p$, onus vero quod insuper gestare valeat $= q$, quod ergo per experimenta facile explorari poterit, dummodo per eius longitudinem continuo maiora onera imponuntur, donec cedere incipiat. Pro ipso autem ponte, designet littera P eius proprium pondus, Q vero sit summa omnium onerum, quae pons gestare posse postulatur; quibus positis, erit vtique

$$v = p + q \text{ et } V = P + Q,$$

vnde nostra proportio ita se habebit

$$p + q : P + Q = \frac{bcc}{a} : \frac{BCC}{A},$$

vnde pro ipso ponte deducimus

$$P + Q = \frac{aBCC}{Abcc}(p + q)$$

ex

ex qua aequatione ergo ſumma omnium onerum quae pons geſtare valebit determinari poterit, quae ſi minor fuerit quam requiritur, audacter pronunciare poterimus, pontem ſecundum modulum exſtruendum non ſatis roboris eſſe habiturum.

§. 15. Quoniam igitur ipſum pontem ſecundum modulum ſimili ratione et ex ſimili materia conſtrui aſſumimus, eius proprium pondus P ſe habebit ad pondus moduli vt A B C ad $a\,b\,c$; ſicque ex cognito pondere moduli p colligitur ipſius pontis pondus $P = \frac{ABC}{abc}p$; ex hoc ergo valore ſequitur fore $Q = \frac{aBCC}{Abcc}(p+q) - \frac{ABC}{abc}p$. Huius igitur regulae ope ex firmitate moduli, prouti per experimenta fuerit exploratum, hoc eſt ex cognitis ponderibus p et q aſſignari poteſt totum onus Q, quod ipſe pons ſupra proprium pondus ſuſtinere valebit. Ante omnia igitur cauendum eſt, ne pars negatiua $\frac{ABC}{abc}p$ maior euadat parte poſitiua $\frac{aBCC}{Abcc}(p+q)$, quoniam alioquin pons plane ſubſiſtere non poſſet, ſed proprio pondere corrueret. Ne igitur hoc eueniat omnino neceſſe eſt, vt ſit $p + q > \frac{AAc}{aaC}p$, ideoque $q > (\frac{AAc}{aaC} - 1)p$.

§. 16. Quod ſi iam aſſumamus, ipſum pontem prorſus et ſecundum omnes dimenſiones ſimilem eſſe modulo. (Facile enim intelligitur, noſtram formulam etiam locum habere poſſe, quamuis ternae dimenſiones maiores A, B, C non plane eandem rationem tenerent ad minores a, b, c, dummodo

modo discrimen non fuerit satis magnum) statuamus singulas dimensiones moduli se habere ad dimensiones ipsius pontes vt $1:n$, eritque ergo $A = n a$, $B = n b$ et $C = n c$. Hinc igitur habebimus istam aequationem pro onere Q definiendo:

$$Q = n^2 (p + q) - n^3 p \text{ siue } Q = n n (p + q - n p)$$

vnde patet, vt pons consistere possit, ante omnia necesse esse, vt sit $q > (n-1)p$; quia alioquin proprio pondere in ruinam laberetur. Praeterea vero necesse est, vt onus a modulo gestatum q eo magis superet hunc limitem $(n-1)p$, quo maius fuerit summa omnium onerum Q, quae ipse pons gestare posse postulatur. Ita si e. gr n fuerit $= 30$, necesse est vt sit $q > 29 p$; vnde si fuerit $q = 30 p$ erit $Q = 900 p$; sin autem sit $q = 31 p$, prodibit $Q = 1800 p$: at si sit $q = 32 p$ fiet $Q = 2700 p$ etc. Ex quo intelligitur, si modo q aliquot vicibus superet limitem $29 p$ tum pontem iam satis notabile onus Q sustinere posse; quoniam pro qualibet vice incrementum capit $= 900 p$.

§. 17. Quod si hoc modo pons ad perfectam similitudinem moduli exstructus non satis roboris habiturus reperiatur huic defectui remedium afferri poterit, dum crassities saltem trabium, quam littera C designauimus vltra rationem $1:n$ augeatur. Quanquam enim hac ratione non amplius perfecta similitudo inter modulum subsistet: tamen conclusiones, quas nostrae formulae suppeditant nihilo minus valebunt, dummodo dissimilitudo non fuerit enormis, atque onera vtrinque aequabiliter per totam lon-

longitudinem distribuantur. Quemadmodum enim pontem cum modulo comparauimus, nulla necessitas vrget, vt omnes ternae dimensiones a, b, c et A, B, C eandem prorsus inter se teneant rationem.

§. 18. Maneat igitur ratio longitudinis $a : A = 1 : n$ siue $A = n a$, eademque ratio etiam pro latitudine retineatur vt sit $B = n b$; verum pro crassitie statuatur $C = z c$. Hinc igitur formula nostra pro onere Q (§. 15.) inuenta sequenti modo se habebit:

$$Q = z z (p + q) - n n z p.$$

Ex hac igitur aequatione si onus a ponte gestandum Q fuerit praescriptum definiri poterit quantitas incognita

$$z = \frac{n n p + \surd\, n^4 p p + 4 (p + q) Q}{2 (p + q)}.$$

Hinc igitur, si circumstantiae permittant, vt in constructione pontis crassities trabium tanto maior capi queat, hoc modo ponti sufficiens firmitas conciliabitur.

§. 19. Illustremus hanc formulam quodam exemplo, et sumamus latitudinem fluuii tricies superare longitudinem moduli, siue esse $n = 30$. Sumamus porro pontem tantum roboris habere debere, vt sustinere queat onus $= 3600 p$; modulo autem explorato tantum prodiisse $q = 30 p$, vnde si pons perfecte similis conficeretur modulo, prodiret tantum $Q = 900 . p$ quam ob rem in nostra formula faciamus $q = 30 p$ et $Q = 3600 p$ ac reperiemus

$$z = \frac{900 . + \surd\, 900^2 . + 4 . 31 . 3600}{2 . 31}$$

quae

quae reducitur ad

$$z = \frac{900 + 30\sqrt{900 + 16.31}}{2.31}$$

cuius valor ergo reperietur $z = 32,595$, vnde perſpicitur, hoc caſu pontem ſatis firmitatis eſſe adepturum, dummodo craſſities trabium $32\frac{3}{5}$ vicibus maior ſumatur quam in modulo, dum binae reliquae dimenſiones tantum tricies maiores ſumantur; quo pacto diſcrimen, quo a ſimilitudine receditur vix animaduerti poterit.

§. 20. Hoc igitur remedium etiam in vſum vocari poterit, quamuis modulo per experimenta explorato onus q multo minus repertum fuerit, quam $29p$. Quod vt generaliter oſtendamus ponamus experimenta in modulo inſtituta praebuiſſe $q = (\lambda - 1)p$, manente onere ab ipſo ponte geſtando $Q = 3600p$. Cum igitur hinc ſit $p + q = \lambda p$ habebitur

$$z = \frac{900 + 30\sqrt{900 + 16\lambda}}{2\lambda} = \frac{15}{\lambda}(30 + \sqrt{900 + 16\lambda}).$$

Hic igitur incipiendo a valore $\lambda = 33$ dontinuo minores aſſumamus, et valores ipſius z inde reſultantes in ſequenti tabula exhibeamus.

λ	$q=(\lambda-1)p$	$z=\frac{15}{\lambda}(30+\sqrt{900+16\lambda})$
33	32 p	30, 81
32	31 p	31, 68
31	30 p	32, 85
30	29 p	33, 58
29	28 p	34, 62
28	27 p	35, 74
27	26 p	36, 61
26	25 p	38, 23
25	24 p	39, 63
24	23 p	41, 14
23	22 p	42, 79
22	21 p	44, 58
21	20 p	46, 54
20	19 p	48, 70

§. 31. Ex hac igitur tabula colligimus, si firmitas moduli tantum praebuerit $q=20\,p$, quo casu exstructio pontis penitus repudianda videri posset: tamen ei satis roboris conciliatum iri, si modo crassities trabium secundum rationem 1 : 48, 70 multiplicetur. Similique modo etiam in aliis casibus, vbi pontes vel alia huiusmodi opera secundum modulum exstrui proponuntur, facile diiudicari poterit, vtrum satis firmitatis sint habitura nec ne, atque adeo posteriori casu firmitatem pro lubitu augere licebit.

§. 32. Verum quia pontes etiam impetui ventorum satis resistere debent, explorari etiam debebit modulus, dum fortissimo vento exponitur. Quod

Quod si enim eius impetum sustinere valeat, etiam certi esse poterimus, ipsum pontem a tali vento nullum damnum esse passurum. Cum enim impulsio venti eiusdem superficiei sit proportionalis, ideoque rationem $1 : nn$ teneat, quoniam firmitas qua vento resistitur eandem rationem sequitur, manifestum est, ipsum pontem eosdem venti impetus sustinere posse, quibus modulus resistere valuerit.

§. 23. Sin autem forte eueniat, vt pons non satis roboris habere deprehendatur, tum eius vis vento resistendi facile augeri poterit, dum latitudo trabium maior accipietur; imprimis autem vtile erit, ponti in vtroque termino maiorem tribuere latitudinem quam circa medium, vt hoc modo vento quasi fornicem offerat, quo eius impulsioni multo fortius resistat. Vix autem hinc quicquam metuendum videtur, dummodo ratione prioris generis satis habuerit roboris, eique insuper sufficiens latitudo tribuatur.