1776

Observationes circa novum et singulare progressionum genus

Leonhard Euler

OBSERVATIONES CIRCA NOVVM ET SINGVLARE PROGRESSIONVM GENVS.

Auctore
L. EVLERO.

1.

Inter res saepenumero, quae attentione nostra haud dignae videantur, obseruantur quaedam, quae satis profundam inuestigationem requirunt, ac non parum sublimibus speculationibus occasionem praebent. Quod cum plurimis exemplis confirmari possit, tum nuper etiam ipse sum expertus, dum quaestionem illam tyronibus notissimam, attentius contemplarem, qua quindecim Christiani totidemque Iudaei ita ordine sunt collocandi, vt si, numerandi initio in dato loco sumto, nonus quisque vel decimus in mare sit eiiciendus, haec poena in solos Iudaeos sit casura. Quae quaestio etiamsi in se nihil habeat difficultatis, tamen mox vidi, si in genere de hominum numero quocunque, ex quibus non nonus sed secundum alium quemuis numerum quotusquisque sit eiiciendus, proponatur, difficillimum fore, ordinem eorum, qui continuo eiicientur, assignare. Neque adeo methodus constat hoc in genere praestandi, tametsi quouis casu oblato, dum numeratio actu instituitur, solutio facillime obtinetur. Ex hoc genere haud parum curiosa mihi videtur quaestio, si v. gr. ex pluribus sontium numero is solus sit supplicio afficiendus, qui, postquam nonus quisque vel secundum alium numerum ex ordine fuerit exemtus, tandem vltimo solus sit remansurus; hic scilicet maxime intererit, ante nosse illum fatalem locum, in quo numeratio illa vltimo terminabitur.

2. Quo omnia quae hic inuestiganda occurrunt, clarius perspiciantur, casum illum perpendamus, quo ex serie 30 notarum nona quaeque expungitur, quod negotium numeratione actu instituta ita commodissime repraesentatur:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
23	20	28	24	14	4	7	12	1	19	16	10	26	27	25	5	18	2	8	29	30	13	15	11	22	6	3	21	17	9

Hic superiores numeri indicant, quoto loco a primo computando quaeque nota sit posita; inferiores vero numeri ostendunt, quando quaeque eiiciatur, dum scilicet continuo nona quaeque expungitur: Ita patet, primo nonam, secundo decimam octauam, tertio vicesimam septimam, quarto sextam, quinto decimam sextam et ita porro expungi, donec vltimo delenda superfit sola vicesima prima, qui adeo foret locus ille fatalis ante memoratus. Si indices eiectorum ordine disponantur, indicesque notarum subscribantur, haec series prodibit.

Indices

Indices eiectionis

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30

9, 18, 27, 6, 16, 26, 7, 19, 30, 12, 24, 8, 22, 5, 23, 11, 29, 17, 10, 2, 28, 25, 1, 4, 15, 13, 14, 3, 20, 21

Indices naturales.

Hanc postremam seriem vocabo *seriem eiectionis*, quia ea indicat, quota nota eiiciatur primo, secundo, tertio etc. Ita scilicet primo eiicitur nota 9^{na}, secundo 18^{va}, tertio 27^{ma}, quarto 6^{ta}, quinto 16^{ta} et ita porro, donec vltimo trigesimo nempe loco eiiciatur nota vicesima prima. Vbi quidem meminisse oportet, postquam numerando in serie notarum ad finem fuerit peruentum, numerationem iterum ab initio continuari; ex quo intelligitur, notam trigesimam primam conuenire cum prima, et si cuiusque notae index fuerit n, eidem quoque indices $n+30$, $n+60$, $n+90$ etc. conuenire sunt censendi.

3. Si hanc seriem eiectionis consideremus, vix vllum ordinem in ea deprehendere licet; tres quidem primi termini 9, 18, 27 secundum differentiam 9 ascendunt; et quartus quoque 6, quia cum 36 conuenit, eandem legem sequitur. Quintus autem, qui est 16 vel 46, denario praecedentem superat, quia in numerando iam vnus scilicet 9 seu 39 est deletus, ideoque non numeratur. Ob eandem rationem a termino quinto 16 ad sextum 26 etiam 10, at a sexto 26 ad septimum 7 seu 37 iam 11 numerantur; sicque saltus continuo fiunt maiores, quia plures notae iam deletae transiliuntur; quod operationem actu instituendo sponte elucet, etiamsi

ordinem harum differentiarum auctarum vix assignare liceat; generatim certe hic nihil omnino definiri posse videtur. Circa finem autem imprimis haec series eiectionis ita fit irregularis, vt nulli prorsus legi adstricta videatur. Eum in finem autem hanc seriem hic exposui, quo clarius omnes difficultates, quibus perscrutatio eius impeditur, perspiciantur, haecque ipsa series ex ludicro principio enata attentione nostra non indigna videatur.

4. Haec autem series eiectionis specialis duabus rebus determinatur, quarum altera in numero notarum, qui est 30, altera vero numeratore, qui est 9 continetur. Quocirca in genere quaestio huc redit: vt dato notarum numero vna cum numeratore ipsa series eiectionis exhibeatur, cuius solutionem cum in genere sperare nequeamus, in casibus particularibus attentionem nostram exerceri conueniet, num forte legem quampiam detegere videamus. Ac primo quidem patet, si numerator fuerit vnitas, seriem eiectionis ipsam fore seriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4 etc. quoniam enim primus quisque eiicitur, primo loco primus terminus, secundo secundus, tertio tertius et ita porro eiicitur, ita vt vltima nota simul sit terminorum eiectorum vltimus.

5. Sit igitur numerator $= 2$, ita vt secundus quisque eiiciatur, seu eiectio secundum alternos instituatur, ac pro notarum numero series eiectionis ita se habere deprehenduntur:

numerus

numerus notarum	series eiectionis pro numeratore 2
1	1
2	2, 1
3	2, 1, 3
4	2, 4, 3, 1
5	2, 4, 1, 5, 3
6	2, 4, 6, 3, 1, 5
7	2, 4, 6, 1, 5, 3, 7
8	2, 4, 6, 8, 3, 7, 5, 1
9	2, 4, 6, 8, 1, 5, 9, 7, 3
10	2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, 5
11	2, 4, 6, 8, 10, 1, 5, 9, 3, 11, 7
12	2, 4, 6, 8, 10, 12, 3, 7, 11, 5, 1, 9
13	2, 4, 6, 8, 10, 12, 1, 5, 9, 13, 7, 3, 11
14	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 3, 7, 11, 1, 9, 5, 13
15	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 1, 5, 9, 13, 3, 11, 7, 15
16	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 3, 7, 11, 15, 5, 13, 9, 1.

Hoc ſchema inſpicienti facile erit pluribus modis ordinem quendam obſeruare. Vltimi ſcilicet termini manifeſto tenent progreſſionem arithmeticam binario creſcentem, dummodo termini qui numerum notarum eſſent ſuperaturi, infra eum deprimantur, numero ſcilicet notarum inde detracto. Ita cum primo habeatur 1, pro ſecunda ſerie vltimus, qui foret 3, binario ſubtracto ad vnitatem reducitur; hunc ſequitur 3, et ſequens 5 numerum notarum vnitate ſuperans ad vnitatem reducitur, et ita porro. Simili lege progrediuntur termini penultimi, tum vero etiam antepenultimi, atque adeo omnes ab ab vltimis aequidiſtantes. Quoniam igitur omnes rectae obliquae ei, quae per terminos vltimos tranſit parallelae, per huiusmodi progreſſiones arithmeticas pro numero notarum mutilatas tranſeunt, hinc iſtae ſeries quousque lubuerit facile continuantur.

6. Exponamus ſimili modo ſeries eiectionis pro numeratore $= 3$, ac lex progreſſionis multo magis abſcondita prodibit

numerus notarum	ſeries eiectionis pro numeratore 3
1	1
2	1, 2
3	3, 1, 2
4	3, 2, 4, 1
5	3, 1, 5, 2, 4
6	3, 6, 4, 2, 5, 1
7	3, 6, 2, 7, 5, 1, 4
8	3, 6, 1, 5, 2, 8, 4, 7
9	3, 6, 9, 4, 8, 5, 2, 7, 1
10	3, 6, 9, 2, 7, 1, 8, 5, 10, 4
11	3, 6, 9, 1, 5, 10, 4, 11, 8, 2, 7
12	3, 6, 9, 12, 4, 8, 1, 7, 2, 11, 5, 10
13	3, 6, 9, 12, 2, 7, 11, 4, 10, 5, 1, 8, 13
14	3, 6, 9, 12, 1, 5, 10, 14, 7, 13, 8, 4, 11, 2
15	3, 6, 9, 12, 15, 4, 8, 13, 2, 10, 1, 11, 7, 14, 5
16	3, 6, 9, 12, 15, 2, 7, 11, 16, 5, 13, 4, 14, 10, 1, 8.

etc.

Interim tamen etſi ſecundum lineas horizontales et verticales ordo magis eſt abſtruſus, tamen in vltimis

mis iterum progressio arithmetica se prodit secundum ternarium crescens; haecque eadem lex quoque in penultimis et antepenultimis vt ante deprehenditur, ex quo et has series facillime continuare licet.

7. Circa hanc legem in terminis vltimis locum habentem dubitare amplius non poterimus, dum ea adhuc pro numeratore 4 obseruetur. Pari ergo modo series eiectionis inde erectas repraesentemus

numerus notarum	series eiectionis pro numeratore 4
1	1
2	2, 1
3	1, 3, 2
4	4, 1, 3, 2
5	4, 3, 5, 2, 1
6	4, 2, 1, 3, 6, 5
7	4, 1, 6, 5, 7, 3, 2
8	4, 8, 5, 2, 1, 3, 7, 6
9	4, 8, 3, 9, 6, 5, 7, 2, 1
10	4, 8, 2, 7, 3, 10, 9, 1, 6, 5
11	4, 8, 1, 6, 11, 7, 3, 2, 5, 10, 9
12	4, 8, 12, 5, 10, 3, 11, 7, 6, 9, 2, 1
13	4, 8, 12, 3, 9, 1, 7, 2, 11, 10, 13, 6, 5
14	4, 8, 12, 2, 7, 13, 5, 11, 6, 1, 14, 3, 10, 9
15	4, 8, 12, 1, 6, 11, 2, 9, 15, 10, 5, 3, 7, 14, 13
16	4, 8, 12, 16, 5, 10, 15, 6, 13, 3, 14, 9, 7, 11, 2, 1
	etc.

Hinc ergo lex illa in seriebus oblique descendentibus

 pror-

prorsus confirmatur, quae scilicet hic sunt arithmeticae quaternario crescentes, dum termini numerum nostrum superantes infra eum deprimuntur. In seriebus autem horizontalibus et verticalibus ordo fit continuo intricatior. Quin etiam ipsa rei natura in seriebus horizontalibus nullam progressionis legem patitur, propterea quod eae, cum omnes numeros notarum numero non maiores fuerint complexae, vlteriori continuationi aduersantur, ita vt continuatio tanquam imaginaria sit spectanda.

8. En ergo insignem legem, cuius ope pro quouis numeratore et notarum numero, nota vltimo eiicienda assignari potest. Existente scilicet numeratore $= n$, si pro notarum numero ν vltima eiicienda sit z, seu indici z respondeat, tum pro numero notarum $\nu + 1$, vltima eiicienda erit $z + n$, siquidem non sit $z + n > \nu + 1$; at si $z + n > \nu + 1$, vltima erit $z + n - \nu - 1$ vel $z + n - 2(\nu + 1)$ vel $z + n - 3(\nu + 1)$, vel generatim diuidendo $z + n$ per $\nu + 1$, residuum ex diuisione relictum dabit indicem vltimae notae eiiciendae. Vbi notetur, si diuisio nihil relinquat, tum pro residuo o scribi notarum numerum $\nu + 1$. Cum ergo pro numero notarum n cognita fuerit vltimo eiecta, pro omnibus notarum numeris maioribus vltimo eiecta facile per hanc regulam assignabitur. Perpetuo autem si vnica fuerit nota, eadem quoque erit vltimo eiecta, seu si fuerit $\nu = 1$, erit $z = 1$, vnde sequentes omnes sine vllo negotio reperiuntur. Quae regula eo magis est notatu digna, quod sine eiectionis ordine

dine cognito statim vltimo eiiciendam exhibeat, etiamsi ea manifesto ab ordine ante eiectarum pendeat. Quamobrem haec regula merito tanquam insigne Theorema spectari debet, in cuius demonstrationem inquirere omnino operae erit pretium.

9. Sequenti modo autem eius demonstratio commodissime adstrui videtur. Consideretur notarum numerus $\nu + 1$, vnde secundum numeratorem n prima fiat eiectio, quae cadet, in notam n, siquidem fuerit $n < \nu + 1$, vel in notam $n - \alpha(\nu + 1)$, qui indices autem omnes indici n aequiualent. Expungatur ergo haec nota, vti haec punctorum series A indicat

$$\begin{array}{l} \quad\;\; 1\;\; 2\;\; 3 \qquad\qquad\qquad\qquad n \;\; n+1 \;\; n+2 \qquad\qquad \nu+1 \\ A;\; \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\;|\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

ac notae praecedentes 1, 2, 3 . . . . $(n - 1)$ ad finem adiungantur indicibus numero $\nu + 1$ auctis, vt prodeat ista punctorum series

$$\begin{array}{l} \qquad\quad n+1 \;\; n+2 \;\; n+3 \qquad\qquad\qquad \nu+1 \;\; \nu+2 \qquad\qquad \nu+n \\ B \cdot\cdot\cdot\cdot\;\; \cdot \;\;\; \cdot \;\;\; \cdot \;\; \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \;\; \cdot \;\;\; \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \end{array}$$

in qua notarum numerus est ν, quaeque series ab ea, vbi numerus notarum est ν, quam ita repraesento,

$$\begin{array}{l} \qquad\;\; 1\;\; 2\;\; 3\;\; 4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \nu-1\;\; \nu \\ C \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

aliter non differt, nisi quod ibi indices numeratore n sunt aucti. Vtrinque ergo eiectiones secundum numeratorem n factae in easdem ordine notas cadent, ac si eiectio vltima in serie C incidat in notam cuius index est z, ea in serie B incidet in notam cuius

-ius index est $n + z$; id quod etiam in serie notarum A, quarum numerus est $\nu + 1$ eueniet. Quo ipso veritas nostri Theorematis euincitur. Simul autem inde patet, quod hic de notis vltimo eiectis est demonstratum, idem de penultimis, antepenultimis, omnibusque ordinibus ab vltimis aequidistantibus valere.

10. Huius igitur regulae ope statim pro quouis numeratore series eiectionis formare poterimus, cuius specimen pro numeratore 5 hic appono

numerus notarum	series eiectionis pro numeratore 5
1	1
2	1, 2
3	2, 3, 1
4	1, 3, 4, 2
5	5, 1, 3, 4, 2
6	5, 4, 6, 2, 3, 1
7	5, 3, 2, 4, 7, 1, 6
8	5, 2, 8, 7, 1, 4, 6, 3
9	5, 1, 7, 4, 3, 6, 9, 2, 8
10	5, 10, 6, 2, 9, 8, 1, 4, 7, 3
11	5, 10, 4, 11, 7, 3, 2, 6, 9, 1, 8
12	5, 10, 3, 9, 4, 12, 8, 7, 11, 2, 6, 1

12. Etsi autem series notarum vltimo loco eiectarum tam simplicem ac facilem legem sequitur: tamen hoc maxime mirabile vsu venit, quod in genere hanc seriem nullo modo exhibere liceat. Veluti

luti ſi pro numeratore ſeries vltimo electorum ita repraeſentetur

num. notarum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 . . . ν
ſeries 1. A B C D E F G H I . . . N

nouimus quidem fore A vel 1 vel 2, ſeu $A = n - 2i$ vero

$B = A + n - 3i$, $C = B + n - 4i$, $D = C + n - 5i$ etc.

verum tamen hinc generaliter terminum N aſſignare non valemus, propterea quod in ſingulis littera i determinatum numerum denotat, tantum ſcilicet, vt terminus indicem ſupra ſcriptum non ſuperet. Hinc etſi determinatio $D = C + n - 5i$ nihil habet difficultatis, tamen ſi velimus pro C ſuum valorem $B + n - 4i$ ponere, vt prodeat $D = B + 2n - 4i - 5i$ hinc nihil concludere poſſumus, quandoquidem geminae litterae i valores non innoteſcunt. Cauſa igitur, cur in genere circa hanc feriem nihil definire liceat, in hoc conſiſtit, quod continuo terminorum reductio ad alios numeros ſit inſtituenda. Facilius hoc intelligetur, ſi perpendamus, nullum terminum ex praecedente abſolute determinari, ſed ad plures interdum conditiones eſſe reſpiciendum: Scilicet ſi quartus detur C, quintus erit vel $C + n$ niſi $C + n > 5$;

vel erit $C + n - 5$ niſi $C + n > 10$
vel erit $C + n - 10$ niſi $C + n > 15$
etc.

quemlibet autem terminum ad ſuam debitam formam deprimi oportet, antequam ex eo ſequentem ope regulae demonſtratae eliciamus.

13. Pro caſibus autem particularibus ad terminos valde remotos per ſaltus progredi licet, vt non ſit opus omnes intermedios euoluiſſe. Scilicet ſi pro numeratore n, indici ν, qui hic notarum numerum ſignificat, reſpondeat terminus a, tum indici $\nu + x$ reſpondebit terminus $a + nx$, dum ſit $a + nx < \nu + x$ ſeu $x < \frac{\nu - a}{n - 1}$: quin adhuc hic terminus recte ſe habet, ſi x vnitate augeatur, hoc eſt ſi $x > \frac{\nu - a}{n - 1}$, vt exceſſus vnitate ſit minor, tumque indici $\nu + x$ reſpondecit terminus $(n - 1)x - \nu + a$. Simili modo ab hoc per ſaltum ad remotiorem terminum peruiuire licet, ſaltus autem continuo fiunt maiores: per ſingulos autem ſaltus termini in progreſſione arithmetica ſecundum numeratorem n creſcente procedunt. Ab initio quidem ſinguli termini ſeorſim ſunt definiendi, ſtatim autem atque ad indices numeratore maiores peruenitur, calculus per ſaltus commodius inſtituitur, cuius ſpecimen pro numeratore 9 opponam, vbi perpetuo numerum $\nu - a$ per 8 ita diuidi oportet, vt quotus nimis magnus accipiatur: tum enim ipſe quotus dabit valorem ipſius x, et reſiduum erit terminus per hunc ſaltum ſequens:

Series

Series pro numeratore 9

Indices. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18
termini. 1, 2, 2, 3, 2, 5, 7, 8, 8, 7, 5, 2, 11, 6, 15, 8, 17, 8
Saltus 2 3 3 4 4 4 5 6 6 7 8 9
indices 20, 22, 25, 28, 32, 36, 40, 45, 51, 57, 64, 72, 81
termini. 6, 2, 4, 3, 7, 7, 3, 3, 6, 3, 2, 2, 2
Saltus 10 12 13 14 16 19 20 23 26 30 33 37
indices 91, 103, 116, 130, 146, 165, 185, 208, 234, 264, 297, 334
termini. 1, 6, 7, 3, 1, 7, 2, 1, 1, 7. 7, 6
Saltus 42 47 52 60 67 75 85 95 107 120
indices 376, 423, 475, 535, 602, 677, 762, 857, 964, 1084
termini. 8, 8, 1, 6, 7, 5, 8, 6, 5, 1
Saltus 136 152 172 193 217 244 275 309 348
indices 1220, 1372, 1544, 1737, 1954, 2198, 2473, 2782, 3130
termini. 5, 1, 5 5, 4, 2, 4, 3, 5
etc.

14. Hanc ergo ſeriem facili labore vltra ter- mille terminos continuauimus, ac ſi vlterius progredi velimus, ex numeris poſtremis 3130 et 5 calculum ita inſtituimus:

ab 3130
ſubtr. 5
8)3125
391 (3)

Hinc ſaltus per 391 terminos porrigitur, indeque terminus cuius index eſt 3521 erit vt reſiduum indicat 3. Porro

ab 3521
ſubtr. 3
8)3518
440 (2)

Hic ſaltus fit per 440 terminos, vnde oritur index $3521 + 440 = 3961$, cui reſpondet terminus 2 reſidio indicatus.

ab

ab 3961
ſubtr. 2 Hinc colligitur pro indice 4456
terminus 1.

8)3959
495 (1)

Ab hoc autem ſaltus ſequens vltra 5000 extenditur; neque tamen video, quomodo huius ſeriei terminus verbi gratia decies milleſimus vel adeo centies milleſimus niſi ſaltibus hoc modo continuendis, aſſignari poſſit: indices quidem per hos ſaltus creſcentes ſecundum progreſſionem geometricam in ratione 8 : 9 proxime creſcunt, ſed quia hoc tantum proxime fit, hinc nullum ſubſidium pro continuatione obtinetur.

15. Hinc ergo pro quouis notarum numero, dummodo 5000 non longe ſuperet, inquam eiectionis ſors poſtremo cadet: ex ſerie ſcilicet hic per ſaltus exhibita is terminus quaeri debet, qui indici notarum numero aequali reſpondet. Perpetuo ſcilicet index proxime minor ſumatur indeque progreſſis arithmetica vsque ad indicem propoſitum per differentiam 9 continuetur, quod in nonnullis exemplis declarari expediet.

I. Quaeratur ſeriei illius terminus centeſimus: Proxime inferior index per ſaltus inuentus eſt 91, cui conuenit terminus 1. Iam inde ad centiſſimum ſunt loca 9, et nouies nouem ſeu 81 ad illum terminum 1 adiiciendo prodit terminus centeſimus 82. Quare ſi ex centum ſontibus is ſit ſupplicio afficiendus,

dus, qui postquam reliqui per numerationem ad 9 fuerint libera, tandem solus relinquatur, haec poena in 82^{dum} ordine incidet.

II. Vt terminus 200^{mus} reperiatur, calculus ita instituatur:

200
Index proximus 185 terminus 2
15 per 9 dat 135
terminus quaesitus 137

III. Quaeratur terminus 500^{mus}:

500
Index proximus 475 terminus 1
25 per 9 dat 225
terminus quaesitus 226

IV. Quaeratur terminus millesimus:

1000
Index proximus 964 terminus 5
36 per 9 dat 324
terminus quaesitus 329

V. Quaeratur terminus 5000^{mus}:

5000
Index proximus 4456 terminus 1
544 per 9 dat 4896
terminus quaesitus 4897

17. Consideratio huiusmodi serierum tam facili negotio formandarum non solum est iucunda, sed

ſed etiam non parum ad numerorum naturam tantopere nobis adhuc abſconditam felicius perſcrutandam conferre quicquam poſſe videtur. Eximium certe hoc eſt exemplum, et omni attentione dignum, quod ſeries tam leui opera non ſolum formari ſed etiam quousque libuerit, continuari poſſit, cum tamen eius natura et vera indoles nobis maneat prorſus incognita, neque vt aliae ad terminum generalem reuocari poſſit.

II. Simili modo etiam pro numeratore 6 ordines eiectionis ſubiungimus.

Numerus notarum	Series eiectionis pro numeratore 6
1.	1
2.	2. 1
3.	3. 2. 1
4.	2. 1. 4. 3
5.	1. 3. 2. 5. 4
6.	6. 1. 3. 2. 5. 4
7.	6. 5. 7. 2. 1. 4. 3
8.	6. 4. 3. 5. 8. 7. 2. 1
9.	6. 3. 1. 9. 2. 5. 4. 8. 7
10.	6. 2. 9. 7. 5. 8. 1. 10. 4. 3
11.	6. 1. 8. 4. 2. 11. 3. 7. 5. 10. 9

16. Viciſſim autem ſi detur ordo eiectorum, qui ab vltimo regrediendo fit:

z, y, x, v, u, t, s, r etc.

ex eo pro quouis numeratore et quolibet notarum numero, initialis ordo notarum inueſtigari poterit. Quod

Quod quo clarius appareat, ſit numerator = 4 et pro quolibet notarum numero ordo notarum ſequenti modo ſe habebit:

multitudo notarum	ordo notarum initialis
1	*z z*
2	*z y z y*
3	*x z y*
4	*x z y v*
5	*z y v u x*
6	*v u x t z y*
7	*t z y s v u x*
8	*v u x r t z y s*
9	*z y s q v u x r t*
10	*x r t p z y s q v u*
11	*q v u o x r t p z y s*
12	*z y s n q v u o x r t p*
13	*r t p m z y s n q v u o x*
14	*u o x l r t p m z y s n q v*
15	*n q v k u o x l r t p m z y s*
16	*z y s i n q v k u o x l r t p m*
17	*t p m k z y s i n q v k u o x l r*
18	*x l r g t p m k z y s i n q v k u o.*

Conſideratio horum ordinum non ſolum eorum naturam ſatis luculenter declarat, ſed etiam plures inſignes ſpeculationes ſuppeditare poterit.