



1775

De motu oscillatorio binarum lancium ex libra suspensarum

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De motu oscillatorio binarum lancium ex libra suspensarum" (1775). *Euler Archive - All Works*. 469.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/469>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE
MOTV OSCILLATORIO
 BINARVM LANCIVM EX LIBRA
 SVSPENSARVM.

Auctore

L. E V L E R O.

§. I.

Omnino singulare atque maxima attentione dignum videtur illud oscillationum genus, cuius nuper mentionem fecit Illustrissimus Bernoullius, his verbis:

Cum aliquando in libra, maiori eaque subpigra, alteram lancem forte fortuna ad latus diducirem, moxque rursus dimitterem, accidit utique, ut protinus hinc inde oscillaret, nec ab initio lanx opposita de loco moueretur: mox autem et haec quoque agitari sensimque maiores oscillationes formare, dum e contrario lanx prior motum suum oscillatorium gradatim perderet tandemque vere quiesceret; Hoc ipso momento altera maximum motionis gradum, initiali lancis sociae fere aequalem, attingebat; tunc ordine contrario, eadem mutationes repetebantur, usque, dum prima lanx motum suum primitivum integrum resumeret sociaque quieti ad momentum redderetur: haec autem oscillationum communicatio ac reciprocatio diu satis sese manifestabat:

Non

Non dubito quin determinatio motus istius oscillato-
rii omnibus geometris maxime ardua videatur, ne-
que enim video, quemadmodum subsidia quibus ha-
ctenus ad alia oscillationum genera evoluenda felici-
ter vsi sunt, ~~id~~ genus hocce expediendum, cum
successu adhiberi queant; quamobrem ad prima mo-
tus principia confugiendum esse, censeo, vt omnia
commemorata motus Phaenomena, quae vtique sum-
mopere admirabilia videntur rite explicari queant.
Hanc igitur inuestigationem hic suscipere constitui,
operam imprimis daturus, ne vllam circumstantiam
quae quicquam ad hunc motum conferre valeant sim
praetermissurus.

§. 2. Ac primo quidem libra seu bilanx, in
qua illustris Auctor motus illos mirabiles obserua-
vit, subpigna perhibetur; vnde perspicuum est, cen-
trum grauitatis iugi infra punctum suspensionis seu
centrum motus situm fuisse. Deinde etiam facile
intelligitur, motum ab vna lance cum altera com-
municari non potuisse, nisi iugum aliquam inclina-
tionem fuerit passum, quam ob rem, vt in motus
tam ipsius iugi quam binarum lancium rite inqui-
ram, ad quodcunque tempus ab initio elapsum,
quod sit $= k$, et in minutis secundis exprimatur,
considerabo situm tam iugi quam lancium.

§. 3. Sit igitur C punctum suspensionis, seu Tab. III.
centrum motus, circa quod iugum in plano verti- Fig. 2.
cali est mobile, et per hoc punctum C ducatur
recta horizontalis pg , itemque verticalis Cc . Hoc
autem

autem instanti iugum reperiatur in situ inclinato $A C B$, ac ponatur angulus inclinationis $A C p = B C q = \omega$: ipsum vero iugum hic tanquam lineam rectam $A C B$ repraesento, ex cuius extremitatibus A et B lances sint suspensae. Vocemus igitur longitudinem brachiorum $C A = C B = a$ et massam seu pondus ipsius iugi cum trutina, examine, et omnibus partibus quae cum eo firmiter sunt connexae $= M$; eius autem centrum grauitatis cadat in punctum G infra C situm ad interuallum $C G = c$, quod ergo a verticali $C c$ declinabit angulo $G C c = \omega$. Praeterea vero sit momentum inertiae totius iugi respectu centri grauitatis $G = M k k$, quod scilicet reperitur, si singulae iugi particulae per quadrata distantiarum suarum a centro grauitatis G multiplicentur et in vnam summam colligantur; vnde momentum inertiae respectu centri motus C erit $= M (k k + c c)$.

§. 4. Nunc porro assumamus ambas lances ex ipsis iugi extremitatibus A et B esse suspensas, quare ducantur inde verticales $A a$ et $B b$, quem situm lances tenerent, si nullam haberent inclinationem; hic autem ambas lances, tanquam simplicia pondera, ope filorum grauitatis expertium ex punctis A et B suspensa, considero, et longitudinem vtriusque fili $A P = B Q$ vocemus $= b$, pondus autem lancis vtriusque $= L$. Nunc autem porro lancis $A P$ declinet a verticali $A a$ angulo $P A a = \eta$ et angulo $Q B b = \vartheta$.

§. 5. Nunc ex punctis P et Q ad axem nostrum horizontalem per C ductum ducamus perpendicularia Pp et Qq, atque ut horum locorum P et Q rationem in calculum introducamus, vocemus pro utroque quasi coordinatas $Cp = x$ et $pP = y$; tum vero $Cq = x'$ et $qQ = y'$, quas autem per elementa iam ante introducta determinari oportet.

§. 6. Hunc in finem pro lance P in verticali Pp productam ex A ducamus normalem Ar, et quia AP = b et angulus Apr = η erit

$$Ar = b \sin. \eta \text{ et } Pr = b \cos. \eta.$$

Deinde ex triangulo CAα ubi CA = a et angulus

$$CA\alpha = \omega \text{ erit } A\alpha = a \sin. \omega \text{ et } C\alpha = a \cos. \omega,$$

unde pro puncto P binæ coordinatæ erunt

$$Cp = x = C\alpha + Ar = a \cos. \omega + b \sin. \eta \text{ et}$$

$$Pp = y = Pr - A\alpha = b \cos. \eta - a \sin. \omega.$$

Eodem modo pro altera lance, si ex C agantur verticalis Bε et horizontalis Bs, erit Bε = a sin. ω et Cε = a cos. ω, deinde Bs = b sin. θ et Qs = b cos. θ unde colligimus

$$Cq = x' = C\epsilon - \epsilon q = a \cos. \omega - b \sin. \theta \text{ et}$$

$$Qq = y' = Qs + B\epsilon = b \cos. \theta + a \sin. \omega.$$

§. 7. Iam pro motu determinando considerentur vires quibus ambæ lances sollicitantur, quæ quidem primò a gravitate deorsum videntur vi = L; præterea vero sustinent tensionem filorum AP et BQ. Sit igitur pro lance P tensio fili AP = P, quæ resoluta dat vim verticalem secundum Pp = P cos. η

Tom. XIX. Nou. Comm.

Qq

et

et vim horizontalem secundum $pC = P \sin. \eta$; ita vt
lanx P sursum vrgeatur secundum $Pp \text{ vi} = P \cos. \eta - L$,
ex quibus viribus motus huius lancis per sequentes
duas aequationes differentio differentiales definitur:

$$\text{I. } \frac{d dx}{a g dt^2} = - \frac{P \sin. \eta}{L} \quad \text{et II. } \frac{d dy}{2 g dt^2} = \frac{L - P \cos. \eta}{L}$$

§. 8. Simili modo altera lanx ob tensionem Q
sursum vrgetur $\text{vi} = Q \cos. \vartheta$, secundem directio-
nem horizontalem vero $Cq \text{ vi} = Q \sin. \vartheta$; sicque
deorsum vrgebitur $\text{vi} = L - Q \cos. \vartheta$; vnde principia
motus iterum duas sequationes nobis suppeditant

$$\text{III. } \frac{d dx'}{2 g dt^2} = \frac{Q \sin. \vartheta}{L} \quad \text{et IV. } \frac{d dy'}{2 g dt^2} = \frac{L - Q \cos. \vartheta}{L}$$

vbi g denotat altitudinem, ex qua grauia vno minu-
to secundo delabuntur.

§. 9. Cum igitur motum vtriusque lancis
expediuerimus, contemplemur nunc etiam motum ipsius
iugi, qui cum sit gyriorius, quaeramus vires acce-
leratrices, quae tendant ad angulum $PCA = \omega$ au-
gendum; vbi primo occurrit proprium iugi pondus
 $= M$, quod, quia in centro grauitatis G collectum
est putandum, producet momentum ad angulum ω
imminuendum, eritque propterea $= - M c \sin. \omega$.
Deinde vero iugum vrgetur a tensione vtriusque fi-
li, et a tensione AP oritur momentum ad angu-
lum ω diminiendum tendens, pro quo inueniendū
notetur esse angulum $CAa = 90^\circ - \omega$; ergo quia
 $PAa = \eta$ erit totus angulus $CAa = 90^\circ - \omega + \eta$,
cuius sinus est $= \cos. (\omega - \eta)$, ex quo momentum hinc
oriundum erit $= P a \cos. (\omega - \eta)$. Ab altera autem
parte,

parte, quia est angulus $CB\beta = 90^\circ + \omega$ et $QB\delta = \mathcal{D}$ erit $CBQ = 90^\circ + \omega - \mathcal{D}$, cuius sinus $= \cos.(\mathcal{D} - \omega)$. Momentum igitur hinc natum, quia tendit ad angulum ω augendum, erit $= + Qa \cos.(\mathcal{D} - \omega)$; sicque omnia momenta in iugum agentia iunctim erunt

$$-Mc \sin. \eta - Pa \cos.(\omega - \eta) + Qa \cos.(\mathcal{D} - \omega)$$

quod momentum per momentum inertiae $= M(kk + cc)$ diuisum praebet accelerationem angularem, quae secundum principia motus hanc aequationem suppeditat:

$$V. \frac{d^2 \omega}{g dt^2} = - \frac{M c \sin. \eta - P a \cos.(\omega - \eta) + Q a \cos.(\mathcal{D} - \omega)}{M(kk + cc)}$$

Quae quinque aequationes totam problematis solutionem complectuntur.

§. 10. Quo autem pateat, quasham res ex quinque his aequationibus determinare oporteat, primum statim apparet, ante omnia ambas tensiones P et Q definiri debere; tum vero ex tribus aequationibus quae relinquentur tantum opus est ut nostros angulos η , \mathcal{D} et ω eliciamus. His enim inventis, ad datum quoduis tempus t verum situm tam iugi quam ambarum lancium poterimus assignare. Sicque tota ista sublimis quaestio perfecte erit soluta; saltem si quae obstacula occurrant, id non mechanicae sed soli analysi erit tribuendum.

§. 11. Statim autem perspicitur, omnem operam nequicquam impedi et inutiliter collocari, quamdiu tres nostri anguli η , \mathcal{D} , ω ad quantitates notabiles exurgere possent; quam ob rem, uti in plerisque aliis oscillationum generibus, hos angulos quasi infinite paruos statuere conueniet, ut eorum sinus

$Q \eta^2$

ipsis

ipsis angulis, cosinus vero unitati aequales reputari queant; sicque nostra inuestigatio tantum ad oscillationes quam minimas restringetur. Tum vero coordinatae x et y , item x' et y' sequenti modo exprimentur:

$$\begin{aligned} x &= a + b \eta & x' &= a - b \mathcal{P} \\ y &= b - a \omega & y' &= b + a \omega \end{aligned}$$

§. 12. His obseruatis quinque nostrae aequationes sequentes induent formas:

$$\begin{aligned} \text{I.} & \frac{b d d \eta}{2 g d t^2} = -\frac{P \eta}{L}; & \text{II.} & -\frac{a d d \omega}{2 g d t^2} = \mathcal{P} - \frac{P}{L} \\ \text{III.} & -\frac{b d d \mathcal{P}}{2 g d t^2} = +\frac{Q \mathcal{P}}{L}; & \text{IV.} & +\frac{a d d \omega}{2 g d t^2} = \mathcal{P} - \frac{Q}{L} \\ \text{V.} & \frac{d d \omega}{2 g d t^2} = -\frac{M c \omega - P a + Q a}{M(kk + c c)} \end{aligned}$$

ex quarum aequationum secunda et quarta statim colligimus ambas tensiones P et Q ; erit enim

$$P = \frac{L a d d \omega}{2 g d t^2} + L \quad \text{et} \quad Q = L - \frac{L a d d \omega}{2 g d t^2}$$

§. 13. Substituamus igitur hos valores in tribus reliquis aequationibus, quae euadent

$$\begin{aligned} \text{I.} & \frac{b d d \eta}{2 g d t^2} = -\eta - \frac{c \eta d d \omega}{2 g d t^2} & \text{III.} & -\frac{b d d \mathcal{P}}{2 g d t^2} = \mathcal{P} - \frac{a \mathcal{P} d d \omega}{2 g d t^2} \\ \text{V.} & \frac{M(kk + c c) d d \omega + 2 L a d d \omega}{2 g d t^2} = -M c \omega \end{aligned}$$

ex quibus iam tres angulos η , \mathcal{P} et ω determinare oportet.

§. 14. Quia postrema aequatio solum variabilem ω cum tempore t inuoluit, ab eius resolutione inchoemus. Hunc in finem ponamus breuitatis gratia

$$\frac{M(kk + c c) + 2 L a a}{M c} = f \quad \text{vt fiat} \quad \frac{f d d \omega}{2 g d t^2} + \omega = 0,$$

vnde

vnde patet oscillationes iugi similes fore pendulo simplici cuius longitudo $= f$, vnde ista aequatio integrata dabit $\omega = \mathcal{C} \sin. (\gamma + t \sqrt{\frac{g}{f}})$, vbi \mathcal{C} et γ sunt constantes per duplicem integrationem ingressae; quam ob rem tempus singularum oscillationum quibus iugum agitabitur in minutis secundis expressum erit $= \frac{f}{g}$. Cum igitur sit $f = \frac{c}{c} + \frac{k k}{c} + \frac{2 L a a}{M c}$, patet, si libra non esset subpigna, seu si centrum gravitatis G in ipso centro motus C esset situm, ob $c = 0$ fore $f = \infty$, ideoque iugum nullum motum oscillatorium esse recepturum.

§. 15. Cum igitur sit $\frac{d.d.\omega}{2 g a t^2} = -\frac{\omega}{f}$ iste valor duas reliquas aequationes ita transformabit

$$\text{I. } \frac{b d d \eta}{2 g a t^2} = -\eta + \frac{a \eta \omega}{f}; \quad \text{II. } \frac{b d d \vartheta}{2 g a t^2} = -\vartheta - \frac{a \vartheta \omega}{f}$$

Quia autem angulus ω est quasi infinite parvus, postrema harum aequationum membra saltem in principio praetermittere licebit; vnde utriusque lancis motus pariter congruet cum oscillationibus penduli simplicis cuius longitudo $= b$. Hincque per quantitates finitas reperietur

$$\text{I. } \eta = \mathcal{A} \sin. (\alpha + t \sqrt{\frac{g}{b}}) \quad \text{II. } \vartheta = \mathcal{B} \sin. (\beta + t \sqrt{\frac{g}{b}})$$

hi autem valores tantum vt vero proximi sunt spectandi.

§. 16. Quo igitur hos binos motus accuratius definiamus, loco ω in ipsis aequationibus differentialis suam valorem substituamus; quod quo facilius fieri possit, sit brevitatis gratia

$$\sqrt{\frac{g}{f}} = \lambda \text{ vt fiat } \omega = \mathcal{C} \sin. (\gamma + \lambda t),$$

et habebimus has aequationes :

$$\frac{b \, d \, d \eta}{2 \, g \, d \, t^2} = -\eta + \frac{a \, \mathcal{E} \, \sin. (\gamma + \lambda t)}{f}$$

$$\frac{b \, d \, d \vartheta}{2 \, g \, d \, t^2} = -\vartheta - \frac{a \, \mathcal{E} \, \sin. (\gamma + \lambda t)}{f}$$

atque hic etiam faciamus $V^2 \frac{g}{b} = \mu$, vt prima membra harum aequationum fiant

$$\frac{d \, d \eta}{\mu \, \mu \, d \, t^2} \quad \text{et} \quad \frac{d \, d \vartheta}{\mu \, \mu \, d \, t^2}.$$

§. 17. Iam pro priore aequatione ponamus reuera esse

$\eta = \mathcal{A} \sin. (\alpha + \mu t) + p$, eritque $d\eta = \mathcal{A} \mu dt \cos. (\alpha + \mu t) + dp$ et $dd\eta = -\mathcal{A} \mu \mu dt^2 \sin. (\alpha + \mu t) + ddp$,

quo valore substituto erit

$$\frac{d \, d p}{\mu \, \mu \, d \, t^2} = -p + \frac{a \, \mathcal{E} \, \sin. (\alpha + \mu t) \sin. (\gamma + \lambda t)}{f}.$$

Nunc autem notetur esse

$$\begin{aligned} & \sin. (\alpha + \mu t) \sin. (\gamma + \lambda t) \\ &= \frac{1}{2} \cos. (\alpha - \gamma + t(\mu - \lambda)) - \frac{1}{2} \cos. (\alpha + \gamma + t(\mu + \lambda)). \end{aligned}$$

Ponatur

$$p = \frac{1}{2} M \cos. (\alpha - \gamma + t(\mu - \lambda)) + \frac{1}{2} N \cos. (\alpha + \gamma + t(\mu + \lambda))$$

et facta substitutione prodibit sequens aequatio

$$\begin{aligned} & -\frac{M(\mu - \lambda)^2}{2 \, \mu \, \mu} \cos. (\alpha - \gamma + t(\mu - \lambda)) - \frac{N(\mu + \lambda)^2}{2 \, \mu \, \mu} \cos. (\alpha + \gamma + t(\mu + \lambda)) \\ &= -\frac{1}{2} M \cos. (\alpha - \gamma + t(\mu - \lambda)) - \frac{1}{2} N \cos. (\alpha + \gamma + t(\mu + \lambda)) \\ &+ \frac{a \, \mathcal{E}}{2 \, f} \cos. (\alpha - \gamma + t(\mu - \lambda)) - \frac{a \, \mathcal{E}}{2 \, f} \cos. (\alpha + \gamma + t(\mu + \lambda)) \end{aligned}$$

Aequentur nunc seorsim tam cosinus differentiae quam cosinus summae, ac obtinebuntur hae aequalitates:

$$0 = \frac{M(\mu - \lambda)^2}{2 \, \mu \, \mu} - \frac{1}{2} M + \frac{a \, \mathcal{E}}{2 \, f}$$

$$0 = \frac{N(\mu + \lambda)^2}{2 \, \mu \, \mu} - \frac{1}{2} N - \frac{a \, \mathcal{E}}{2 \, f}$$

ex

ex quibus reperietur

$$M = \frac{\mu \mu a \mathfrak{A} \mathfrak{C}}{\lambda (2\mu - \lambda) f} \quad \text{et} \quad N = \frac{\mu \mu a \mathfrak{A} \mathfrak{C}}{\lambda (2\mu + \lambda) f}$$

quocirca angulus η ita accuratius exprimetur ut sit,

$$\eta = \mathfrak{A} \sin. (\alpha + \mu t) + \frac{\mu \mu a \mathfrak{A} \mathfrak{C}}{2 \lambda (2\mu - \lambda) f} \cos. (\alpha - \gamma + t(\mu - \lambda)) \\ + \frac{\mu \mu a \mathfrak{A} \mathfrak{C}}{2 \lambda (2\mu + \lambda) f} \cos. (\alpha + \gamma + t(\mu + \lambda)).$$

§. 18. Eodem modo tractemus alteram aequationem, quae est

$$\frac{d d \mathfrak{B}}{\mu \mu dt^2} = - \mathfrak{B} - a \mathfrak{B} \mathfrak{C} \sin. (\gamma + \lambda t)$$

quae aequatio a praecedente non differt, nisi quod ibi erat $+a$ hic est $-a$, ita ut tantum loco a nunc scribendum sit $-a$. Deinde vero, quia hic agitur de angulo \mathfrak{B} , loco litterarum \mathfrak{A} et a hic scribere debemus \mathfrak{B} et β , unde huius anguli valor correctus erit

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B} \sin. (\mathfrak{C} + \mu t) - \frac{\mu \mu a \mathfrak{B} \mathfrak{C}}{2 \lambda (2\mu - \lambda) f} \cos. (\mathfrak{C} - \gamma + t(\mu - \lambda)) \\ - \frac{\mu \mu a \mathfrak{B} \mathfrak{C}}{2 \lambda (2\mu + \lambda) f} \cos. (\mathfrak{C} + \gamma + t(\mu + \lambda)).$$

Erat vero $\omega = \mathfrak{C} \sin. (\gamma + \lambda t)$.

§. 19. In his formulis probe distingui conveniet quantitates cognitae et incognitae; cognitae autem sunt, praeter distantias a, b et c una cum ponderibus L et M quantitates inde formatae f et numeri λ et μ : incognitae igitur erunt sequentes sex $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ et $\alpha, \mathfrak{C}, \gamma$; tot scilicet constantes arbitrariae ob duplicem integrationem trium aequationum differentio-differentialium introduci debebant, ut solutio generalis prodiret; quod etiam natura rei postulat. Nam si status initialis quomodocunque fuerit datus, is non

non solum per tres angulos η , ϑ et ω determinatur, sed etiam ad motum, qui siue iugo siue vtrique lanci imprimi potuit est attendendum, vnde sex conditionibus pro quouis casu erit satisfaciendum.

§. 20. Hunc infinem necesse est, vt etiam celeritates angulares, quae tribus nostris angulis praesenti tempore t conueniant exprimamus; quae ita se habebunt

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= \mu \mathcal{A} \operatorname{col.}(\alpha + \mu t) - \frac{\mu \mu (\mu - \lambda) a \mathcal{A} \mathcal{E}}{2 \lambda (2 \mu - \lambda) f} \sin.(\alpha - \gamma + t(\mu - \lambda)) \\ &\quad - \frac{\mu \mu (\mu + \lambda) a \mathcal{A} \mathcal{E}}{2 \lambda (2 \mu + \lambda) f} \sin.(\alpha + \gamma + t(\mu + \lambda)) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \mu \mathcal{B} \operatorname{col.}(\beta + \mu t) + \frac{\mu \mu (\mu - \lambda) a \mathcal{B} \mathcal{E}}{2 \lambda (2 \mu - \lambda) f} \sin.(\beta - \gamma + t(\mu - \lambda)) \\ &\quad + \frac{\mu \mu (\mu + \lambda) a \mathcal{B} \mathcal{E}}{2 \lambda (2 \mu + \lambda) f} \sin.(\beta + \gamma + t(\mu + \lambda)) \end{aligned}$$

ac denique

$$\frac{d\omega}{dt} = \lambda \mathcal{C} \operatorname{col.}(\gamma + \lambda t)$$

hocque modo tota solutio huius problematis difficilissimi feliciter ad finem est perducta.

§. 21. Iam obseruauimus, si centrum motus C in ipso centro grauitatis existeret, tum fore $f = \infty$ hincque $\lambda = \sqrt{\frac{2g}{f}} = 0$, sicque iugum nullum plane motum oscillatorium recipere posse; quandoquidem in omni situ foret in aequilibrio. Vnde etiam ambae lances ita seorsim oscillare possent, vt neutrius motus ab altera perturbetur, id quod etiam nostrae formulae manifesto declarant; quoniam partes posteriores, quae ob motum iugi sunt adiectae euanescent; tum enim anguli η et ϑ simpliciter per formulas $\mathcal{A} \sin.(\alpha + \mu t)$ et $\mathcal{B} \sin.(\beta + \mu t)$ exprimerentur,

rentur, sicque vtriusque motus admodum penduli simplicis oscillationes peragere posset, neque earum motus vilo modo in se inuicem influeret; hoc autem intelligendum est quamdiu iugum maneret in quiete, etsi in statu inclinato. Vt primum autem motum acceperit, quia nullae vires adsunt eum reprimentes, angulus ω mox tantopere increfceret, vt non amplius pro minimo haberi posset; hoc igitur casu ne formulae quidem quas inuenimus locum habere possent. At si centrum grauitatis G adeo supra centrum motus C esset positum, ita vt interuallum $GC = c$ foret negatiuum, etiam quantitas z negatiua euaderet, numerus autem λ imaginarius; quam ob causam omnis motus oscillatorius penitus excluderetur, quandoquidem iugum a minima inclinatione prorsus prolaberetur.

§. 22. Vt igitur ea Phaenomena quae ab Illustri *Bernoulli* commemorantur se manifestare possent, omnino requiritur, vt centrum grauitatis G infra centrum motus C cadat, hoc est vt libra sit *subpigna*. Interim tamen, quoniam interuallum $CG = c$ semper valde exiguum esse solet, euident est, longitudinem f semper fore praegrandem, hincque numerum λ valde paruum; dum contra numerus $\mu = \sqrt{\frac{2g}{b}}$ plerumque est valde notabilis, nisi forte lances P et Q per breuissima fila suspendantur quod autem nunquam fieri solet, hanc ob rem in genere hic assumere licet, numerum λ semper multo minorem esse quam μ .

§. 23. Vt iam in phaenomena motus accuratius inquiramus, primum obseruo, qualiscumque situs et motus ambabus lancibus fuerit impressus; si ipsum iugum in quiete relinquatur, idque in situ suo horizontali, ita vt initio fuerit tam $\omega = 0$ quam $\frac{d\omega}{dt} = 0$, ob $t = 0$, fore tam $\mathcal{C} \sin. \gamma = 0$ quam $\lambda \mathcal{C} \cos. \gamma = 0$, id quod fieri nequit, nisi sit $\mathcal{C} = 0$;posito autem $\mathcal{C} = 0$, prodiret $\eta = \mathcal{A} \sin. (a + \mu t)$ et $\mathcal{S} = \mathcal{B} \sin. (\mathcal{E} + \mu t)$, existente $\omega = \mathcal{C} \sin. (\gamma + \lambda t)$ quae tres formulae nullo modo in se inuicem influunt. Hoc igitur casu tam iugum quam utraque lanx seorsim motu oscillatorio regulari ferretur, neque vllius motus a reliquis perturbaretur; quod cum in phaenomenis memoratis non vñ venerit, id manifesto est indicio, iugum primo motus initio vel non fuisse in quiete, vel quandam inclinationem accepisse, id quod etiam ab impulsu, quem altera lanx initio accepisse fertur necessãrdo euenire debuit.

§. 24. Ponamus igitur primo initio iugum ita de situ suo naturali fuisse depulsum, vt tum fuerit angulus $\omega = m$, neque vero praeterea vllum motum accepisse; quo posito primo initio vbi $t = 0$ erat $m = \mathcal{C} \sin. \gamma$, tum vero $\frac{d\omega}{dt} = \lambda \mathcal{C} \cos. \gamma = 0$, vnde colligimus $\gamma = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ et $\mathcal{C} = m$. Ipsum autem iugum deinceps oscillationes peraget regulares et conformes pendulo simplici, cuius longitudo $f = \frac{c}{\lambda} + \frac{k}{a} + \frac{2L^2 a}{Mc}$, vnde fit $\lambda = \sqrt{\frac{2g}{f}}$, ita vt etiam fit $f = \frac{2g}{\lambda^2}$.

§. 25. Nunc igitur hos valores $\mathfrak{C} = m$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$
 et $f = \frac{\pi}{\lambda}$ in formulis pro angulis η et \mathfrak{D} inuen-
 tis substituamus, eritque

$$\eta = \mathfrak{A} \sin. (\alpha + \mu t) + \frac{\lambda \mu \mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu - \lambda)} \cos. (\alpha - \frac{\pi}{2} + t(\mu - \lambda))$$

$$+ \frac{\lambda \mu \mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu + \lambda)} \cos. (\alpha + \frac{\pi}{2} + t(\mu + \lambda))$$

et $\mathfrak{D} = \mathfrak{B} \sin. (\mathfrak{C} + \mu t) - \frac{\lambda \mu \mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu - \lambda)} \cos. (\mathfrak{C} - \frac{\pi}{2} + t(\mu - \lambda))$

$$- \frac{\lambda \mu \mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu + \lambda)} \cos. (\mathfrak{C} + \frac{\pi}{2} + t(\mu + \lambda))$$

Cum autem sit

$$\cos. (\alpha + t(\mu - \lambda) - 90^\circ) = \sin. (\alpha + t(\mu - \lambda)) \text{ et}$$

$$\cos. \alpha + t(\mu + \lambda) + 90^\circ = -\sin. (\alpha + t(\mu + \lambda))$$

erit aliquanto concinnius

$$\eta = \mathfrak{A} \sin. (\alpha + \mu t) + \frac{\lambda \mu \mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu - \lambda)} \sin. (\alpha + t(\mu - \lambda))$$

$$- \frac{\lambda \mu \mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu + \lambda)} \sin. (\alpha + t(\mu + \lambda))$$

et $\mathfrak{D} = \mathfrak{B} \sin. (\mathfrak{C} + \mu t) - \frac{\lambda \mu \mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu - \lambda)} \sin. (\mathfrak{C} + t(\mu - \lambda))$

$$+ \frac{\lambda \mu \mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu + \lambda)} \sin. (\mathfrak{C} + t(\mu + \lambda))$$

vnde porro pro utroque motu angulari deducimus

$$\frac{d\eta}{dt} = \mu \mathfrak{A} \cos. (\alpha + \mu t) + \frac{\lambda(\mu - \lambda)\mu \mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu - \lambda)} \cos. (\alpha + t(\mu - \lambda))$$

$$- \frac{\lambda(\mu + \lambda)\mu \mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu + \lambda)} \cos. (\alpha + t(\mu + \lambda))$$

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \mu \mathfrak{B} \cos. (\mathfrak{C} + \mu t) - \frac{\lambda(\mu - \lambda)\mu \mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu - \lambda)} \cos. (\mathfrak{C} + t(\mu - \lambda))$$

$$+ \frac{\lambda(\mu + \lambda)\mu \mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu + \lambda)} \cos. (\mathfrak{C} + t(\mu + \lambda)).$$

EVOLVTIO CASVS

quo primo initio ambae lances in situ verticali quieuerunt, dum iugum ad angulum $ACP = m$ fuit inclinatum.

§. 26. Cum igitur initio fuerit tam $\eta = 0$ et $\vartheta = 0$ quam $\frac{d\eta}{dt} = 0$ et $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, posito $t = 0$ pro determinatione constantium habebimus has quatuor aequationes:

$$\begin{aligned} \text{I. } 0 &= \sin. \alpha + \frac{\lambda \mu \mu a m}{g(2\mu - \lambda)} \sin. \alpha - \frac{\lambda \mu \mu a m}{g(2\mu + \lambda)} \sin. \alpha \\ \text{II. } 0 &= \sin. \xi - \frac{\lambda \mu \mu a m}{g(2\mu - \lambda)} \sin. \xi + \frac{\lambda \mu \mu a m}{g(2\mu + \lambda)} \sin. \xi \\ \text{III. } 0 &= \cos. \alpha + \frac{\lambda(\mu - \lambda) \mu a m}{g(2\mu - \lambda)} \cos. \alpha - \frac{\lambda(\mu + \lambda) \mu a m}{g(2\mu + \lambda)} \cos. \alpha \\ \text{IV. } 0 &= \cos. \xi - \frac{\lambda(\mu - \lambda) \mu a m}{g(2\mu - \lambda)} \cos. \xi + \frac{\lambda(\mu + \lambda) \mu a m}{g(2\mu + \lambda)} \cos. \xi \end{aligned}$$

quae ad sequentes formas simpliciores reducuntur

$$\begin{aligned} \text{I. } 0 &= \sin. \alpha + \frac{\lambda \lambda \mu \mu a m}{2g(+\mu\mu - \lambda\lambda)} \sin. \alpha \\ \text{II. } 0 &= \sin. \xi - \frac{\lambda \lambda \mu \mu a m}{2g(+\mu\mu - \lambda\lambda)} \sin. \xi \\ \text{III. } 0 &= \cos. \alpha - \frac{\lambda \lambda \mu \mu a m}{2g(+\mu\mu - \lambda\lambda)} \cos. \alpha \\ \text{IV. } 0 &= \cos. \xi + \frac{\lambda \lambda \mu \mu a m}{2g(+\mu\mu - \lambda\lambda)} \cos. \xi \end{aligned}$$

quibus aequationibus pluribus modis satisfieri posse videtur: aliquos igitur percurramus.

§. 27. Sumamus $\alpha = 0$ et $\xi = 0$, vt binis prioribus satisfiat; ac posteriores erunt

$$\text{III. } 0 = 1 - \frac{\lambda \lambda \mu \mu a m}{2g(+\mu\mu - \lambda\lambda)}$$

$$\text{IV. } 0 = 1 + \frac{\lambda \lambda \mu \mu a m}{2g(+\mu\mu - \lambda\lambda)}$$

quibus nullo modo satisfieri potest, cum eorum summa

summa sit $0 = z$. Idem euenit si sumamus $\alpha = 90^\circ$ et $\xi = 90^\circ$, quo binis posterioribus satisfiat; ac priores euadent

$$I. 0 = 1 + \frac{\lambda \lambda \mu \mu \alpha \alpha}{z g (+ \mu \mu - \lambda \lambda)}$$

$$II. 0 = 1 - \frac{\lambda \lambda \mu \mu \alpha \alpha}{z g (+ \mu \mu - \lambda \lambda)}$$

quarum summa iterum daret $z = 0$, id quod est absurdum. Tale autem absurdum etiam in genere occurrit, cum

$$I \sin. \xi + II \sin. \alpha = 0 = z \sin. \alpha \sin. \xi;$$

eodemque modo

$$III \cos. \xi + IV \cos. \alpha = 0 = z \cos. \alpha \cos. \xi$$

quod utrumque simul fieri nequit.

§. 28. Verum, quoniam has aequationes ex principalibus vel per \mathcal{A} vel per \mathcal{B} dividendo elicimus, eos factores quibus totum negotium confici debet e medio sustulimus. Nullo scilicet alio modo huic casui satisfieri potest, nisi statuendo tam $\mathcal{A} = 0$ quam $\mathcal{B} = 0$, unde intelligimus, hoc casu ambas lances perpetuo in quiete esse permansuras, neque vllum motum esse recepturas, etiam si interea iugum inclinationes suas perpetuo absoluat.

EVOLVTIO CASVS

quo primo initio vna lance P a situ verticali ad angulum $PA \alpha = m$ diducitur, altera lance in quiete relicta, dum iugum ad angulum $ACP = m$ fuerit inclinatum.

§. 29. Hoc igitur casu posito $t = 0$ esse oportet $\eta = m$, $\mathcal{I} = 0$, $\frac{d\eta}{dt} = 0$ et $\frac{d\mathcal{I}}{dt} = 0$, unde se-

R r 3

quen-

quentes quatuor obtinemus aequationes iam ad formam simplicissimam perductas :

$$I. n = \mathcal{A} \sin. \alpha + \frac{\lambda \lambda \mu \mu a \mathcal{A} m}{2g(+\mu\mu - \lambda\lambda)} \sin. \alpha$$

$$II. 0 = \mathcal{B} \sin. \xi - \frac{\lambda \lambda \mu \mu a \mathcal{B} m}{2g(+\mu\mu - \lambda\lambda)} \sin. \xi$$

$$III. 0 = \cos. \alpha - \frac{\lambda \lambda \mu \mu a m}{2g(+\mu\mu - \lambda\lambda)} \cos. \alpha$$

$$IV. 0 = \cos. \xi - \frac{\lambda \lambda \mu \mu a m}{2g(+\mu\mu - \lambda\lambda)} \cos. \xi$$

vbi quidem tertia per \mathcal{A} quarta autem per \mathcal{B} multiplicanda est intelligenda; vnde patet, si fuerit $\mathcal{B} = 0$, tam secundae quam quartae aequationi simul satisfieri; tum autem, quia ipse angulus \mathcal{A} evanesceret, vtcunque reliquis aequationibus satisfaceret, et altera lancis Q nunquam ad motum esset peruentura, vnde concludimus, fieri posse, vt altera lancis perpetuo in quiete perseveret. Pro motu autem lancis P aequationibus I et III satisfieri oportet.

§. 30. Tertiae autem aequationi, quoniam pars posterior prae prima est quasi infinite parua, satisfieri nequit, nisi sit $\cos. \alpha = 0$, hoc est $\alpha = 90^\circ$; tum autem pro prima erit

$$n = \mathcal{A} + \frac{\lambda \lambda \mu \mu a \mathcal{A} m}{2g(+\mu\mu - \lambda\lambda)}$$

vnde deducitur valor litterae \mathcal{A} , qui proxime erit $\frac{n}{2}$, ita vt pro motu primae lancis habeamus hanc aequationem :

$$\eta = \frac{n}{2} \sin. (90^\circ + \mu t) + \frac{\lambda \mu \mu a m n}{4g(2\mu - \lambda)} \sin. (90^\circ + t(\mu - \lambda)) - \frac{\lambda \mu \mu a m n}{4g(2\mu + \lambda)} \sin. 90^\circ + t(\mu + \lambda)$$

$$\frac{d\eta}{dt}$$

$$\frac{d\pi}{dt} = \mu \pi \cos(90^\circ + \mu t) + \frac{\lambda(\mu - \lambda)\mu \mu a m \pi}{g(2\mu - \lambda)} \cos(90^\circ + t(\mu - \lambda)) \\ - \frac{(\mu + \lambda)\mu \mu a m \pi}{g(2\mu + \lambda)} \cos(90^\circ + t(\mu + \lambda))$$

vbi notetur esse

$$\sin(90^\circ + \mu t) = \cos \mu t \text{ et } \sin 90^\circ + t(\mu \pm \lambda) = \cos t(\mu \pm \lambda); \\ \cos(90^\circ + \mu t) = -\sin \mu t \text{ et } \cos(90^\circ + t(\mu \pm \lambda)) = -\sin t(\mu \pm \lambda).$$

Vnde patet, motum huius lancis non amplius esse regularem, sed eo magis a motu penduli simplicis esse recessurum, quo maiores fuerint coefficientes binorum postremorum terminorum. Quin etiam iste motus perturbatus ita repræsentari poterit, secundum principium Celeberrimi *Bernoulli*, ut sit permixtus ex triplici oscillationum genere, quorum primi tempus unius oscillationis sit $= \frac{\pi}{\mu}$, secundi vero $= \frac{\pi}{\mu - \lambda}$ et tertii $= \frac{\pi}{\mu + \lambda}$; haec scilicet permixtio oritur ex motu oscillatorio iugi.

§ 31. Hinc igitur iterum discimus, quomodo-
cunque tam ipsum iugum quam altera lanx initio
ad motum fuerint concitati, nullum plane motum
in altera lance generari posse, id quod memorato
experimento aduersari videtur. Verum probe notan-
dum est, nos hic tantum de oscillationibus minimis
loqui, vnde nequaquam asseuerare possumus, talem
communicationem in maioribus oscillationibus locum
habere non posse. Quoniam enim angulos η , ϑ et ω
tam paruos assumimus, ut loco eorum sinuum ipsos
angulos, loco cosinum vero ipsam unitatem scri-
bere liceret, evidens est, si ipsos sinus et cosinus in
calculum introducere voluissimus, inde utique in-
gens

gens discrimen oriturum fuisse, neque verò etiam hunc motum ex theoria definire licuisset. Videamus igitur etiam, quales motus sint prodituri, si etiam alteri lanci initio motus quicumque fuerit impressus.

EVOLVTIO CASVS

quo initio praeter inclinationem iugi ad angulum $ACp = m$ vtraque lanx ad quandam inclinationem diducitur, scilicet lanx P ad angulum $PAa = n$ et lanx Q ad angulum $QBb = n'$.

§. 32. Hic scilicet assumimus, neutri lanci initio motum fuisse inpressum, ita vt fuerit tam $\frac{d\eta}{dt} = 0$ quam $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, ad quod vtrique calculus accommodabitur, statuendo tam $\alpha = 90^\circ$ quam $\xi = 90^\circ$. Tum vero ob inclinationes initiales erit vt ante vidimus $\mathcal{A} = n$ et $\mathcal{B} = n'$, vnde pro motu vtriusque lancis impetramus has aequationes:

$$\eta = n \cos. \mu t + \frac{\lambda \mu \mu \alpha m n}{+g(2\mu - \lambda)} \cos. t(\mu - \lambda) - \frac{\lambda \mu \mu \alpha m n}{+g(2\mu + \lambda)} \cos. t(\mu + \lambda) \text{ et}$$

$$\vartheta = n' \cos. \mu t - \frac{\lambda \mu \mu \alpha m n'}{+g(2\mu - \lambda)} \cos. t(\mu - \lambda) + \frac{\lambda \mu \mu \alpha m n'}{+g(2\mu + \lambda)} \cos. t(\mu + \lambda).$$

§. 33. Quo has formulas magis contrahamus, ponamus breuitatis gratia $\lambda \mu \mu \frac{\alpha}{+g} = i$; tum igitur habebimus tam pro motu lancium quam iugi.

$$\eta = n \cos. \mu t + \frac{i m n}{2\mu - \lambda} \cos. t(\mu - \lambda) - \frac{i m n}{2\mu + \lambda} \cos. t(\mu + \lambda)$$

$$\vartheta = n' \cos. \mu t - \frac{i m n'}{2\mu - \lambda} \cos. t(\mu - \lambda) + \frac{i m n'}{2\mu + \lambda} \cos. t(\mu + \lambda) \text{ et}$$

$$\omega = m \cos. \lambda t$$

hinc-

hincque pro celeritatibus angularibus habebimus

$$\begin{aligned}\frac{d\eta}{dt} &= -\mu n \sin. \mu t + \frac{(\mu-\lambda)imn}{2\mu-\lambda} \sin. t(\mu-\lambda) + \frac{(\mu+\lambda)imn}{2\mu+\lambda} \sin. t(\mu+\lambda) \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\mu n' \sin. \mu t + \frac{(\mu-\lambda)imn'}{2\mu-\lambda} \sin. t(\mu-\lambda) - \frac{(\mu+\lambda)imn'}{2\mu+\lambda} \sin. t(\mu+\lambda) \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\lambda m \lambda t.\end{aligned}$$

§ 34. Hinc igitur patet, litteras m n et n' designare maximas digressiones, ad quas tam iugum quam ambae lances a statu aequilibrum diuagari possunt, quod quidem de ipso iugo omni rigore est verum. Pro lancibus autem utique fieri potest, ut ob partes posteriores maxima digressio fiat modo aliquanto maior modo minor quam n et n' , quae irregularitas eo erit maior, quo maior fuerit motus iugi seu angulus n ; tum vero etiam potissimum pendebit a numero i , qui eo erit maior, quo longius fuerit iugum, cuius semissis est $=a$; quam ob causam in minoribus bilancibus irregularitas talis minus percipi poterit.

§ 35. Quo indolem harum formularum clarius illustremus, quoniam numerus $\mu = \sqrt{\frac{2g}{b}}$ plerumque multo maior est, quam $\lambda = \sqrt{\frac{2g}{f}}$, sumamus exempli gratia $\lambda = 1$ et $\mu = 3$, ut tempus unius oscillationis iugi fiat $= \pi''$, lancium vero, quatenus motus est regularis $= \frac{\pi''}{3}$; tum igitur erit $i = \frac{2a}{4g}$, ubi g est circiter 16 pedum anglicorum; unde si effet $a = 2$ pedum, foret $i = \frac{1}{12}$. Sed ut calculus commodius reddatur, sumamus $i = \frac{1}{4}$; tum vero angulos m , n et n' ponamus circiter 10 graduum,

feu in partibus radii $m = n = n' = \frac{1}{2}$, quibus valoribus substitutis nostrae formulae erunt

$$\eta = \frac{1}{2} \cos. 3t + \frac{1}{720} \cos. 2t - \frac{1}{1080} \cos. 4t$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \cos. 3t - \frac{1}{720} \cos. 2t + \frac{1}{1080} \cos. 4t$$

$$\omega = \frac{1}{2} \cos. t$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{2} \sin. 3t - \frac{1}{360} \sin. 2t + \frac{1}{270} \sin. 4t$$

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = -\frac{1}{2} \sin. 3t + \frac{1}{360} \sin. 2t - \frac{1}{270} \sin. 4t$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{2} \sin. t.$$

§. 36. Quia tempus t exprimitur in minutis secundis, hic autem ut angulus spectatur: patet, vnum minutum secundum aequalere angulo 57° circiter. Vnde si statum librae cum lancibus per intervalla semi-minuti secundi examinare velimus, loco t successive scribamus angulos $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ etc. et ad quoduis momentum ternos angulos ω, η et \mathcal{P} in sequenti tabula referamus, vbi fractionem $\frac{1}{2}$ pro decem gradibus computemus, vnde fit $\frac{1}{720} = 5'$ et $\frac{1}{1080} = 3\frac{1}{2}'$

t	ω	η	θ
0	10°	0	10°
$\frac{1}{2}$	8°	40'	0°
$1\frac{1}{2}$	5°	0'	10°
2	0°	0'	0°
$2\frac{1}{2}$	5°	0'	9°
3	8°	40'	0°
$3\frac{1}{2}$	10°	0'	9°
4	8°	40'	0°
$4\frac{1}{2}$	5°	0'	9°
5	0°	0'	0°
$5\frac{1}{2}$	5°	0'	10°
6	8°	40'	0°
$6\frac{1}{2}$	10°	0'	10°

Ex hac autem tabula manifesto apparet, irregularitatem motus lancium tam esse exiguam, ut in praxi vix percipi posse; neque enim unquam numero maior valor tribui posse videtur.

§. 37. Cum igitur nullum plane vestigium appareat, unde tam mirabilia phaenomena in motu lancium oriri potuissent, dum ambae lances alternatim motum oscillatorium concepisse, tum vero iterum conquiescere perhibentur, fateri cogimur, a longe alia causa illud phaenomenon memoratum productum fuisse, siue ea in maioribus motibus sit quaerenda, siue in eo, quod puncta A et B, unde lances suspenduntur, in eadem recta cum centro motus C sita assumimus. Neque tamen apparet, quomodo ex tantilla mutatione, quam in his punctis

324. DE MOTV OSCILL. LANCIVM LIBRAE.

concupere licet, tam enorme discrimen oriri potuerit; praecipue cum methodus, qua hic sumus vsi, nulli plane dubitationi locum relinquat.

§. 38. His omnibus accuratius perpensis, haud difficulter perspicere licet, a motu iugis ideo nullum motum oscillatorium lancibus induci posse, quia eius extremitates A et B tantum verticaliter moventur, unde etiam lancibus nullus motus obliquus imprimi potest. Vera ergo causa, cur calculus noster a memoratis phaenomenis diffideat, in eo est sita, quod centrum motus C tanquam fixum spectauimus; statim autem atque ipsum hoc punctum C aliquem motum horizontalem conciperet, etiam puncta A et B pari motu ferrentur, unde utique lances ad motum gyrationem concitari deberent. Haec autem circumstantia manifesto in libris locum habet, quippe quae non ex ipso centro motus C, sed ex puncto multo altiori, scilicet ex scapo seu trutina suspendi solent; atque ex hoc iam perspicuum est, a rudi illa impulsione, qua altera lanx concitata perhibetur toti librae circa istud punctum suspensionis motum fuisse impressum, ob quem utique extremitates iugis A et B non tantum verticaliter, sed etiam horizontaliter agitari debuerint, ita ut hoc motu posteriori lances utique motum oscillatorium accipere debuerint. Quin etiam hinc iam ratio perspicitur, cur lances alternis vicibus modo quiescerint modo oscillarint. Pleniorum autem casus evolutionem alia occasione accuratius pertractare conabor.

EXPLI-