1775

Problema Diophanteum singulare

Leonhard Euler

PROBLEMA DIOPHANTAEVM SINGVLARE.

Auctore

L. EVLERO.

Problema.

Inuenire duos numeros, quorum productum vtrouis siue auctum siue minutum fiat quadratum.

Solutio.

§. 1. Cum ambo numeri quaesiti necessario sint fracti, ponatur vna $\frac{x}{z}$ et altera $\frac{y}{z}$ et conditiones Problematis postulant, vt sit

$$1^\circ.\ \frac{xy}{zz}\pm\frac{x}{z}=\square.\quad 2^\circ.\ \frac{xy}{zz}\pm\frac{y}{z}=\square$$

quae ergo formulae etiam per zz multiplicatae debent esse quadrata; vnde hae conditiones sunt adimplendae

$$1^\circ.\ xy\pm xz=\square$$

$$2^\circ.\ xy\pm yz=\square.$$

§. 2. Cum iam sit $aa+bb\pm 2ab=\square$ ex hoc fonte solutionem peti conueniet, quia autem duae huiusmodi conditiones proponuntur, ponamus duplici modo esse tam $xy=aa+bb$ quam $xy=cc+dd$, ita

ita vt fit $aa + bb = cc + dd$, id quod infinitis modis euenire poteſt, vnde pro priore conditione faciamus $xz = 2ab$ et $yz = 2cd$, quo pacto ambae conditiones adimplentur, quare cum inde habeamus

$$x = \frac{2ab}{z} \quad \text{et } y = \frac{2cd}{z}$$

erit nunc

$$xy = \frac{4abcd}{zz} = aa + bb = cc + dd,$$

vnde deducimus

$$zz = \frac{4abcd}{aa + bb} \text{ ſiue } \frac{zz}{4} = \frac{abcd}{aa + bb}$$

ita vt haec formula $\frac{abcd}{aa + bb}$ reddi debeat quadratum, praeterea vero etiam neceſſe eſt vt ſit

$$cc + dd = aa + bb.$$

§. 3. Incipiamus ab hac poſtrema conditione, ac denotent literae m et n eiusmodi numeros, vt ſit $mm + nn = 1$, id quod facile praeſtatur, ac capiatur

$$c = ma + nb \text{ et } d = na - mb$$

tum enim erit

$$cc + dd = (aa + bb)(mm + nn) = aa + bb$$

hinc igitur altera conditio poſtulat vt ſit

$$\frac{zz}{4} = \frac{ab((ma + nb)(na - mb))}{aa + bb} = \square$$

vel etiam

$$\frac{zz}{4} = \frac{ab(am + bn)(bm - an)}{aa + bb}$$

quandoquidem poſtremus factor $bm - an$ idem dat quadratum ac praecedens $(na - mb)$.

§. 4. Notum autem est literis m et n hos valores tribui debere

$$m = \frac{pp - qq}{pp + qq} \quad \text{et} \quad n = \frac{2pq}{pp + qq}$$

tum enim fit $mm + nn = 1$, hinc autem erit

$$am + bn = \frac{a(pp - qq) + 2bpq}{pp + qq} \quad \text{et} \quad bm - an = \frac{b(pp - qq) - 2apq}{pp + qq},$$

quae formulae in se inuicem multiplicatae praebent:

$$ab(pp - qq)^2 + \frac{2(bb - aa)pq(pp - qq)}{(pp + pp)^2} - \frac{4abppqq}{(pp + qq)^2}$$

cuius fractionis numeratorem breuitatis gratia designemus litera S, ita vt sit

$$S = abp^4 + 2(bb - aa)p^3q - 6abppqq - 2(bb - aa)pq^3 + abq^4$$

quo valore notato erit

$$\frac{zz}{4} = \frac{abS}{(aa + bb)(pp + qq)^2} \quad \text{siue}$$

$$\tfrac{1}{4}(aa + bb)(pp + qq)^2 zz = abS.$$

§. 5. Hinc igitur facta substitutione erit

$$abS = aabbp^4 - 2ab(aa - bb)p^3q - 6aabbppqq$$
$$+ 2ab(aa - bb)pq^3 + aabbq^4$$

quae formula, cum tam primum quam postremum membrum sint quadrata, commode ad quadratum reduci poterit, ita vt litteris a et b pro lubitu assumtis valores idonei pro p et q erui possint, tum vero vt etiam formula

$$\tfrac{1}{4}(aa + bb)(pp + qq)^2 zz$$

fiat quadratum: necesse est litteras a et b ita assumi vt $aa + bb$ fiat quadratum, quo facto radicem quadratam extrahendo habebitur:

$$\tfrac{1}{2}(pp + qq)z\sqrt{aa + bb} = \sqrt{abS}.$$

§. 6.

§. 6. Statuamus igitur ſecundum praecepta cognita

$$\sqrt{abS} = abpp - (aa-bb)pq + abqq$$

tum autem erit

$$abS = aabbp^4 - 2ab(aa-bb)p^3q + 2aabbppqq - 2ab(aa-bb)pq^3 + aabbq^4$$
$$+ (aa-bb)^2ppqq$$

quod quadratum ſi cum formula ſuperiori comparetur, membra prima, ſecunda et vltima ſe mutuo tollunt, reliqua vero per pqq diuiſa hanc ſuppeditant aequationem

$$-6aabbp + 2ab(aa-bb)q = 2aabbp - 2ab(aa-bb)q + (aa-bb)^2p$$

quae reducitur ad hanc formam

$$4ab(aa-bb)q = (a^4 + 6aabb + b^4)p$$

vnde concluditur $\frac{q}{p} = \frac{a^4+6aabb+b^4}{4ab(aa-bb)}$ quae fractio ſi deprimi nequeat, quod quidem nunquam eueni[illegible] poteſt, ponatur

$$p = 4ab(aa-bb) \text{ et } q = a^4 + 6aabb + b^4.$$

§. 7. Sumtis igitur numeris a et b ita vt $aa+bb$ fiat quadratum, hae formulae nobis praebent idoneos valores pro literis p et q, quibus inventis erit

$$\tfrac{1}{2}(pp+qq)z\sqrt{aa+bb} = \sqrt{abS} = abpp - (aa-bb)pq + abqq$$

hincque

$$z = \frac{2\sqrt{abS}}{(pp+qq)\sqrt{aa+bb}}$$

tum vero ipſi numeri quaeſiti erunt

$$\frac{x}{z} = \frac{2ab}{zz} \text{ et } \frac{y}{z} = \frac{2cd}{zz} = \frac{2(ma+nb)(na-mb)}{zz}$$

 vbi

vbi litteris m et n hi tributi ſunt valores

$$m = \frac{pp - qq}{pp + qq} \quad \text{et} \quad n = \frac{2pq}{pp + qq}:$$

hic perinde eſt ſiue valor poſterior prodeat negatiuus ſiue poſitiuus, ſemper enim poſitiuus locum habebit valor, quandoquidem terminus yz producto xy tam addi quam ſubtrahi debet.

§. 8. Quia $aa + bb$ debet eſſe quadratum, caſus ſimpliciſſimus quo hoc contingit eſt $a = 4$ et $b = 3$, tum enim erit

$$\sqrt{aa + bb} = 5, \; ab = 12 \text{ et } aa - bb) = 7,$$

ex his igitur porro deducimus

$p = 336$, $q = 1201$, deinde $\sqrt{abS} = 12(pp + qq) - 7pq$,

hincque

$$z = \frac{24(pp + qq) - 14pq}{5(pp + qq)} = \frac{24}{5} - \frac{14pq}{5(pp + qq)}$$

denique vero pro y inueniendo erit

$$(ma + nb) = \frac{4(pp - qq) + 6pq}{pp + qq} \text{ et } (mb - na) = \frac{3(pp - qq) - 8pq}{pp + qq},$$

quibus valoribus ſubſtitutis erit

$$\frac{x}{z} = \frac{24}{zz} \text{ et } \frac{y}{z} = \frac{2(4m + 3n)(4n - 3m)}{zz}$$

pro his formulis autem euoluendis notetur eſſe:

$$pp = 112896, \; qq = 1442401, \; pq = 403536$$

vnde elicitur

$$pp + qq = 1555297, \; \frac{5z}{2} = \frac{15838812}{1555297} \text{ hinc } z = \frac{2 \cdot 15838812}{5 \cdot 1555297}$$

porro $m = -\frac{1329505}{1555297}$, $n = \frac{807072}{1555297}$ vnde fit $4m + 3n = -\frac{2895804}{1555297}$ et $4n - 3m = \frac{7217803}{1555207}$ hinc ergo colligimus $\frac{x}{z} = \frac{6 \cdot 25(1555297)^2}{(15838812)^2}$ et $\frac{y}{z} = \frac{2896804 \cdot 25 \cdot 7216803}{2 \cdot 15838812^2}$.

§. 9.

§. 9. Cum hi numeri ſint tam immenſi; accuratius inquiramus, an non ſolutionem in numeris minoribus eruere liceat, et quo calculum paulisper contrahamus, incipiamus ab aequatione

$$\frac{zz}{4} = \frac{ab(am+bn)(bm-an)}{aa+bb}, \text{ vbi eſt}$$

$$m = \frac{pp-qq}{pp+qq} \text{ et } n = \frac{2pq}{pp+qq}$$

haecque formula quadratum efficienda tam negatiue quam poſitiue accipi poteſt; ſtatuamus iam $a = nb$ et $p = qr$ vt primo ſit

$$m = \frac{rr-1}{rr+1} \text{ et } n = \frac{2r}{rr+1},$$

tum vero haec formula ad quadratum reduci debeat

$$\frac{1}{4}zz \pm \frac{nbb((n(rr-1)+2r)(rr-1-2nr))}{(nn+1)(rr+1)^2} \text{ ſiue } \frac{zz(rr+1)^2}{4bb}$$
$$= \pm \frac{n((n(rr-1)+2r)(rr-1-2nr)}{nn+1} = \square,$$

hic autem primo obſeruamus caſu $r = 1$ hanc formulam euadere $= -\frac{4nn}{nn+1}$, ſiue etiam $+\frac{4nn}{nn+1}$ quae ergo erit quadratum dummodo $nn+1$ fuerit quadratum, praeterea vero notaſſe iuuabit, ſumto $r = n$ hanc formulam fieri

$$= -nn(nn+1)$$

cuius negatiuum iterum ſit quadratum, ſi modo $nn+1$ ſit quadratum, cum igitur duos iam habeamus caſus, quibus haec formula ſit quadratum, ex iis alios caſus ſecundum praecepta cognita eliciamus.

Euolutio prima.

§. 10. Cum vtroque caſu $nn+1$ debeat eſſe quadratum ponamus:

$$\frac{zz(rr+1)^2(nn+1)}{4bb} = TT \text{ vt ſit}$$

 TT=

$$TT = n((2r + n(rr - 1)(2nr - (rr - 1))$$

quae formula quia euadit quadratum posito $r = 1$, statuamus

$r = 1 + v$ eritque $rr - 1 = 2v + vv$ vnde oritur

$$TT = n((2 + 2(n+1)v + nvv)(2n(n-1)v - vv))$$

quae formula euoluta praebet

$$TT = 4nn + 4n(nn+2n-1)v + 4n(nn-1)vv + 2n(nn-2n-1)v^3 - nnv^4$$

statuatur ergo

$T = 2n + (nn+2n-1)v + fvv$, ideoque

$$TT = 4nn + 4n(nn+2n-1)v + (nn+2n^2-1)^2vv + 2f(nn+2n-1)v^3$$
$$+ ffv^4 \qquad + 4nfvv$$

vbi duo membra priora mutuo se tollunt, capiamus igitur f ita, vt etiam tertia membra se destruant, vnde fieri debet

$4n(nn-1) = (nn+2n-1)^2 + 4nf$ siue

$-n^4 - 2nn - 1 = -(nn+1)^2 = 4nf$ ideoque

$f = -\frac{(nn+1)^2}{4n}$;

iam cognito valore f reliqua membra per v^3 diuisa dant

$$2n(nn-2n-1) - nnv = 2f(nn+2n-1) = ffv$$

vnde colligitur

$$v = \frac{2n(nn-2n-1) - 2f(nn+2n-1)}{ff+nn}$$

hinc autem valor ipsius v multo magis fieret complicatus, quia in hac formula numerus n ad octauam potestatem exsurgit.

Euolu-

Euolutio secunda.

§. 11. Ponamus nunc $r = n + v$, eritque

$$TT = n((n(nn+1) + 2(nn+1)v + nvv)(nn+1-vv),$$

ideoque euoluendo

$$TT = nn(nn+1)^2 + 2n(nn+1)^2 v - 2n(nn+1)v^3 - nnv^4.$$

Ponatur igitur

$$T = n(nn+1) + (nn+1)v + fv^2,$$

cuius quadratum dat

$$TT = nn(nn+1)^2 + 2n(nn+1)^2 v + 2n(nn+1)fvv + 2(nn+1)fv^3 + ffv^4 + (nn+1)^2 vv$$

vbi duo membra priora iam se destruunt, vt igitur etiam termini vv se destruant sumi debet $f = -\frac{(nn+1)}{2n}$, tum vero bina membra posteriora per v^3 diuisa praebent

$$-2n(nn+1) - nnv = 2(nn+1)f + ffv \text{ vnde fit}$$

$$v = -\frac{2n(nn+1) - 2(nn+1)f}{ff+nn}$$

quae formula loco f valorem substituendo praebet:

$$v = \frac{-4n(nn+1)(n-1)}{5n^4+2nn+1}$$

vnde fit

$$r = \frac{n(n^4+2nn+5)}{5n^4+2nn+1} = \frac{p}{q} \text{ hinc cum sit } n = \frac{a}{b} \text{ erit}$$

$$p = a^4 + 2aabb + 5b^4 \text{ et } q = 5a^4 + 2aabb + b^4.$$

§. 12. Quod si ergo hic vt supra sumatur $a = 4$ et $b = 3$, reperietur

$$p = 949 = 13 \cdot 73 \text{ et } q = 1649 = 97 \cdot 17$$

qui numeri cum sint maiores iis, quos supra inuenimus

nimus, videntur maiores numeros quaesitos producere; quia autem vterque est impar, reductio quaepiam locum inueniet: interim tamen ad numeros minores non peruenitur.

§. 13. Si formulae hic pro TT inuentae signa inuertamus vt prodeat:

$$TT = nnv^4 + 2n(nn+1)v^3 - 2n(nn+1)^2 v - nn(nn+1)^2$$

ac ponamus

$$T = nvv + (nn+1)v + f,$$

erit sumto quadrato

$$TT = nnv^4 + 2n(nn+1)v^3 + 2nfvv + 2(nn+1)fv + ff + (nn+1)^2 vv$$

vbi prima et secunda membra se destruunt, ac pro tertiis fiat $f = -\frac{(nn+1)^2}{2n}$, iam inuento hoc valore fiat etiam

$$v = \frac{ff + nn(nn+1)^2}{-2n(nn+1)^2 - 2f(nn+1)}$$

et substituto pro f valor inuentus $-\frac{(nn+1)^2}{2n}$ reperitur $v = \frac{5n^4 + 2nn + 1}{4n(1-nn)}$, hincque porro

$$r = \frac{n^4 + 6nn + 1}{4n(1-nn)} = \frac{p}{q},$$ quia igitur $n = \frac{a}{b}$ erit

$$\frac{p}{q} = \frac{a^4 + 6aabb + b^4}{4ab(bb-aa)}.$$

Quae solutio eosdem praebet valores, quos per primam euolutionem eruimus, ex quo concludi posse videtur, simpliciores solutiones huius Problematis vix expectari posse.

§. 14.

§. 14. Imprimis autem hic casus omni attentione dignus occurrit, quo $v = 0$, vbi formula TT sponte fit quadratum, scilicet $nn(nn+1)^2$ ita vt hoc casu prodeat

$$\frac{zz(rr+1)^2(nn+1)}{4bb} = nn(nn+1)^2$$

seu radice quadrata extracta

$$\frac{z(rr+1)\sqrt{nn+1}}{2b} = n(nn+1);$$

cum autem sit $v = 0$, ob $r = n + v$ erit $r = n$ vnde colligitur

$$z = \frac{2bn(nn+1)}{(nn+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2bn}{\sqrt{nn+1}} = \frac{2ab}{\sqrt{aa+bb}},$$

porro ob $r = n = \frac{a}{b}$ erit $p = a$ et $q = b$, $c = ma + nb$ et $d = na - mb$ existente

$$m = \frac{aa - bb}{aa + bb} \quad \text{et} \quad n = \frac{2ab}{aa + bb}$$

quocirca erit $c = a$ et $d = b$, vnde bini numeri quaesiti erunt,

vnus $= \frac{x}{z} = \frac{2ab}{zz} = \frac{aa+bb}{2ab}$; alter $\frac{y}{z} = \frac{2cd}{zz} = \frac{aa+bb}{2ab}$,

ita vt ambo nostri numeri sint inter se aequales, meminisse autem oportet formulam $aa + bb$ quadratum esse debere.

§. 15. Quanquam autem haec solutio satis est simplex, tamen indoli quaestionis propositae minus satisfacere est censenda, propterea quod duos numeros aequales exhibet, cum nostrum Problema manifesto duos numeros inaequales postulet, interim tamen deducimur ad solutionem huius quaestionis: *In-*

venire numerum quadratum, qui radice ſua ſiue auctus ſiue minutus producat quadratum.

Quod ſi ergo radix huius quadrati vocetur $= z$, erit vti modo inuenimus $z = \frac{aa+bb}{2ab}$, dummodo $aa+bb$ fuerit quadratum, capiatur ergo $a = pp-qq$ et $b = 2pq$, vt fiat $aa+bb = (pp+qq)^2$, hincque ſolutio noſtra praebet $z = \frac{(pp+qq)^2}{4pq(pp-qq)}$, vnde pro z ſequentes valores ſimpliciores eruuntur

I°. $\frac{25}{24}$, II°. $\frac{169}{120}$, III°. $\frac{289}{240}$, IV°. $\frac{625}{336}$, V°. $\frac{841}{840}$, VI°. $\frac{1681}{720}$ etc.

§. 16. Etſi autem hic caſus parum ad propoſitum noſtrum conferre videtur, tamen eius conſideratio attenta mox eiusmodi binos numeros ſuppeditauit ipſi Problemati propoſito ſatisfacientes, cuiusmodi ſunt hi duo numeri

$$A = \frac{841}{840} \quad \text{et} \quad B = \frac{1369}{840}$$

tum enim erit

$$AB \pm A = A(B \pm 1), \text{ vbi}$$
$$B + 1 = \frac{2209}{840} = \frac{47^2}{840} \quad \text{et} \quad B - 1 = \frac{529}{840} = \frac{23^2}{840}$$

vterque autem valor in $A = \frac{29^2}{840}$ ductus manifeſto praebet quadrata: Eodem modo reliquae conditiones $AB \pm B = B(A \pm 1)$ ob $A + 1 = \frac{1681}{840} = \frac{41^2}{840}$ et $A - 1 = \frac{1}{840}$ vtraque in $B = \frac{37^2}{840}$ ducta pariter quadrata exhibent.

§. 17. Nunc igitur multo magis mirari oportet, cur iſtam ſolutionem ſatis ſimplicem ex analyſi ſupra allata nullo modo elicere licuerit, quin etiam hi duo numeri nequidem in formulis noſtris ſupra vſurpatis ſcilicet $\frac{x}{z} = \frac{2ab}{zz}$ et $\frac{y}{z} = \frac{2cd}{zz}$ contineri videntur, cum noſtri numeratores in factores

factores resolui nequeant, denominatores autem non sint quadrata, hac autem circumstantia probe perpensa, facile agnoscimus, solutionem problematis nostri longe alio modo esse aggrediendam, vt huiusmodi solutiones simpliciores eliciamus, atque hinc clare perspicimus, quanti sit momenti huiusmodi Problemata idoneo modo ad calculum reuocare, hancque ob rem sequentem solutionem satis planam hic subiungamus.

Solutio plana Problematis propositi.

§. 18. Denotent litterae A et B binos numeros quaesitos, ita vt hae formulae

$$AB \pm A = A(B \pm 1) \text{ et } AB \pm B = B(A \pm 1)$$

debeant esse quadrata; hunc in finem tribuamus his numeris sequentes formas

$$A = \frac{aa + bb}{2ab} \text{ et } B = \frac{cc + dd}{2cd},$$

sic enim prodibit

$$A \pm 1 = \frac{(a \pm b)^2}{2ab} \text{ et } B \pm 1 = \frac{(c \pm d)^2}{2cd}$$

quare vt ambae illae formulae fiant quadrata, pro priore necesse est, vt sit $\frac{cc + dd}{4abcd}$ quadratum, pro altera autem, vt haec forma $\frac{aa + bb}{4abcd}$ sit quadratum.

§. 19. Quo igitur his conditionibus satisfaciamus, statuamus tam

$$aa + bb = \square \text{ et } cc + dd = \square,$$

tum vero necesse est vt etiam productum $abcd$

 fiat

fiat quadratum, quae quidem poſitio iam eſt limitata, dum iſtis conditionibus etiam aliis modis ſatisfieri poſſet, at vero ſimpliciſſimas ſolutiones ſuppeditare videtur: Hunc igitur in finem ponamus

$$a = pp - qq,\ b = 2pq,\ c = rr - ss \text{ et } d = 2rs$$

vt fiat

$$aa + bb = (pp + qq)^2 \text{ et } cc + dd = (rr + ss)^2$$

ita vt ſit

$$A = \frac{(pp + qq)^2}{4pq(pp - qq)} \text{ et } B = \frac{(rr + ss)^2}{4rs(rr - ss)}$$

tum vero ſupereſt vt

$$abcd = 2pq(pp - qq) \cdot 2rs(rr - ss),$$

ſiue haec formula

$$pq(pp - qq) \cdot rs(rr - ss)$$

fiat quadratum, hic vero caſus manifeſto ad problema ſatis notum deducitur, quo duo triangula rectangula in numeris quaeruntur, quorum areae ſint inter ſe aequales; quaeruntur igitur duo numeri vterque formae $xy(xx - yy)$ quorum productum ſit quadratum, vnde in ſequenti Tabella ſimpliciores numeros huius formae exhibeamus per factores expreſſos, vbi quidem factores quadratos omittamus:

x	y	$xy(x+y)(x-y)$
2	1	2. 3
3	2	2. 3. 5
4	1	3. 5
4	3	3. 7
5	2	2. 3. 5. 7
5	4	5
6	1	2. 3. 5. 7
6	5	2. 3. 5. 11
7	2	2. 5. 7
7	4	3. 7. 11
7	6	2. 3. 7. 13
8	1	2. 7
8	3	2. 3. 5. 11
8	5	2. 3. 5. 13
8	7	2. 3. 5. 7
9	2	2. 7. 11
9	4	5. 13
10	1	2. 5. 11
10	3	2. 3. 5. 7. 13
11	2	2. 11. 13
11	4	3. 5. 7. 11
11	10	2. 3. 5. 7. 11
12	1	3. 11. 13
13	2	2. 3. 5. 11. 13
13	8	2. 3. 5. 7. 13
13	12	3. 13
14	1	2. 3. 5. 7. 13
14	11	2. 3. 7. 11
14	13	2. 3. 7. 13

§. 20. Haec tabula nobis iam aliquot solutiones suppeditat, quarum prima et simplicissima oritur sumendo $p = 5$, $q = 2$, et $r = 6$, $s = 1$ vnde oritur

$$A = \tfrac{29^2}{840} = \tfrac{841}{840} \quad \text{et} \quad B = \tfrac{37^2}{840} = \tfrac{1369}{840}$$

qui sunt ipsi numeri supra memorati; in nostra autem tabella occurrunt quoque isti numeri $x = 8$ et $y = 7$ eosdem factores 2. 3. 5. 7 continentes, hinc igitur formemus numerum

$$C = \frac{(xx+yy)^2}{4xy(xx-yy)}, \text{ erit } C = \tfrac{113^2}{3360} \text{ vbi } 3360 = 4 \cdot 840$$

quemadmodum igitur ambo numeri A et B quaesito satisfecerunt, ita etiam hi duo numeri A et C eodemque modo etiam isti B et C seorsim satisfacient.

§. 21. Porro etiam iidem factores 2. 3. 5. 11 reperiuntur casibus $x = 6$ et $y = 5$ item $x = 8$ et $y = 3$ sumtis ergo $p = 6$, $q = 5$, $r = 8$ et $s = 3$, nascuntur isti numeri satisfacientes

$$A = \tfrac{61^2}{1320} \text{ et } B = \tfrac{33^2}{5280} \text{ vbi } 5280 = 4 \cdot 1320$$

simili modo insuper plures alias solutiones ex tabula ista peti licet.

§. 22. Quo autem plures huiusmodi solutiones exhibere queamus, faciamus

$$pq(pp-qq) = rs(rr-ss)$$

quod cum in genere non nisi operose effici queat, casum magis particularem accipiamus et statuamus $r = p$, vt fieri debeat

$$q(pp-qq) = s(pp-ss),$$

vnde

vnde elicimus

$$pp = qq + qs + ss,$$

quare ſtatuamus $p = q + \frac{m}{n} s$, vt fiat

$$q + \frac{2mq}{n} + \frac{mms}{nn} \text{ ſiue } nnq + nns = 2mnq + mms,$$

vnde colligitur $\frac{q}{s} = \frac{mm - nn}{nn - 2mm}$: Sumamus igitur

$$q = mm - nn \text{ et } s = nn - 2mn \text{ eritque}$$

$$p = r = mm - nn + mn - 2mm = -mm - nn + mn,$$

vbi litteras m et n pro lubitu tam negatiuas quam poſitiuas accipere licet; haec ergo ſolutio ita ſe habebit: Sumto numero n negatiuo habebimus

$p = mm + mn + nn$	$r = mm + mn + nn$
$q = mm - nn$	$s = nn + 2mn$

vnde iam innumerabiles ſolutiones naſcuntur, inde vero habebitur

$$a = pp - qq, \quad b = 2pq, \quad c = rr - ss \text{ et } d = 2rs$$

vnde numeri quaeſiti reperientur

$$A = \frac{(pp + qq)^2}{4pq(pp - qq)} = \frac{aa + bb}{2ab} \text{ et } B = \frac{cc + dd}{2cd} = \frac{(rr + ss)^2}{4rs(rr - ss)},$$

§. 23. Cum haec ſolutio tantopere diſcrepet a prima, quam dedimus, operae pretium erit inueſtigare, quomodo haec etiam in illa contineatur. Poſueramus autem ipſos numeros quaeſitos $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, tum vero ſtatuimus

$$xy = aa + bb = cc + dd$$

hinc vero deduximus $\frac{zz}{4} = \frac{abcd}{aa + bb}$ ita vt eſſe debeat primo

$$aa + bb = cc + dd, \text{ tum vero } \frac{abcd}{aa + bb} = \square;$$

iam

iam tribuamus tam litteris a et b, quam c et d communem factorem et ſtatuamus $a=fp$ et $b=fq$ tum vero $c=gr$ et $d=gs$, eritque

$$aa+bb=ff(pp+qq) \text{ et } cc+dd=gg(rr+ss),$$

quae formulae cum ſibi debeant aequari, fiat

$$pp+qq=gg \text{ et } rr+ss=ff$$

ſic enim fiet $xy=ffgg$, praeterea vero eſſe debebit

$$\tfrac{1}{4}zz=\frac{ffpq\cdot ggrs}{ffgg} \text{ ſiue } \tfrac{1}{4}zz=pqrs=\Box:$$

Quamobrem ſtatuamus

$$p=\alpha\alpha-\beta\beta,\ q=2\alpha\beta \text{ atque } r=\gamma\gamma-\delta\delta \text{ et } s=2\gamma\delta$$

vt fiat

$$pp+qq=(\alpha\alpha+\beta\beta)^2=gg \text{ et } rr+ss=(\gamma\gamma+\delta\delta)^2=ff$$

vnde erit

$$f=\gamma\gamma+\delta\delta \text{ et } g=\alpha\alpha+\beta\beta$$

et nunc habebitur

$$\tfrac{1}{4}zz=4\alpha\beta(\alpha\alpha-\beta\beta)\cdot\gamma\delta(\gamma\gamma-\delta\delta),$$

ita vt hoc productum

$$\alpha\beta(\alpha\alpha-\beta\beta)\cdot\gamma\delta(\gamma\gamma-\delta\delta)$$

debeat eſſe quadratum, quae eſt eadem formula quam in ſolutione poſteriore quadratum efficere debuimus. Cui conditioni quando erit ſatisfactum, numeri quaeſiti ita ſe habebunt:

$$\frac{x}{z}=\frac{2ab}{zz}=\frac{aa+bb}{2cd}=\frac{cc+dd}{2cd}$$

$$\frac{y}{z}=\frac{2cd}{zz}=\frac{aa+bb}{2ab}$$

quae ſunt eaedem formulae, quibus ſolutio poſterior eſt ſuperſtructa.

§. 24.

§. 24. Hic etiam generalius potuissemus statuere

$$pp + qq = Ngg \text{ et } rr + ss = Rff$$

vnde fit

$$xy = aa + bb = cc + dd = Nffgg$$

tum vero vt ante debet esse

$$\frac{zz}{4} = \frac{ffgg \cdot pqrs}{Nffgg} = \frac{pqrs}{N}$$

ita vt debeat esse $\frac{pqrs}{N}$ siue $Npqrs = \square$;

sumamus exempli gratia $N = 5$ et cum esse debeat

$$5(pp + qq) = 25gg = (2p - q)^2 + (p + 2q)^2$$

sumamus

$$2p - q = \alpha\alpha - \beta\beta \text{ et } p + 2q = 2\alpha\beta$$

ac reperietur

$$p = \frac{2(\alpha\alpha + \alpha\beta - \beta\beta)}{5}, \quad q = \frac{4\alpha\beta - \alpha\alpha + \beta\beta}{5}.$$

simili modo quia debet esse $5rr + ss = 25ff$, habebitur

$$r = \frac{2(\gamma\gamma + \gamma\delta - \delta\delta)}{5} \text{ et } s = \frac{4\gamma\delta - \gamma\gamma + \delta\delta}{5}$$

et iam superest vt $5pqrs$ reddatur quadratum, similique modo solutionem generaliorem reddere licebit.

§. 25. Quoniam autem solutio nostri problematis perducta est ad inuentionem duorum triangulorum rectangulorum, quorum areae inter se teneant rationem quadraticam, adiungamus hic aliquot solutiones quaestionis latius patentis, quo scilicet quaeruntur duo triangula rectangula, quorum areae datam inter se teneant rationem puta vt α et β ita vt esse debeat $pq(pp-qq) : rs(rr-ss) = \alpha : \beta$.

 Cui

Cui conditioni satisfiet sequentibus octo formulis

	p	q	r	s
I.	$\alpha+\beta$	$2\alpha-\beta$	$\alpha+\beta$	$2\beta-\alpha$
II.	3α	$2\beta-\alpha$	3β	$2\alpha-\beta$
III.	$2\alpha+\beta$	$\beta-\alpha$	$\alpha+2\beta$	$\beta-\alpha$
IV.	$\alpha+2\beta$	3β	3β	$\beta+2\alpha$
V.	$\beta-2\alpha$	6α	$2\beta+4\alpha$	$\beta+4\alpha$
VI.	$\beta+4\alpha$	$\beta-8\alpha$	3β	$8\alpha-\beta$
VII.	$\beta+2\alpha$	6α	$2\beta+4\alpha$	$\beta-4\alpha$
VIII.	$\beta+8\alpha$	$\beta-4\alpha$	3β	$8\alpha+\beta$

Vbi notasse iuuabit, si qui horum numerorum prodeant negatiui, eos tuto in positiuos verti posse, tum vero pro vtroque triangulo maiores numeros literis p et r; minores vero literis q et s tribui oportere.

§. 26. Pro nostro igitur Problemate tantum opus est, vt loco α et β numeri quadrati accipiantur, id quod exemplo illustrasse sufficiet.

Sumamus igitur $\alpha=9$ et $\beta=4$ ac sequentes octo solutiones obtinebuntur:

I°.	$p=14$, $q=13$	$r=13$ et $s=1$
II°.	$p=27$, $q=1$	$r=14$ et $s=12$
III°.	$p=22$, $q=1$	$r=17$ et $s=5$
IV°.	$p=23$, $q=21$	$r=22$ et $s=12$
V°.	$p=54$, $q=14$	$r=40$ et $s=28$
VI°.	$p=68$, $q=40$	$r=68$ et $s=12$
VII°.	$p=54$, $q=22$	$r=44$ et $s=32$
VIII°.	$p=76$, $q=32$	$r=76$ et $s=12$.

Quae

Quae ſolutiones ob communes diuiſores reducuntur ad ſequentes ſimpliciores:

I°.	$p=14$, $q=13$	$r=13$ et $s=1$
II°.	$p=27$, $q=1$	$r=14$ et $s=12$
III°.	$p=22$, $q=16$	$r=17$ et $s=5$
IV°.	$p=23$, $q=21$	$r=22$ et $s=12$
V°.	$p=27$, $q=7$	$r=20$ et $s=14$
VI°.	$p=17$, $q=10$	$r=17$ et $s=3$
VII°.	$p=27$, $q=11$	$r=22$ et $s=16$
VIII°.	$p=19$, $q=8$	$r=19$ et $s=3$

hinc igitur facile quotcunque ſolutiones deſiderentur deducere licet.