1775

Demonstratio theorematis Neutoniani de evolutione potestatum binomii pro casibus, quibus exponentes non sunt numeri integri

Leonhard Euler

DEMONSTRATIO THEOREMATIS NEVTONIANI DE EVOLVTIONE POTESTATVM BINOMII PRO CASIBVS QVIBVS EXPONENTES NON SVNT NVMERI INTEGRI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Theorema hoc, ita repraesentari solitum

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 \text{ etc.}$$

quatenus latiſſime patere, et ſub exponente n, omnes plane numeros poſſibiles complecti cenſetur, fundamentum conſtituit vniuerſae analyſeos ſublimioris; vnde eius veritatem ſolidiſſime demonſtrari neceſſe eſt. Modus autem, quo ad hoc theorema eſt peruentum, dum quantitas $a+b$ aliquoties in ſe inuicem multiplicari ſolet, ita eſt comparatus, vt pro exponente n alii numeri non prodeant, niſi qui ſint integri poſitiui, ſiquidem continuo multiplicando per eandem quantitatem $a+b$ aliae poteſtates oriri nequeunt, niſi quarum exponentes indicent factorum numerum, qui non numerus integer omnino eſſe nequit. Interim tamen vix quisquam dubitaſſe videtur,

detur, quin, si haec formula vera fuerit pro omnibus numeris integris loco n assumtis, eadem quoque vera sit futura pro omnibus plane numeris siue fractis, siue adeo irrationalibus; quae conclusio quanquam hoc casu locum habet, id tamen ob alias rationes vsu venit, quandoquidem eiusmodi casus exhiberi possunt, quibus formula quaepiam vera deprehenditur, quoties exponens n fuerit numerus integer positiuus, eadem autem neutiquam locum habere possit, simulac eidem exponenti valores fracti tribuantur.

§. 2. Quo hoc exemplo illustremus, proposita sit sequens series

$$\frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n).(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n).(1-a^{n-1}).(1-a^{n-2})}{1-a^3}$$
$$+ \frac{(1-a^n).(1-a^{n-1}).(1-a^{n-2}).(1-a^{n-3})}{1-a^4} + \text{etc.}$$

cuius valor quoties exponens n fuerit numerus integer positiuus, semper huic ipsi exponenti n aequalis deprehenditur, neque tamen hinc concludere licet, hanc aequalitatem subsistere, dum pro n alii numeri accipiuntur; haec autem proprietas locum quoque habet sumendo $n = 0$, tum enim ob $a^n = 1$ statim primus terminus euanescit, vna cum omnibus sequentibus, quippe qui factorem habent $1 - a^n = 0$ ita vt hoc casu nostra series fiat $= 0$, hoc est ipsi exponenti $n = 0$ aequalis; tum vero sumto $n = 1$ primus terminus fit $\frac{1-a}{1-a} = 1$ at secundus terminus ob $1 - a^{n-1} = 0$ euanescit vna cum omnibus sequentibus

tibus, ita vt hoc casu $n = 1$ ipsa series fiat $= 1$. Consideremus adhuc casum $n = 2$, quo primus terminus fit $\frac{1-a^2}{1-a} = 1 + a$, at secundus terminus praebet $\frac{(1-a^2).(1-a)}{1-a^2} = 1 - a$, tertius vero cum omnibus sequentibus, ob factorem $1 - a^{n-2} = 0$ euanescet, ex quo summa nostra seriei erit $= 2$ hoc est ipsi n aequalis. Statuamus adhuc $n = 3$ et primus terminus dabit $\frac{1-a^3}{1-a} = 1 + a + a^2$ secundus vero terminus praebet

$$\frac{(1-a^3).(1-a^2).(1-a)}{1-a^3} = 1 - a - aa + a^3,$$

quartus autem terminus et sequentes omnes quia continent factorem $1 - a^{n-3} = 0$ euanescunt, vnde nostra series hoc casu $n = 3$ euadit $= 3$. Similique modo ostendi potest, quicunque numerus integer loco n accipiatur, seriem nostram eidem numero aequalem esse prodituram, quilibet autem facile perspiciet, si caperetur $n = \frac{1}{2}$ hanc seriem maxime esse discrepaturam a valore $\frac{1}{2}$.

§. 3. Cum igitur de hac formula

$$n = \frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n).(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n).(1-a^{n-1}).(1-a^{n-2})}{1-a^3} + \text{etc.}$$

affirmare liceat, eam semper veram esse, quoties n fuerit numerus integer positiuus; neque vero haec aequalitas pro aliis numeris locum habeat, merito quoque dubitare licebit, an nostrum theorema

$$(a+b)^n = a^n + \tfrac{n}{1}.\, a^{n-1} b + \tfrac{n}{1}.\, \tfrac{n-1}{2}.\, a^{n-2} b^2 + \tfrac{n}{1}.\, \tfrac{n-1}{2}.\, \tfrac{n-2}{3}.\, a^{n-3} b^3 \text{ etc.}$$

generalissime veritati sit consentaneum, etiamsi certi simus, id verum esse, quoties exponens n fuerit numerus integer positiuus. Quamobrem eo magis vtique necesse est, vt ista veritas rigorosa demonstratione corroboretur. Equidem olim demonstrationem ex analysi infinitorum petitam tradideram; sed quia ipsa haec analysis nostro theoremate innititur, eam tanquam petitionem principii penitus reiiciendam nunc agnosco; ab hoc vitio autem immunem demonstrationem dedit Illustr. Academiae nostrae Socius *Aepinus* in Tomo VIII. Nouor. Commentar., vbi pro formula $(x+1)^n$ assumens seriem generalem:

$$A x^n + B x^{n-1} + C x^{n-2} + \text{etc.}$$

methodo maxime ingeniosa elicuit valores aliquot coefficientium A, B, C, D etc. et ex eorum consensu cum serie *Neutoniana*, sine dubio rite concludere potuit, etiam reliquos omnes regulae fore conformes; interim tamen egregia ista demonstratio plurimum inductione innititur, praeterea vero etiam notari conuenit secundum coefficientem B ex hac methodo determinationem non accepisse, sed ex aliis conditionibus haud parum absconditis et abstrusis repetiisse. Vnde meam demonstrationem Geometris eo gratiorem fore confido, quod in ea nihil plane inductioni tribuitur.

§. 4. Ante omnia autem cum sit $a+b=a(1+\frac{b}{a})$ eritque quoque $(a+b)^n = a^n(1+\frac{b}{a})^n$ sicque totum negotium reducitur ad euolutionem huius potestatis

$(1+\frac{b}{a})$

$(1+\frac{b}{a})^n$, quae porro ponendo $\frac{b}{a}=x$ redit ad hanc $(1+x)^n$, quam nouimus, quoties exponens n fuerit numerus integer positiuus, aequalem fore huic seriei

$$1+\frac{n}{1}.x+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.x^2+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.x^3+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.x^4 \text{ etc.}$$

verum si n non fuerit numerus integer positiuus, valorem huius seriei tanquam incognitum spectemus, eiusque loco hoc signo $[n]$ vtamur, ita vt iam in genere habeamus.

$$[n]=1+\frac{n}{1}.x+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.x^2 \text{ etc.}$$

de qua etiam nunc plus non nouimus, quam casu, quo n est numerus integer positiuus, fore $[n]=(1+x)^n$ reliquis autem casibus quinam valores huic signo $[n]$ conueniant, sequenti modo inuestigemus: Vnde demum patebit, etiam in genere fore $[n]=(1+x)^n$ quicunque numeri pro exponente n accipiantur, quo pacto proposito nostro plene satisfecerimus.

§. 5. Ad hanc inuestigationem instituendam duas huiusmodi series seu duo talia signa $[n]$ et $[m]$ in se inuicem multiplicemus vt seriem obtineamus huic producto $[m].[n]$ aequalem, quam facile patet huiusmodi forma expressum iri:

$$1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5 \text{ etc.}$$

Cuius coefficientes A, B, C, D, E etc. quemadmodum per binas litteras m et n determinentur vt pateat; ipsam multiplicationem saltem inchoemus

$$[m] = 1 + \frac{m}{1} \cdot x + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot x^2 + \text{etc.}$$
$$[n] = 1 + \frac{n}{1} \cdot x + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot x^2 + \text{etc.}$$
$$[m] \cdot [n] = 1 + \frac{m}{1} \cdot x + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot xx \text{ etc.}$$
$$+ \frac{n}{1} \cdot x + \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} \cdot xx \text{ etc.}$$
$$+ \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot xx \text{ etc.}$$

Quod si iam hoc productum inchoatum cum forma assumta

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 \text{ etc.}$$

qua idem productum exprimi ponimus, comparemus, statim intelligitur, fore

$$A = m + n \text{ et } B = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} + \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \text{ siue}$$

$$B = \frac{mm - m}{2} + mn + \frac{nn - n}{2} \text{ vnde fit}$$

$$B = \frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n-1}{2}.$$

§. 6. Quemadmodum hic duos primos coefficientes A et B, per literas m et n determinare licuit, ita manifestum est, si superior multiplicatio vlterius continuaretur, inde etiam sequentes coefficientes C, D, E etc. per easdem literas m et n definiri posse, quamuis calculus mox ita fieret molestus, vt maximum laborem requireret. Interim tamen hinc tuto concludere possumus omnes plane coefficientes A, B, C, D, E etc. certo modo per binas literas m et n determinari debere, etiamsi [illegible] rationem, qua quisque per has literas determinatur, adhuc ignoremus, hic autem imprimis obseruari conuenit, hanc compositionis rationem non ab indole literaterarum m et n pendere, ſed perinde ſe eſſe habituram, ſiue hae literae m et n denotent numeros integros ſiue alios numeros quoscunque. Hoc ratiocinium non vulgare probe notetur, quoniam ei tota vis noſtrae demonſtrationis innititur.

§. 7. Hinc facilis nobis via aperitur, veros valores omnium coefficientium A, B, C, D, E etc. inueniendi, dum ſcilicet literas m et n tanquam numeros integros ſpectamus, quandoquidem hinc eaedem determinationes oriuntur ac ſi quoscunque alios numeros denotarent. Spectatis autem literis m et n vt numeris integris vtique habebimus $[m] = (1+x)^m$ et $[n] = (1+x)^n$, vnde harum formularum productum erit $[m].[n] = (1+x)^{m+n}$ iam vero haec poteſtas euoluitur in hanc ſeriem:

$$1 + \frac{m+n}{1} . x + \frac{m+n}{1} . \frac{m+n-1}{2} . x^2 + \frac{m+n}{1} . \frac{m+n-1}{2} . \frac{m+n-2}{3} . x^3$$

nunc igitur ſi literas m et n in genere ſpectemus hanc ſeriem iſto ſigno $[m+n]$ indicari oportet, vnde hanc inſignem veritatem nanciſcimur, ſemper eſſe $[m].[n] = [m+n]$ quicunque etiam numeri loco illarum literarum adhibeantur.

§. 8. Cum igitur binae huiusmodi formulae $[m]$ et $[n]$ in ſe inuicem ductae praebeant ſimplicem formulam eiusdem indolis, ita etiam plures eiusmodi formulae in ſe inuicem ductae ad ſimplicem reuocantur. habebimus ſcilicet ſequentes reductiones.

$$[m].[n] = [m+n]$$

$$[m].[n].[p] = [m+n+p]$$

$$[m].[n].[p].[q] = [m+n+p+q] \text{ etc.}$$

hinc si omnes isti numeri m, n, p, q etc. inter se capiantur aequales scilicet $= m$ obtinebimus sequentes reductiones potestatum

$$[m]^2 = [2\,m]\,;\ [m]^3 = [3\,m]\,;\ [m]^4 = [4\,m]\,;\ \text{etc.}$$

vnde generaliter erit $[m]^a = [a\,m]$; denotante a numerum quemcunque integrum.

§. 9. His praenotatis denotet litera i numerum quemcunque integrum positiuum ac statuamus primo $2\,m = i$ vt sit $m = \frac{i}{2}$ ac postremarum formularum prima dabit $[\frac{i}{2}]^2 = [i]$ quia autem i est numerus integer, erit $[i] = (1 + x)^i$ (vide §. 4.) sicque erit $[\frac{i}{2}]^2 = (1 + x)^i$ vnde radicem quadratam extrahendo fit $[\frac{i}{2}] = (1 + x)^{\frac{i}{2}}$ sicque iam tantum sumus consecuti, vt theorema Neutonianum etiam verum sit casibus, quibus exponens n est huiusmodi fractio $\frac{i}{2}$.

§. 10. Simili modo si ponamus $3\,m = i$ vt sit $m = \frac{i}{3}$, altera formularum superiorum praebet $[\frac{i}{3}]^3 = [i] = (1 + x)^i$ hinc radicem extrahendo nanciscimur $[\frac{i}{3}] = (1 + x)^{\frac{i}{3}}$ sicque theorema nostrum etiam verum est si exponens n fuerit huiusmodi fractio $\frac{i}{3}$, atque hinc in genere manifestum fore $[\frac{i}{a}] = [1 + x]^{\frac{i}{a}}$ ita vt iam demonstratum sit, theorema nostrum verum esse, si pro exponente n fractio quaecunque $\frac{i}{a}$ accipiatur, vnde veritas iam est euicta pro omnibus numeris positiuis loco exponentis n accipiendis.

§. 11.

§. 11. Supereſt igitur tantum, vt veritas quoque oſtendatur pro caſibus, quibus exponens n eſt numerus negatiuus. Huc in finem in ſubſidium vocemus reductionem primo inuentam $[m].[n] = [m+n]$ vbi denotet m, numerum poſitiuum ſiue integrum ſiue fractum ita vt ſit vti modo oſtendimus $[m] = (1+x)^m$, deinde vero ſtatuatur $n = -m$ eritque $m+n = 0$ ideoque $[0] = (1+x)^0 = 1$, quibus ſubſtitutis formula ſuperior ſuppeditat $(1+x)^m$. $[-m] = 1$ vnde colligimus $[-m] = \frac{1}{(1+x)^m} = (1+x)^{-m}$ ſicque etiam demonſtratum eſt theorema Neutonianum verum quoque eſſe, ſi exponens n fuerit numerus negatiuus quicunque atque adeo hoc theorema nunc quidem firmiſſimis rationibus eſt confirmatum.

PROBLE-