



1774

Resolutio aequationis $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ per numeros tam rationales quam integros

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Resolutio aequationis $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ per numeros tam rationales quam integros" (1774). *Euler Archive - All Works*. 452.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/452>

RESOLVTIO AEQVATIONIS

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0$$

PER NVMEROS TAM RATIONALES,
QVAM INTEGROS.

Auctore

L. E V L E R O.

I.

Haec forma latissime patens, quae insignem partem Analyseos Diophantaeae complectitur, pro varia indole numerorum A, B, C, D, E, F plures in se continet casus, qui vulgo diuersis methodis tractari solent. Hic autem singulari modo eius resolutionem sine radicis extractione ita docebo, vt solutio non solum ad numeros rationales, sed etiam integros accommodari possit.

I. In genere quidem resolutionem huius aequationis tradere non licet, quia saepe vsu venire potest, vt ea sit impossibilis, certissimum autem criterium possibilitatis solutionis sine dubio est, si vnicus saltem casus, quo huic aequationi satisfiat, fuerit cognitus. Ponamus igitur hoc contingere casu quo $x = a$ et $y = b$, ita vt reuera sit:

$$A a^2 + 2 B a b + C b^2 + 2 D a + 2 E b + F = 0$$

et quemadmodum ex hoc casu cognito, alii siue
Tom. XVIII. Nou. Comm. A a nume-

numero finiti, siue infiniti, erui queant, hic sum ostensurus.

2. Subtrahatur ista aequatio ab ipsa proposita generali, vt obtineatur haec:

$$A(x^2 - a^2) + 2B(xy - ab) + C(y^2 - b^2) + 2D(x - a) + 2E(y - b) = 0$$

cuius singula membra praeter secundum factorem habent vel $x - a$, vel $y - b$, at membrum secundum pluribus modis in duas partes resolui potest, quarum altera habeat factorem $x - a$, altera $y - b$,

$$xy - ab = x(y - b) + b(x - a) = y(x - a) + a(y - b)$$

vt autem ambae litterae x et y , parem rationem ineant, hac resolutione vtamur:

$$2(xy - ab) = (x - a)(y + b) + (x + a)(y - b);$$

quo facto aequatio nostra sequentem induet formam

$$A(x - a)(x + a) + B(x - a)(y + b) + B(x + a)(y - b) + C(y - b)(y + b) + 2D(x - a) + 2E(y - b) = 0.$$

3. Consideretur nunc ratio quantitatum $x - a$ et $y - b$ tamquam data, ac statuatur

$$\frac{x - a}{y - b} = \frac{p}{q}, \text{ ita vt fit: } qx - aq = py - bp,$$

qua ratione introducta nostra aequatio euadet:

$$Ap(x + a) + Bp(y + b) + Bq(x + a) + Cq(y + b) + 2Dp + 2Eq = 0$$

ex quibus binis aequationibus vtramque quantitatem quaesitam x et y definire licebit. Quum enim posterior sit

$$(x + a)(Ap + Bq) + (y + b)(Bp + Cq) + 2Dp + 2Eq = 0,$$

prior

prior vero praebeat:

$$y = \frac{qx - aq + bp}{p};$$

hic valor in illa substitutus dat:

$$(Ap^2 + 2Bpq + Cq^2)x + Aap^2 + 2Cbq - Caq^2 + 2Dp^2 + 2E pq - 2Bbp^2 = 0$$

unde colligitur

$$x = -\frac{a(Ap^2 - Cq^2) - 2B(Bpq + Cpq) - 2Dp^2 - 2E pq}{Ap^2 + 2Bpq + Cq^2}$$

hincque

$$y = +\frac{b(Ap^2 - Cq^2) - 2a(Bpq + Apq) - 2Dpq - 2Eq^2}{Ap^2 + 2Bpq + Cq^2}$$

4. Ecce ergo iam sumus affecti solutionem generalissimam aequationis propositae in numeris rationalibus, quia enim ambos numeros p et q pro arbitrio assumere licet, evidens est, omnes plane solutiones in his formulis contineri debere. Quod autem solutiones in numeris integris attinet, manifestum est tales exhiberi non posse nisi ambo numeratores illarum fractionum diuisionem admittant per communem denominatorem $Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$, id quod fieri nequit nisi hic denominator ad numerum satis exiguum se reduci patiatur. Statim ergo hinc excludi oportet casus, quibus $B^2 < AC$, siue quibus $AC - B^2$ est numerus positivus, tum enim quicumque valores loco p et q accipiantur, formulam $Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$, non infra certum valorem deprimere licebit.

5. Quod si ergo numeri A , B et C ita fuerint comparati, ut per certos numeros p et q for-

A a 2

mula

mula $A p^2 + 2 B p q + C q^2$ ad exiguum numerum, siue vnitatem, siue binarium tam positue quam negatiue sumtum redigi queat, omnes partes binarum formularum pro x et y inuentarum abibunt in numeros integros. Posito autem isto numero $= \omega$, ita vt his casibus sit ω vel ± 1 ; vel ± 2 , ob $A p^2 + 2 B p q + C q^2 = \omega$, reperitur

$$p = -\frac{Bq \pm \sqrt{(BB - AC)q^2 + A\omega}}{A};$$

sic formula

$$(BB - AC)q^2 + A\omega$$

debebit esse quadratum, quod quidem plerumque fieri poterit, quia pro ω sumi potest vel $+1$, vel -1 , vel $+2$, vel -2 , dummodo $BB - AC$ fuerit numerus posituus non quadratus, etiamsi sine dubio dantur casus, quibus ω maiorem sortitur valorem. Tum vero habebitur:

$$x = \frac{a}{\omega} (q^2 - Ap^2) - \frac{2b}{\omega} (Bpp + Cpq) - \frac{2D}{\omega} p^2 - \frac{2E}{\omega} pq$$

$$y = \frac{b}{\omega} (Aq^2 - Cp^2 - \frac{2a}{\omega} (Bqq + Cpq) - \frac{2D}{\omega} pq - \frac{2E}{\omega} q^2.$$

6. Vtrum igitur nostra aequatio admittat solutiones in numeris integris, nec ne? iudicium facillime instituitur; consideretur enim formula $BB - AC$, quae si fuerit numerus posituus non quadratus, semper adeo infinitis modis numerum q assignare licebit, vt formula illa radicalis abeat in numerum rationalem, indeque definietur alter numerus p , quibus adhibitis impetrabimus binos numeros satisfaciētes x et y . Sufficiet autem pro q vnicum valorem idoneum inuenisse, dum ex eo pro x et y successi-

successive innumerabiles valores satisfaciētes deduci possunt, id quod operae pretium erit clarius ostendisse. Ponamus scilicet ex numeris primo satisfaciētib^{us} a et b , hoc modo produisse sequentes:

$$x = \zeta a + \eta b + \theta \quad \text{et} \quad y = \lambda a + \mu b + \nu$$

atque si iam hi pro a et b adhibeantur, per easdem formulas novos deducemus valores pro x et y , qui denuo loco a et b assumti praebebunt iterum alios idoneos valores pro x et y , et ita porro.

7. Sint numeri qui hoc modo successive pro x reperiuntur,

$$a, a', a'', a''', a'''' \text{ etc.}$$

numeri autem pro y respondentes sint:

$$b, b', b'', b''', b'''' \text{ etc.}$$

atque habebimus sequentes aequationes:

$$a^k = \zeta a^{k-1} + \eta b^{k-1} + \theta; \quad b^k = \lambda a^{k-1} + \mu b^{k-1} + \nu$$

$$a'' = \zeta a' + \eta b' + \theta; \quad b'' = \lambda a' + \mu b' + \nu$$

$$a''' = \zeta a'' + \eta b'' + \theta; \quad b''' = \lambda a'' + \mu b'' + \nu$$

etc.

etc.

Ex his relationibus eliminando litteras b, b^k , satis simplex relatio concluditur, inter valores continuos, a, a', a'' , quae ita se habet:

$$a'' = (\mu + \zeta) a' + (\eta\lambda - \mu\zeta) a + \theta(1 - \mu) + \eta\nu.$$

Simili modo eliminando litteras a, a''

$$b'' = (\mu + \zeta) b' + (\eta\lambda - \zeta\mu) b + \lambda\theta + \nu(1 - \zeta).$$

190- RESOLVTIO AEQVATIONIS

vnde patet vtramque seriem esse recurrentem secun-
di ordinis, secundum eandem scalam relationis :

$$\zeta + \mu, \quad \eta \lambda - \zeta \mu$$

vtrinque autem insuper numerum quendam absolu-
tum addi oportet.

8. Cognita hac scala relationis formetur haec
aequatio quadratica

$$z^2 = (\zeta + \mu)z + (\eta \zeta - \zeta \mu)$$

cuius binae radices sunt :

$$z = \frac{\zeta + \mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\zeta - \mu}{2}\right)^2 + \eta \lambda}$$

quarum potestatibus exprimi possunt termini genera-
les vtriusque seriei. Quo hoc clarius reddatur, fit
prioris seriei

$$a, a', a'', a''' \text{ etc.}$$

terminus quoviscunque = x , alterius vero seriei :

$$b, b', b'', b''' \text{ etc.}$$

terminus generalis y , et posito breuitatis gratia

$$\frac{\zeta + \mu}{2} = r \quad \text{et} \quad \sqrt{\left(\frac{\zeta - \mu}{2}\right)^2 + \eta \lambda} = \sqrt{s},$$

pro priori serie statuatur

$$x = f(r + \sqrt{s})^n + g(r - \sqrt{s})^n + b,$$

eritque valor sequens

$$x' = f(r + \sqrt{s})(r + \sqrt{s}) + g(r - \sqrt{s})(r - \sqrt{s}) + b$$

huncque sequens

$$x'' = f(r + \sqrt{s})^2(r + \sqrt{s}) + g(r - \sqrt{s})^2(r - \sqrt{s}) + b.$$

Quare cum ex lege progressionis esse debeat ;

$$x'' = (\zeta + \mu)x' + (\eta \lambda - \zeta \mu)x + \theta(1 - \mu) + \eta \nu$$

vbi

si illi valores substituantur, potestates sponte se destruant, ac resultat

$$b = \frac{\theta(r-\mu) + \eta y}{(1-\mu)(1-\zeta) - \zeta \lambda}$$

Pro coefficientibus autem f et g considerentur termini initiales ante definiti, et facto quidem $n = 0$, prodeat $x = a$, hincque erit

$$a = f + g + b,$$

tum vero ponatur $n = 1$ ut prodeat

$$x = a' = \zeta a + \eta b + \theta$$

fiatque ea

$$= f(r + \sqrt{s}) + g(r - \sqrt{s}) + b,$$

et quia

$$f + g = a - b, \text{ erit } a' = (a - b)r + (f - g)\sqrt{s} + b,$$

hincque

$$f - g = \frac{a'}{\sqrt{s}} - \frac{(a - b)r}{\sqrt{s}} - \frac{b}{\sqrt{s}} = \frac{a' - ar - b(1 - r)}{\sqrt{s}}.$$

Eodem modo pro altera serie recurrente terminus generalis y reperietur, ita ut in genere nihil amplius desiderari possit.

9. Caeterum uti iam inuimus, dantur casus, quibus formula $A p p + 2 B p q + C q q$, neque ad unitatem, neque ad binarium deprimi potest, conveniet igitur litteras p et q ita assumi, ut huic formulae minimus valor concilietur, unde non parum egregium nascitur Problema, quo datis numeris A, B, C quaeruntur valores litterarum p et q in integris, ut formula $A p p + 2 B p q + C q q$ minimum omnium accipiat valorem.

Alia

Alia Resolutio eiusdem aequationis.

10. Quum tres termini initiales per A multiplicati, factores habeant

$(Ax + By + y\sqrt{C^2 - AC})$; $(Ax + By - y\sqrt{B^2 - AC})$
totam aequationem sub tali forma repraesentare licebit:

$$(Ax + By + M + (y + N)\sqrt{B^2 - AC})(Ax + By) + M - (y + N)\sqrt{B^2 - AC} = 0,$$

quae euoluta praebet

$$A^2x^2 + 2ABxy + ACy^2 + 2AMx + (2MB - 2NB^2 + 2ACN)y + M^2 - B^2N^2 + ACN^2 - O = 0$$

qua cum forma proposita comparata assequimur:

$$2AD = 2AM; \quad D = M$$

$$2AE = 2MB - 2N(B^2 - AC)$$

$$AF = M^2 - N^2(B^2 - AC) - O, \text{ hincque}$$

$$M = D; \quad N = \frac{BD - AE}{B^2 - AC}; \quad O = D^2 - AF - \frac{(BD - AE)^2}{B^2 - AC}$$

11. Inuentis igitur valoribus M, N et O, ponatur breuitatis gratia $B^2 - AC = k$, vt aequatio nostra per factores irrationales expressa fit

$$(Ax + By + D + (y + N)\sqrt{k})(Ax + By + D - (y + N)\sqrt{k}) = 0.$$

Et quia assumimus vnam solutionem iam esse cognitam, qua fit $x = a$ et $y = b$, habebimus quoque

$$(Aa + Bb + D + (b + N)\sqrt{k})(Aa + Bb + D - (b + N)\sqrt{k}) = 0$$

quocirca bina haec producta inter se aequalia esse debebunt; statuamus hinc breuitatis gratia:

$$Ax + By + M = P; \quad (y + N) = Q$$

$$Aa + Bb + M = G; \quad b + N = H$$

ita

ita ut nostra binorum productorum aequalitas fiat:

$$(P + Q\sqrt{k})(P - Q\sqrt{k}) = 0 = (G + H\sqrt{k})(G - H\sqrt{k}),$$

vbi notandum, si prior factor illius producti, alterutri factori istius aequalis ponatur, tum quoque posteriolem factorem illius sponte alteri huius aequalem esse futurum, quoniam discrimin tantum in signo quantitatis radicalis \sqrt{k} est situm. Manifestum autem est, si factores priores inter se aequales statuuntur et partes tam rationales, quam irrationales seorsim aequentur, scilicet $F = G$ et $Q = H$, inde ipsum casum cognitum esse proditurum, nempe $x = a$ et $y = b$.

12. Sin autem hoc modo prior factor illius producti, posteriori huius aequetur, ut fit

$$P + Q\sqrt{k} = G - H\sqrt{k},$$

nova solutio hinc elicietur, aequalitas enim

$Q = -H$ dabit $y + N = -b - N$, siue $y = -b - 2N$, unde altera conditio $P = G$ dabit

$$Ax - Bb - 2NB + M = Aa + Bb + M \text{ seu}$$

$$Ax = Aa + 2Bb + 2NB, \text{ hincque } x = a + \frac{2B(b + N)}{A}.$$

Ergo ex qualibet solutione iam inuenta, puta $x = a$ et $y = b$, alia quasi sociata ex ea facillime concluditur; quippe quae si loco M et N valores assumpti restituantur, praebebit

$$x = a + \frac{2B}{A} \left(b + \frac{BD - AE}{B^2 - AC} \right) \quad y = -b - \frac{2(BD - AE)}{B^2 - AC}.$$

Quae quidem solutio numeris fractis continetur, nisi forte numeratores fuerint per denominatores suos diuisibiles.

13. Quo autem hinc plures atque adeo infinitas solutiones eliciamus, in subsidium vocemus formulam $s = \sqrt{(kr^2 + 1)}$, quippe quae methodo Pelliana semper infinitis modis resolui potest, dummodo k non fuerit vel numerus negativus, vel numerus quadratus. Quum enim hinc fiat $ss - kr^2 = 1$, nostram aequationem hac forma repraesentare poterimus:

$$P^2 - kQ^2 = (G^2 - kH^2)(ss - kr^2).$$

Hincque per factores irrationales statuamus

$$P + Q\sqrt{k} = (G + H\sqrt{k})(s + r\sqrt{k}) = Gs + kHr + (Gr + Hs)\sqrt{k}$$

sic enim simul toti aequationi satisfiet, si quidem partes rationales et irrationales seorsim aequantur. At irrationales praebent:

$$\begin{aligned} Q &= Gr + Hs, \quad y + N = Aar + Bbr + Mr + bs + Ns; \\ y &= Aar + Bbr + Mr + bs + Ns - N. \end{aligned}$$

At partes rationales dant:

$$P = Gs + kHr; \quad \text{feu} \quad Ax + By + D = Aas + Abs + Ds + kr + kNr$$

vnde

$$x = s \left(a + \frac{D - BN}{A} \right) + r \left(\frac{kb + kN - B^2b - BD}{A} - Ba \right) + \frac{BN - D}{A}.$$

14. Nunc igitur loco litterarum M et N restituantur valores supra inuenti, atque pro nostris quantitibus quaesitis x et y sequentes reperiuntur formulae, si scilicet loco k scribatur $B^2 - AC$:

$$x = \left(a + \frac{EB - CD}{B^2 - AC} \right) s + (Ba + Cb + E)(-r) + \frac{D - EB}{B^2 - AC}$$

$$y = \left(b + \frac{BD - AE}{B^2 - AC} \right) s + (Bb + Aa + D)r + \frac{AE - BD}{B^2 - AC}$$

vbi

vbi permutatio, quae inter litteras x et y locum habet, manifesto elucet.

15. Quod si hi valores pro x et y inuenti loco a et b substituantur in istis formulis, pro x et y inde noui valores eruentur, qui denuo loco x et b sumti alios nouos pro x et y praebebunt, et ita porro in infinitum. Verum omnes istos valores simul in formulis generalibus complecti licebit, vti iam supra fecimus. Sequenti autem modo idem negotium multo commodius et succinctius conficietur.

16. Quoniam $ss - krr = 1$, atque adeo omnes potestates ipsius $ss - krr$ etiam vnitati aequantur, ponere poterimus

$$P^2 - kQ^2 = (G^2 - kH^2)(ss - krr)^n,$$

hincque per factores irrationales

$$P + Q\sqrt{k} = (G + H\sqrt{k})(s + r\sqrt{k})^n$$

quia autem huius potestatis aliae partes sunt rationales, aliae irrationales per \sqrt{k} affectae, statuamus

$$(s + r\sqrt{k})^n = S + R\sqrt{k}$$

atque vt ante hinc sequentes valores pro x et y eliciamus

$$x = \left(a + \frac{EB - CD}{B^2 - AC}\right)S + (Ba + Cb + E)(-R) + \frac{CD - EB}{B^2 - AC}$$

$$y = \left(b + \frac{BD - AE}{B^2 - AC}\right)S + (Bb + Aa + D)R + \frac{AE - BD}{B^2 - AC}$$

17. Quum autem fit $S + R\sqrt{k} = (s + r\sqrt{k})^n$

erit eodem modo $S - R\sqrt{k} = (s - r\sqrt{k})^n$

vnde deducimus

$$S = \frac{1}{2} (s + r\sqrt{k})^n + \frac{1}{2} (s - r\sqrt{k})^n \text{ et}$$

$$R = \frac{1}{2\sqrt{k}} (s + r\sqrt{k})^n - \frac{1}{2\sqrt{k}} (s - r\sqrt{k})^n$$

B b 2

quibus

quibus valoribus substitutis, obtinebimus

$$x = \left(\frac{EB - CD}{2(B^2 - AC)} + \frac{a\sqrt{k} - Ba - Cb - E}{2\sqrt{k}} \right) (s + r\sqrt{k})^n$$

$$+ \left(\frac{EB - CD}{2(B^2 - AC)} + \frac{a\sqrt{k} + Ba + Cb + E}{2\sqrt{k}} \right) (s - r\sqrt{k})^n + \frac{CD - EB}{B^2 - AC}$$

$$y = \left(\frac{BD - AE}{2(B^2 - AC)} + \frac{b\sqrt{k} + Bb + Aa + D}{2\sqrt{k}} \right) (s + r\sqrt{k})^n$$

$$+ \left(\frac{BD - AE}{2(B^2 - AC)} + \frac{b\sqrt{k} - Bb - Aa - D}{2\sqrt{k}} \right) (s - r\sqrt{k})^n + \frac{AE - BD}{B^2 - AC}$$

et quia $k = B^2 - AC$ hae formulae ita simplices evadent:

$$x = \frac{1}{2k} (EB - CD + ak - (Ba + Cb + E)\sqrt{k})(s + r\sqrt{k})^n$$

$$+ \frac{1}{2k} (EB - CD + ak + (Ba + Cb + E)\sqrt{k})(s - r\sqrt{k})^n$$

$$+ \frac{1}{2k} (CD - EB)$$

$$y = \frac{1}{2k} (BD - AE + bk + (Bb + Aa + D)\sqrt{k})(s + r\sqrt{k})^n$$

$$+ \frac{1}{2k} (BD - AE + bk - (Bb + Aa + D)\sqrt{k})(s - r\sqrt{k})^n$$

$$+ \frac{1}{2k} (AE - BD).$$

18. Ante iam vidimus, quamlibet solutionem $x = a$ et $y = b$ suppeditare aliam sibi quasi fociam:

$$x = a + \frac{2B}{A} \left(b + \frac{BD - AE}{B^2 - AC} \right) \text{ et } y = -b - \frac{2(BD - AE)}{B^2 - AC}$$

quia autem ex ipsa indole nostrae aequationis, litterae x et y inter se permutari possunt, dummodo

1^o. litterae a et b , 2^o. litterae A et C et 3^{tie} litterae D et E inter se permutentur, haec consideratio nobis adhuc aliam solutionem suppeditabit, scilicet

$$x = -a - \frac{2(BE - CD)}{B^2 - AC}; \quad y = +b + \frac{2B}{C} \left(a + \frac{BE - CD}{B^2 - AC} \right):$$

Sicque ex eadem solutione duae novae fociae obtinentur.

19. Haec methodus posterior aequationem nostram resoluendi eo magis est notatu digna, quod ex doctrina irrationalium est petita, cuius alioquin nullus videtur esse usus in Analyfi Diophantea. Eximium autem huius doctrinae usum iam pridem in Algebra mea Ruthenice et Germanice edita fusius ostendi. Caeterum ad casus particulares nostrae aequationis propositae hic descendere non opus videtur, quum huiusmodi casus iam passim, satis superque sint pertractati.
