



1774

Summatio progressionum  $\sin(\varphi^\lambda) + \sin(2\varphi^\lambda) + \sin(3\varphi^\lambda) + \dots + \sin(n\varphi^\lambda)$ ;  $\cos(\varphi^\lambda) + \cos(2\varphi^\lambda) + \cos(3\varphi^\lambda) + \dots + \cos(n\varphi^\lambda)$

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

Record Created:

2018-09-25

### Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Summatio progressionum  $\sin(\varphi^\lambda) + \sin(2\varphi^\lambda) + \sin(3\varphi^\lambda) + \dots + \sin(n\varphi^\lambda)$ ;  $\cos(\varphi^\lambda) + \cos(2\varphi^\lambda) + \cos(3\varphi^\lambda) + \dots + \cos(n\varphi^\lambda)$ " (1774). *Euler Archive - All Works*. 447. <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/447>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).

SVMMATIO  
PROGRESSIONVM

$$\begin{aligned} & \sin. \Phi^1 + \sin. 2 \Phi^1 + \sin. 3 \Phi^1 + \dots + \sin. n \Phi^1 \\ & \cos. \Phi^1 + \cos. 2 \Phi^1 + \cos. 3 \Phi^1 + \dots + \cos. n \Phi^1. \end{aligned}$$

Auctore

L. EULERO.

§. 1.

Posito  $\cos. \Phi + \sqrt{-1} \sin. \Phi = p$  et  $\cos. \Phi - \sqrt{-1} \sin. \Phi = q$   
notum est fore

$$\cos. n \Phi = \frac{p^n + q^n}{2} \quad \text{et} \quad \sin. n \Phi = \frac{p^n - q^n}{2\sqrt{-1}}$$

tum vero etiam esse  $pq = 1$ . His positis evidens est, summationem harum serierum semper reduci posse ad has duas series vel progressionem geometricas

$$\begin{aligned} p^\alpha + p^{2\alpha} + p^{3\alpha} + \dots + p^{n\alpha} &= \frac{p^{(n+1)\alpha} - p^\alpha}{p^\alpha - 1} = \frac{p^\alpha(1 - p^{n\alpha})}{1 - p^\alpha} \\ q^\alpha + q^{2\alpha} + q^{3\alpha} + \dots + q^{n\alpha} &= \frac{q^{(n+1)\alpha} - q^\alpha}{q^\alpha - 1} = \frac{q^\alpha(1 - q^{n\alpha})}{1 - q^\alpha} \end{aligned}$$

§ 2. Quod si iam hae duae progressionem in vicem addantur, ut prodeat ista

$$\begin{aligned} & p^\alpha + p^{2\alpha} + p^{3\alpha} + \dots + p^{n\alpha} \\ & + q^\alpha + q^{2\alpha} + q^{3\alpha} + \dots + q^{n\alpha} \end{aligned} \quad \text{cuius summa erit} \quad \frac{p^\alpha - p^{(n+1)\alpha}}{1 - p^\alpha} + \frac{q^\alpha - q^{(n+1)\alpha}}{1 - q^\alpha} =$$

$$\frac{p^\alpha - p^{(n+1)\alpha} - p^\alpha q^\alpha + p^{(n+1)\alpha} q^\alpha + q^\alpha - q^{(n+1)\alpha} - p^\alpha q^\alpha + p^\alpha q^{(n+1)\alpha}}{1 - p^\alpha - q^\alpha + p^\alpha q^\alpha}$$

quae expressio ob  $p q = 1$  transformatur in hanc

$$\frac{p^\alpha - p^{(n+1)\alpha} - 1 + p^{n\alpha} + q^\alpha - q^{(n+1)\alpha} - 1 + q^{n\alpha}}{2 - p^\alpha - q^\alpha}$$

quae porro ob

$$p^\alpha + q^\alpha = 2 \cos. \alpha \Phi \text{ et } p^{(n+1)\alpha} + q^{(n+1)\alpha} = 2 \cos. (n+1) \alpha \Phi$$

$$\text{et } p^{n\alpha} + q^{n\alpha} = 2 \cos. n \alpha \Phi$$

reducitur ad hanc formam:

$$\frac{\cos. \alpha \Phi - \cos. (n+1) \alpha \Phi - 1 + \cos. n \alpha \Phi}{1 - \cos. \alpha \Phi} = -1 + \frac{\cos. (n \alpha \Phi) - \cos. (n+1) \alpha \Phi}{1 - \cos. \alpha \Phi}$$

quae ergo est summa seriei propositae.

§. 3. Sin autem altera nostrarum progressio-  
num ab altera subtrahatur, vt habeatur ista

$$+ p^\alpha + p^{2\alpha} + p^{3\alpha} + \dots + p^{n\alpha} \quad \frac{p^\alpha - p^{(n+1)\alpha}}{1 - p^\alpha}$$

eius summa erit

$$- q^\alpha - q^{2\alpha} - q^{3\alpha} + \dots - q^{n\alpha} \quad \frac{-q^\alpha + q^{(n+1)\alpha}}{1 - q^\alpha}$$

quae partes ad eundem denominatorem reductae pro-  
ducent

$$\left\{ \begin{array}{l} + p^\alpha - p^{(n+1)\alpha} - p^\alpha q^\alpha + p^{(n+1)\alpha} q^\alpha \\ - q^\alpha + q^{(n+1)\alpha} + p^\alpha q^\alpha - q^{(n+1)\alpha} p^\alpha \end{array} \right\} : 1 - p^\alpha - q^\alpha + p^\alpha q^\alpha$$

Ob  $p q = 1$  vero haec expressio ad hanc reducitur

$$\frac{p^\alpha - p^{(n+1)\alpha} - 1 + p^{n\alpha} - q^\alpha + q^{(n+1)\alpha} + 1 - q^{n\alpha}}{2 - p^\alpha - q^\alpha}$$

V M

+ sin. n Φ<sup>α</sup>

+ cos. n Φ<sup>α</sup>

V - 1 sin. Φ = q

tis evidens est,  
reduci posse  
metricas

$$\frac{p^\alpha - p^{(n+1)\alpha}}{1 - p^\alpha}$$

$$\frac{q^\alpha - q^{(n+1)\alpha}}{1 - q^\alpha}$$

gressiones in-

$$\frac{p^\alpha - p^{(n+1)\alpha}}{1 - p^\alpha}$$

$$\frac{+ q^\alpha - q^{(n+1)\alpha}}{1 - q^\alpha}$$

=

et porro ob

$$p^\alpha - q^\alpha = 2\sqrt{-1} \sin. \alpha \Phi \quad \text{et} \quad p^{(n+1)\alpha} - q^{(n+1)\alpha} = 2\sqrt{-1} \sin. (n+1)\alpha \Phi$$

$$\text{et} \quad p^{n\alpha} - q^{n\alpha} = 2\sqrt{-1} \sin. n\alpha \Phi$$

in hanc transformatur expressionem

$$\frac{(\sin. \alpha \Phi - \sin. (n+1)\alpha \Phi + \sin. n\alpha \Phi) \sqrt{-1}}{1 - \cos. \alpha \Phi} \sqrt{-1}$$

§. 4. Designemus breuitatis gratia summas harum serierum, ultimo termino seu generali praefigendo signum summationis  $f$ , ita ut bini casus euoluti praebeant sequentes summationes

$$f(p^{n\alpha} + q^{n\alpha}) = -1 + \frac{\cos. (n\alpha \Phi) - \cos. (n+1)\alpha \Phi}{1 - \cos. \alpha \Phi}, \text{ et}$$

$$f(p^{n\alpha} - q^{n\alpha}) = \frac{(\sin. \alpha \Phi + \sin. n\alpha \Phi - \sin. (n+1)\alpha \Phi) \sqrt{-1}}{1 - \cos. \alpha \Phi} (\sqrt{-1})$$

ex quibus formulis facile erit omnes casus propositos deducere.

§. 5. Sit igitur primo  $\lambda = 1$ , ut habeantur hae duae series summandae:

$$s = \sin. \Phi + \sin. 2\Phi + \sin. 3\Phi + \dots + \sin. n\Phi \text{ siue } s = f \sin. n\Phi \text{ et}$$

$$t = \cos. \Phi + \cos. 2\Phi + \cos. 3\Phi + \dots + \cos. n\Phi \text{ siue } t = f \cos. n\Phi$$

cum igitur sit

$$\sin. n\Phi = \frac{p^n - q^n}{2\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad \cos. n\Phi = \frac{p^n + q^n}{2}$$

habebimus

$$2s\sqrt{-1} = f(p^n - q^n) \quad \text{et} \quad 2t = f(p^n + q^n)$$

vnde ex paragrapho praecedente statim nanciscimur ob  $\alpha = 1$

$$2s\sqrt{-1} = \frac{(\sin. \Phi + \sin. n\Phi - \sin. (n+1)\Phi) \sqrt{-1}}{1 - \cos. \Phi} \sqrt{-1} \text{ et}$$

$$2t = -1 + \frac{\cos. n\Phi - \cos. (n+1)\Phi}{1 - \cos. \Phi} \text{ ideoque}$$

$s =$

$$s = \frac{\sin. \Phi + \sin. n\Phi - \sin. (n+1)\Phi}{2(1 - \cos. \Phi)} \text{ et } t = -\frac{1}{2} + \frac{\cos. n\Phi - \cos. (n+1)\Phi}{2(1 - \cos. \Phi)}$$

§. 6. Sit nunc  $\lambda = 2$  et statuamus iterum

$s = \sin. \Phi^2 + \sin. 2\Phi^2 + \dots + \sin. n\Phi^2$  siue  $s = f \sin. n\Phi^2$  et  
 $t = \cos. \Phi^2 + \cos. 2\Phi^2 + \dots + \cos. n\Phi^2$  siue  $t = f \cos. n\Phi^2$   
 cum nunc fit

$$\sin. n\Phi^2 = \frac{p^{2n} - 2p^n q^n + q^{2n}}{4} = \frac{p^{2n} - q^{2n}}{4} \text{ et}$$

$$\cos. n\Phi^2 = \frac{p^{2n} + 2p^n q^n + q^{2n}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{p^{2n} + q^{2n}}{4}$$

habebimus has formulas

$$4s = 2f1 - f(p^{2n} + q^{2n}) \text{ et } 4t = 2f1 + f(p^{2n} + q^{2n})$$

vbi cum numerus terminorum fit  $n$ , manifestum est fore  $f1 = n$ ; hinc quia  $\alpha = 2$ , ex superioribus erit

$$f(p^{2n} + q^{2n}) = -1 + \frac{\cos. 2n\Phi - \cos. 2(n+1)\Phi}{1 - \cos. 2\Phi}$$

quibus valoribus substitutis, facta diuisione per 4 obtinebimus

$$s = \frac{n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\cos. 2n\Phi - \cos. 2(n+1)\Phi}{4(1 - \cos. 2\Phi)} \text{ et } t = \frac{n}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\cos. 2n\Phi - \cos. 2(n+1)\Phi}{4(1 - \cos. 2\Phi)}$$

atque hinc statim liquet fore

$$s + t = n, \text{ prorsus vti rei natura postulat.}$$

§. 7. Statuamus nunc  $\lambda = 3$  et series summandas ita repraesentemus

$s = \sin. \Phi^3 + \sin. 2\Phi^3 + \dots + \sin. n\Phi^3$  siue  $s = f \sin. n\Phi^3$  et  
 $t = \cos. \Phi^3 + \cos. 2\Phi^3 + \dots + \cos. n\Phi^3$  siue  $t = f \cos. n\Phi^3$ .

Cum nunc sit

$$\sin. n\Phi^s = \frac{p^{3n} - 3p^{2n}q^n + 3p^nq^{2n} - q^{3n}}{-8\sqrt{-1}} \text{ et}$$

$$\cos. n\Phi^s = \frac{p^{3n} + 3p^{2n}q^n + 3p^nq^{2n} + q^{3n}}{8}$$

unde ob  $pq = 1$  consequimur

$$s = \frac{-1}{8\sqrt{-1}} \int (p^{3n} - q^{3n}) \frac{-3p^{2n} + 3q^n}{-8\sqrt{-1}} = \frac{-1}{-8\sqrt{-1}} \int (p^{3n} - q^{3n}) + \frac{3}{8\sqrt{-1}} \int (p^n - q^n)$$

tum vero

$$t = + \frac{1}{8} \int (p^{3n} + q^{3n}) + \frac{3}{8} \int (p^n + q^n)$$

quod si nunc valores supra inuentos hic substituamus, ambae summae quaesitae ita prodibunt expressae.

$$s = -\frac{\sin. 3\Phi - \sin. 3n\Phi + \sin. (3(n+1)\Phi)}{8(1 - \cos. 3\Phi)} + \frac{3 \sin. \Phi - 3 \sin. n\Phi - 3 \sin. (n+1)\Phi}{8(1 - \cos. \Phi)}$$

$$t = -\frac{1}{8} + \frac{\cos. 3\Phi - \cos. 3(n+1)\Phi}{8(1 - \cos. 3\Phi)} + \frac{3 \cos. \Phi - 3 \cos. (n+1)\Phi}{8(1 - \cos. \Phi)}$$

§. 8. Sit nunc  $\lambda = 4$  ita vt quaerantur hae summae

$$s = \sin. \Phi^4 + \sin. 2\Phi^4 + \dots + \sin. n\Phi^4 \text{ siue } s = \int \sin. n\Phi^4 \text{ et}$$

$$t = \cos. \Phi^4 + \cos. 2\Phi^4 + \dots + \cos. n\Phi^4 \text{ siue } t = \int \cos. n\Phi^4$$

Cum igitur sit

$$\sin. n\Phi^4 = \frac{p^{4n} - 4p^{3n}q^n + 6p^{2n}q^{2n} - 4p^nq^{3n} + q^{4n}}{+ 16}$$

$$\text{et } \cos. n\Phi^4 = \frac{p^{4n} + 4p^{3n}q^n + 6p^{2n}q^{2n} + 4p^nq^{3n} + q^{4n}}{16}$$

ob  $pq = 1$  sequuntur hi valores

$$s = \frac{1}{16} \int (p^{4n} + q^{4n}) - \frac{1}{4} \int (p^{2n} + q^{2n}) + \frac{3}{8} \int 1 \text{ et}$$

$$t = \frac{1}{16} \int (p^{4n} + q^{4n}) + \frac{1}{4} \int (p^{2n} + q^{2n}) + \frac{3}{8} \int 1$$

valo-

valoribus igitur quos supra dedimus substitutis erit

$$S = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{16} + \frac{\cos_{\lambda+2n}\Phi - \cos_{\lambda+2(n+1)}\Phi}{16(1 - \cos_{\lambda+2}\Phi)} - \frac{\cos_{\lambda+2n}\Phi + \cos_{\lambda+2(n+1)}\Phi}{4(1 - \cos_{\lambda+2}\Phi)} \text{ et}$$

$$S = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{16} + \frac{\cos_{\lambda+2n}\Phi - \cos_{\lambda+2(n+1)}\Phi}{16(1 - \cos_{\lambda+2}\Phi)} + \frac{\cos_{\lambda+2n}\Phi + \cos_{\lambda+2(n+1)}\Phi}{4(1 - \cos_{\lambda+2}\Phi)}$$

sicque facile erit etiam maiores valores exponentis  $\lambda$  euoluere.

§. 9. Quod si iam quaeratur, cuiusmodi summae hinc sint proditurae, si istae series in infinitum continuentur, non exigua circumspectione erit utendum. Primo enim si exponent  $\lambda$  fuerit numerus par, evidens est, sumto pro  $n$  numero infinito, summas harum serierum etiam fore infinite magnas; verum si  $\lambda$  fuerit numerus impar, tum nihil est, quod has summas in infinitum augere possit, tota autem quaestio huc redigitur, ut valores formularum sinus  $n\alpha\Phi$  et  $\cos n\alpha\Phi$  assignentur quando pro  $n$  numeri infinite magni accipiuntur, perspicuum autem est hos valores hoc casu aequae a termino usque ad terminum  $-1$  variari posse, ac si  $n$  esset numerus finitus, unde si res in se spectetur, nihil certi de his summis affirmari licet, cum quaecunque summa proferretur, si insuper vnus pluresue termini adderentur, prorsus alia summa esset proditura; Interim tamen ab illustri Auctore precedentis dissertationis summae hoc casu per rationes metaphycas perquam ingeniose assignantur, quibus in analysi perfecte acquiescere queamus.

§. 10. Cum autem in his seriebus aequae ac in omnibus aliis non convergentibus, notio summae

$\int (2^n - 2^n)$

stituamus, pressae

$$\frac{2^{-2} \sin(n+1)\Phi}{\cos_{\lambda}\Phi} - \frac{\cos_{\lambda}(n+1)\Phi}{2\cos_{\lambda}\Phi}$$

intur hae

$$\sin n\Phi \text{ et } \cos n\Phi$$

$$q^{2n} + q^{4n}$$

$$q^{2n} + q^{4n}$$

et

valo-

30 SUMMATIO SERIERVM EX SIN.

proprie locum inuenire nequeat, quandoquidem quot-  
cunque etiam termini actu addantur tamen nun-  
quam ad summam determinatam peruenitur; Iam  
pridem validissimis rationibus innixus admonui his  
casibus voci summae alium significatum ad analy-  
sin magis accommodatum tribui debere, quam nouam  
notionem ita constitui debere censeo, vt summa cu-  
iusque seriei infinitae, siue fuerit conuergens siue di-  
uergens, vocetur ea formula analytica, ex cuius euo-  
lutione eae series nascantur, hacque admissa defini-  
tione omnia dubia circa huiusmodi summationes spon-  
te euanescent.

§. 11. Quod quo clarius appareat, consideremus  
primam seriem supra exhibitam

$$s = \sin. \Phi + \sin. 2 \Phi + \sin. 3 \Phi + \dots + \sin. n \Phi$$

pro qua inuenimus

$$\frac{\sin. \Phi + \sin. n \Phi - \sin. (n+1) \Phi}{2(1 - \cos. \Phi)}$$

in quam expressionem formulæ  $\sin. n \Phi$  et  $\sin. (n+1) \Phi$   
propter vltimum terminum ingrediuntur, quod si  
ergo series reuera in infinitum continuetur; ob nul-  
lum terminum vltimum etiam hae formulæ sponte  
excedunt, ita vt hoc casu fiat  $s = \frac{\sin. \Phi}{2(1 - \cos. \Phi)}$ , quae  
etiam ea ipsa est formula, ex cuius euolutione ista  
series elicitur, vnde vi meae definitionis haec for-  
mula in analysi recte pro summa istius seriei haberi  
potest, quod idem de altera serie

$$s = \cos. \Phi + \cos. 2 \Phi + 3 \Phi + \dots + \cos. n \Phi$$

est



est tenendum, pro qua inuenimus

$$t = -\frac{1}{2} + \frac{\cos. n \Phi - \cos. (n+1) \Phi}{2(1 - \cos. \Phi)}$$

omisso enim postremo membro vtpote a termino ultimo pendente, summa per meam definitionem vtique erit  $t = -\frac{1}{2}$  quod cum non tam facile pateat, notandum est, hunc valorem natum esse ex formula  $t = \frac{\cos. \Phi - 1}{2(1 - \cos. \Phi)}$ , quem valorem seriei propositae esse aequalem ita ostendi potest: Multiplicetur vtrinque per  $2 - 2 \cos. \Phi$  fierique debet

$$\cos. \Phi - 1 = \begin{cases} 2 \cos. \Phi + 2 \cos. 2 \Phi + 2 \cos. 3 \Phi + 2 \cos. 4 \Phi \\ - 2 \cos. \Phi^2 - 2 \cos. \Phi \cos. 2 \Phi - 2 \cos. \Phi \cos. 3 \Phi \end{cases}$$

cum nunc sit in genere

$$2 \cos. a \cos. b = \cos. (a-b) + \cos. (a+b) \text{ erit}$$

$$\begin{array}{ll} 2 \cos. \Phi^2 = 1 + \cos. 2 \Phi & 2 \cos. \Phi \cos. 4 \Phi = \cos. 3 \Phi + \cos. 5 \Phi \\ 2 \cos. \Phi \cos. 2 \Phi = \cos. \Phi + \cos. 3 \Phi & 2 \cos. \Phi \cos. 5 \Phi = \cos. 4 \Phi + \cos. 6 \Phi \\ 2 \cos. \Phi \cos. 3 \Phi = \cos. 2 \Phi + \cos. 4 \Phi & 2 \cos. \Phi \cos. 6 \Phi = \cos. 5 \Phi + \cos. 7 \Phi \\ & \text{etc.} \end{array}$$

quibus valoribus substitutis aequalitas manifesto in oculos incurrit, prodibit enim

$$\begin{array}{l} \cos. \Phi - 1 = 2 \cos. \Phi + 2 \cos. 2 \Phi + 2 \cos. 3 \Phi + 2 \cos. 4 \Phi \\ \quad - 1 - \cos. \Phi - \cos. 2 \Phi - \cos. 3 \Phi - \cos. 4 \Phi \text{ etc.} \\ \quad - \cos. 2 \Phi - \cos. 3 \Phi - \cos. 4 \Phi \end{array}$$

§. 12. Iisdem obseruatis cautelis etiam pro casu  $\lambda = 3$  quo posueramus

$$\begin{array}{l} t = \sin. \Phi^3 + \sin. 2 \Phi^3 + \sin. 3 \Phi^3 + \text{etc. in infinitum} \\ \text{et } t = \cos. \Phi^3 + \cos. 2 \Phi^3 + \cos. 3 \Phi^3 + \cos. 4 \Phi^3 + \text{etc. in infinitum} \end{array}$$

sum-

lot-  
un-  
am  
his  
yfin  
iam  
cu-  
di-  
no-  
ini-  
on-  
mus

1) Φ  
d si  
nul-  
onte  
quae  
ista  
for-  
aberi

est

## 32 SUMMATIO SERIERVM EX SIN.

Summa harum serierum infinitarum ita erunt expressae

$$s = -\frac{\sin. \Phi}{1 - \cos. \Phi} + \frac{2 \sin. \Phi}{1 - \cos. \Phi} \text{ et } t = -\frac{1}{2}$$

Hic quidem non tam facile apparet, harum formularum evolutionem ad ipsas has series perducere, nihilo vero minus certum est, perfectam aequalitatem locum habere, id quod, qui in hoc calculi genere satis sunt exercitati, perspicient. Interim tamen veritatem posterioris summationis hoc modo ostendisse iuuabit, cum sit

$$\cos. a^3 = \frac{1}{2} \cos. a + \frac{1}{2} \cos. 3a$$

series haec in duas sequentes resoluitur

$$s = \frac{1}{2} (\cos. \Phi + \cos. 2\Phi + \cos. 4\Phi \text{ etc.})$$

$$+ \frac{1}{2} (\cos. 3\Phi + \cos. 6\Phi + \cos. 9\Phi \text{ etc.})$$

prioris autem seriei summa ex precedentibus est  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$   
 posterioris vero ob eandem rationem summa est  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$   
 unde ambae coniunctim faciunt summam  $-\frac{1}{2}$ .

## SUMMATIO GENERALIS INFINITARVM ALIARVM PROGRESSIONVM AD HOC GENVS REFERNDARVM.

### Theorema.

Si cognita fuerit summatio huius progressionis

$$Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 \dots + Nz^n$$

tum

tum semper etiam has progressionibus summare licebit.

$$S = Ax \sin. \Phi + Bx^2 \sin. 2\Phi + Cx^3 \sin. 3\Phi + \dots + Nx^n \sin. n\Phi$$

$$\text{et } T = Ax \cos. \Phi + Bx^2 \cos. 2\Phi + Cx^3 \cos. 3\Phi + \dots + Nx^n \cos. n\Phi.$$

### Demonstratio.

Cum summa progressionis

$$Az + Bz^2 + Cz^3 \dots + Nz^n$$

fit certa quaedam functio quantitatis variabilis  $z$ , designetur ea hac formula  $\Delta : z$ ; tum vero ponendo ut ante

$$p = \cos. \Phi + \sqrt{-1} \sin. \Phi \quad \text{et} \quad q = \cos. \Phi - \sqrt{-1} \sin. \Phi,$$

ut fiat

$$\sin. n\Phi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(p^n - q^n) \quad \text{et} \quad \cos. n\Phi = \frac{1}{2}(p^n + q^n);$$

si haec formulae in propositis seriebus substituantur, earum summae ita expressae obtinebuntur

$$2\sqrt{-1} \Delta : px - \Delta : qx \quad \text{et} \quad 2T = \Delta : px + \Delta : qx$$

vbi notandum, in vtraque formula quantitates imaginarias litteris  $p$  et  $q$  inuolutas sponte se destruere, ita, ut pro summis  $S$  et  $T$  valores reales sint prodituri; atque haec summatio perinde succedet, siue propositae series in infinitum progrediantur, siue alicubi terminentur.

### Exempl. I.

Sint omnes coëfficientes  $A, B, C \dots = 1$  et series in infinitum continetur; eritque  $\Delta : z = \frac{z}{1-z}$ ; hinc ergo pro serie priore

$$S = x \sin. \Phi + x^2 \sin. 2\Phi + x^3 \sin. 3\Phi + x^4 \sin. 4\Phi + \dots \text{ in infi.}$$

Tom. XVIII. Nou. Comm. E habe-

34 SUMMATIO SERIERVM EX SIN.

habebitur

$$2SV - 1 = \frac{px}{1-px} - \frac{qx}{1-qx} = \frac{(p-q)x}{1-(p+q)x+pqx^2}$$

quae expressio ob  $p-q = 2V - 1 \sin. \Phi$  et  $p+q = 2 \cos. \Phi$   
et  $pq = 1$  praebebit

$$S = \frac{x \sin. \Phi}{1 - 2x \cos. \Phi + x^2}$$

Pro altera vero serie

$$T = x \cos. \Phi + x^2 \cos. 2\Phi + x^3 \cos. 3\Phi + \dots \text{ in infinit.}$$

fiet  $2T = \frac{px}{1-px} + \frac{qx}{1-qx} = \frac{(p+q)x - 2pqx^2}{1-(p+q)x+pqx^2}$   
siue  $T = \frac{x \cos. \Phi - x^2}{1 - 2x \cos. \Phi + x^2}$

Coroll. 1.

Hinc igitur si  $x = 1$ , oriuntur summationes supra datae, scilicet

$$S = \frac{\sin. \Phi}{2(1 - \cos. \Phi)} = \frac{1}{2} \cotang. \frac{1}{2} \Phi$$

et  $T = -\frac{1}{2}$

qui casus eo magis est notatu dignus, quod singuli termini sunt quantitates variables, cum tamen summa sit quantitas constans.

Coroll. 2.

Semper autem in genere quantitatem  $x$  ita assumere licebit, ut summa seriei datae quantitati  $a$  fiat aequalis; pro priore serie sinuum autem erit

$$\frac{x \sin. \Phi}{1 - 2x \cos. \Phi + x^2} = a;$$

ac si hinc littera  $x$  determinetur, certo erit

$$a = x \sin. \Phi + x^2 \sin. 2\Phi + x^3 \sin. 3\Phi + \dots$$

simi-

similique modo si statuatur

$$\frac{x \cos. \Phi - x^2}{1 - 2x \cos. \Phi + x^2} = a$$

ex eaque valor litterae  $x$  eruatur; etiam erit

$$a = x \cos. \Phi + x^2 \cos. 2\Phi + x^3 \cos. 3\Phi + \dots$$

Exempl. 2.

Sit nunc

$$\Delta : z = z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{4} z^4 + \dots \text{ in infinit.}$$

$= \log. \frac{1}{1-z}$ ; ita, vt series propositae iam sint

$$S = x \sin. \Phi + \frac{1}{2} x^2 \sin. 2\Phi + \frac{1}{3} x^3 \sin. 3\Phi + \dots$$

et  $T = x \cos. \Phi + \frac{1}{2} x^2 \cos. 2\Phi + \frac{1}{3} x^3 \cos. 3\Phi + \dots$

habebimus

$$2SV - 1 = \log. \frac{1}{1-pz} - \log. \frac{1}{1-qz} = \log. \frac{1-qz}{1-pz}$$

siue

$$2SV - 1 = \frac{1 - x \cos. \Phi + x \sqrt{1 - \sin. \Phi}}{1 - x \cos. \Phi - x \sqrt{1 - \sin. \Phi}}$$

pro cuius formulae reductione consideretur haec forma

$$\log. \frac{f + g \sqrt{v-1}}{f - g \sqrt{v-1}}$$

de qua constat, si ponatur  $\frac{g}{f} = \text{tang. } \omega$ , hunc logarithmum fore  $= 2\omega \sqrt{v-1}$ ; hinc ergo quaeratur angulus  $\omega$ , vt fit

$$\text{tang. } \omega = \frac{x \sin. \Phi}{1 - x \cos. \Phi};$$

vnde protenus sequitur  $S = \omega$ ; pro altera progressionem cum fit

$$2T = \log. \frac{1}{1-pz} + \log. \frac{1}{1-qz} = -\log. (1 - 2x \cos. \Phi + x^2)$$

E 2

habe-

habetur

$$T = -\frac{1}{2} \log. (1 - 2x \cos. \Phi + x^2).$$

## Coroll.

Pro priore ergo progressionem cum fit

$$\frac{x \sin. \Phi}{1 - x \cos. \Phi} = \text{tang. } \omega$$

hinc elicitur

$$x = \frac{\text{tang. } \omega}{\sin. \Phi + \cos. \Phi \text{ tang. } \omega} = \frac{\sin. \omega}{\sin. (\Phi + \omega)}$$

qua valore substituto nanciscimur hanc summationem attentione maxime dignam

$$\omega = \frac{\sin. \omega \sin. \Phi}{\sin. (\Phi + \omega)} + \frac{\sin. \omega^2 \sin. 2 \Phi}{2 \sin. (\Phi + \omega)^2} + \frac{\sin. \omega^3 \sin. 3 \Phi}{3 \sin. (\Phi + \omega)^3} \\ + \frac{\sin. \omega^4 \sin. 4 \Phi}{4 \sin. (\Phi + \omega)^4} + \dots$$

vbi si  $\omega = \frac{\pi}{2}$ , vt fit  $\sin. \omega = 1$ ; et  $\sin. (\Phi + \omega) = \cos. \Phi$  oritur haec summatio maxime concinna

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\sin. \Phi}{1 \cdot \cos. \Phi} + \frac{\sin. 2 \Phi}{2 \cdot \cos. \Phi^2} + \frac{\sin. 3 \Phi}{3 \cdot \cos. \Phi^3} + \dots$$

quam seriem iam olim in calculo differentiali ex diuersissimis principiis sum adeptus; quae eo magis memorabilis erat visa, quod vtcunque angulus  $\Phi$  accipiatur, summa seriei semper maneat eadem  $= \frac{\pi}{2}$ .

OBSER-