1773

De motu vibratorio chordarum ex partibus quotcunque diversae crassitiei compositarum

Leonhard Euler

DE MOTV VIBRATORIO CHORDARVM EX PARTIBVS QVOTCVNQVE DIVERSAE CRASSITIEI COMPOSITARVM.

Auctore

L. EVLERO.

Eadem methodo, qua casum ab Illustri *Bernoullio* tractatum expendimus, etiam motus chordarum, quae ex partibus quotcunque diuersae crassitiei sunt compositae, facile et expedite definiri potest, id quod casu, quo chorda ex tribus tantum diuersis partibus constat, ostendisse sufficiet.

Tab. VI. Fig. 2. 1. Sit igitur chorda A D in terminis A et D fixa ex tribus partibus $AB = a$, $BC = b$; et $CD = c$ composita, quarum diuersa crassities ita ad calculum referatur, vt ex genere, vnde portio A B est desumta, chorda longitudinis $= k$ pondus habeat $=$ A; chorda autem ex eo genere, vnde portio B C est desumta et pariter longitudinis $= k$, pondus habeat $=$ B, similique modo C sit pondus chordae itidem longitudinis k ex eo genere, vnde tertia portio C D est desumta, tum vero sit pondus seu vis, qua ista chorda tenditur, K, hinc pro qualibet portione sequentes quantitates determinentur denotante h altitudinem

dinem lapſus vno minuto ſecundo facti, ita vt ſit $b = 15\frac{5}{8}$ ped. Rhen. Statuatur pro prima portione

$$2bk.\frac{K}{A} = \alpha\alpha;$$

pro ſecunda portione

$$2bk.\frac{K}{B} = \beta\beta$$

et pro tertia portione

$$2bk.\frac{K}{C} = \gamma\gamma,$$

quarum formularum rationem intelligere licet ex ſuperiori diſſertatione, qua motum chordarum vniformium generaliſſime determinauimus.

2. His poſitis vocemus pro prima portione $AB = a$, abſciſſam quamcunque $AX = x$ et applicatam $AY = y$, ita vt x non vltra a augeri poſſit, pro ſecunda autem portione $BC = b$ vocetur abſciſſa quaecunque a puncto B deſumta $BX' = x'$ et applicata $X'Y' = y'$, vbi abſciſſa $BX' = x'$ non vltra b augeri poteſt. Pro tertia autem portione $CD = c$, ſit abſciſſa a puncto C ſumta $CX'' = x''$ eique reſpondens applicata $X''Y'' = y''$, vbi ergo poſito $x' = c$ in ipſum terminum D peruenitur. Iam elapſo tempore t, quod ſemper in minutis ſecundis exhibeatur, per principia ſupra ſtabilita, motus ſingularum portionum ſequentibus aequationibus differentio-differentialibus definietur:

I°. pro portione AB $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \alpha\alpha\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$

II°. pro portione BB $\left(\frac{ddy'}{dt^2}\right) = \beta\beta\left(\frac{ddy'}{dx^2}\right)$

III°. pro portione CD $\left(\frac{ddy''}{dt^2}\right) = \gamma\gamma\left(\frac{ddy''}{dx^2}\right)$

facile

facile enim patet pro qualibet portione motum per eadem principia seorsim determinari debere.

8. Integralia completa harum aequationum nulla plane laborant difficultate, quae ita se habere reperiuntur:

I. pro prima portione $y = \Phi(t + \frac{x}{\alpha}) - \Psi(t - \frac{x}{\alpha})$

II. pro secunda portione $y' = \Phi'(t + f + \frac{x'}{\beta}) - \Psi'(t - f - \frac{x'}{\beta})$

III. pro tertia portione $y'' = \Phi''(t + g + \frac{x''}{\gamma}) - \Psi''(t - g - \frac{x''}{\gamma})$

in quibus posterioribus formulis quantitates f et g introduximus, propterea quod abscissae x' et x'' non ab eodem initio A sunt sumtae, praeterea vero characteres Φ, Φ', Φ'' et Ψ, Ψ', Ψ'' functiones quascunque formularum, quibus sunt praefixi, denotare possunt, quas adeo per lineas curuas quascunque repraesentare licebit, nequidem eiusmodi lineis exceptis, quae libero manus tractu duci possunt. Nunc haec integralia completa ad ipsum statum chordae propositae adcommodari oportet, ac pro prima quidem parte, quia chorda in puncto A est fixa, posito $x = 0$, etiam fieri debet $y = 0$, vnde oritur

$$\Phi : t = \Psi : t$$

sicque functio Ψ congruere debet cum functione Φ. Hinc igitur si ad ipsam iuncturam B progrediamur; applicata hoc loco erit:

$$\Phi(t + \frac{a}{\alpha}) - \Phi(t - \frac{a}{\alpha}).$$

Eadem autem applicata ex formulis secundae portionis, sumendo $x' = 0$, prodit

$$= \Phi'(t + f) - \Psi'(t - f),$$

quae

quae expreſſio ergo illi aequalis eſſe debet, idque ita vt non ſolum quantitates functionibus ſubnexae conveniant, ſed etiam ipſae functiones, quippe quod ratio continuitatis poſtulat, quandoquidem functiones Φ et Ψ ſeorſim aequationibus differentialibus ſatisfaciunt. Ob hanc ergo rationem ſtatim colligimus $f = \frac{a}{\alpha}$, tum vero $\Phi' = \Phi$ et $\Psi' = \Phi$, ita vt pro ſecunda portione B C hanc habeamus aequationem

$$y = \Phi\left(t + \frac{a}{\alpha} + \frac{x'}{\beta}\right) - \Phi\left(t - \frac{a}{\alpha} - \frac{x'}{\beta}\right),$$

vnde pro ſequente iunctura C, vbi $x' = b$, applicata prodit

$$= \Phi\left(t + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}\right) - \Phi\left(t - \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta}\right),$$

cui ergo aequalis fieri debet tertia formula generalis, ſi ibi ſtatuatur $x'' = 0$, quae praebet

$$\Phi''(t + g) - \Psi''(t - g),$$

quocirca ob easdem rationes habebimus $g = \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}$, ac ratione functionum $\Phi'' = \Phi$ et $\Psi'' = \Phi$, ita vt pro tertia portione C D iſta valeat aequatio

$$y''' = \Phi\left(t + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{x''}{\gamma}\right) - \Phi\left(t - \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} - \frac{x''}{\gamma}\right).$$

Quum denique ſumto hic $x'' = c$, in termino D applicata iterum euaneſcere debeat, neceſſe eſt vt fiat

$$\Phi\left(t + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right) = \Phi\left(t - \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} - \frac{c}{\gamma}\right)$$

vnde iam natura functionis Φ ita reſtringitur, vt

$$\Phi\left(p + \frac{2a}{\alpha} + \frac{2b}{\beta} + \frac{2c}{\gamma}\right) = \Phi : p,$$

ſcilicet ſi hae functiones denotent applicatas curuae cuiuscunque, haec curua ita debet esse comparata, vt abscissis interuallo

$$\frac{2a}{\alpha} + \frac{2b}{\beta} + \frac{2c}{\gamma}$$

distantibus eaedem vbique applicatae respondeant.

4. Aequationes igitur ad nostrum casum accommodatae pro singulis portionibus chordae ita se habebunt:

$y = \Phi(t + \frac{x}{\alpha}) - \Phi(t - \frac{x}{\alpha})$ pro portione A B

$y' = \Phi(t + \frac{a}{\alpha} + \frac{x'}{\beta}) - \Phi(t - \frac{a}{\alpha} - \frac{x'}{\beta})$ pro portione BC

$y'' = \Phi(t + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{x''}{\gamma}) - \Phi(t - \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} - \frac{x''}{\gamma})$ pro portione CD

vbi quidem functio Φ eam indolem habere debet, quam modo ante descripsimus, vnde statim colligitur elapso tempore

$$t = \frac{2a}{\alpha} + \frac{2b}{\beta} + \frac{2c}{\gamma}$$

omnes applicatas ideoque totius chordae figuram iterum ad eum statum esse peruenturam, quem initio, vbi $t = 0$, obtinuerat, quare quum chorda interea duas vibrationes absoluisse censeatur, tempus vniuscuiusque vibrationis erit

$$= \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}$$

idque in minutis secundis expressum, quae expressio sine dubio simplicior esse non posset.

5. Ex formulis inuentis porro facilis et satis elegans constructio concinnari poterit, similis illi, quam pro casu chordarum vniformium tradidimus, quae scilicet ope cuiusdam scalae constructionis perficieba-

ficiebatur. Quoniam autem formulae t et $\frac{x}{\alpha}, \frac{x'}{\beta}, \frac{x''}{\gamma}$, meros tantum numeros indicant, multiplicentur eae per certam quandam lineam arbitrariam, quae $= i$, in quam igitur omnes superiores formulae, characteri functionis Φ subnexae, ductae sunt intelligendae. Atque nunc pro qualibet abscissa in ipsa chorda et ab eius initio A sumta, in scala constructionis capi debebit peculiaris quaedam abscissa, quam abscissam fictam adpellare liceat, et quam littera v designemus, cuius relatio ad abscissas chordae sequenti modo se habebit:

Pro abscissa ipsius chordae	Abscissa ficta
I°. $AX = x$	$v = \frac{ix}{\alpha}$
II°. $AX' = a + x'$	$v = \frac{ia}{\alpha} + \frac{ix'}{\beta}$
III°. $AX'' = a + b + x''$	$v = \frac{ia}{\alpha} + \frac{ib}{\beta} + \frac{ix''}{\gamma}$

sicque pro tota longitudine chordae

$$AD = a + b + c,$$

abscissa ficta euadet

$$v = i\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right),$$

atque hinc perspicuum est, quomodo cuiuis abscissae in ipsa chorda a termino A desumtae, eidem respondens abscissa ficta definiri queat, quin etiam vicissim quomodo ex quauis abscissa ficta, ei respondens abscissa vera chordae reperiatur.

6. Ad constructionem generalem huius Problematis adornandam in axe indefinito capiatur interuallum Tab. VI. Fig. 3.

$$ai = 2i\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right)$$

 super

ſuper quo deſcribatur linea curua quaecunque $\alpha\eta$, ita vt applicatae extremae $a\alpha$ et $i\eta$ ſint inter ſe aequales, tum eadem haec curua tam dextrorſum quam ſiniſtrorſum ſuper eodem axe replicetur, quoties lubuerit. Sufficiet autem vtrinque ſemel eam repetiuiſſe, quoniam tempus t non opus eſt vltra valorem

$$2\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right)$$

augere, tum ſi ad tempus quodcunque t velimus chordae figuram aſſignare; a puncto fixo a capiamus interuallum $at = it$, cui reſpondeat applicata $t\theta$, quo facto, vt in ipſa chordae figura inueniamus applicatam, quae reſpondeat cuicunque abſciſſae x, a termino A ſumtae (vbi iam perinde eſt in quamnam portionem chordae alter eius terminus cadat), quaeratur primo abſciſſa ficta v illi reſpondens et a puncto t vtrinque abſcindantur interualla aequalia $tu = tu' = v$, vt in ſcala conſtructionis habeantur binae applicatae $u\mathfrak{v}$ et $u'\mathfrak{v}'$, tum applicata figurae cordae quaeſita erit $y = u\mathfrak{v} - u'\mathfrak{v}'$, quae operatio ſi pro quauis abſciſſa x inſtituatur, hoc modo delineabitur tota cordae figura, pro iſto tempore t.

7. Quod ſi fuerit $t = 0$ et punctum t in ipſo puncto a capiatur, hoc modo reſultabit figura, quam chorda ipſo initio habuerit, tum vero etiam ipſe motus, qui ſingulis chordae elementis inerat, facile innoteſcet, quum enim in genere habeamus,

$$y = \Phi(it + v) - \Phi(it - v)$$

erit

erit celeritas puncti chordae respondentis

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = i\,\Phi' : (i\,t + v) - i\,\Phi' : (i\,t - v),$$

ideoque pro statu initiali

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = i\,\Phi : (v) - i\,\Phi' : (-v)$$

atque hinc vicissim, si status chordae initialis fuerit cognitus, tam ratione figurae, quam ratione motus, inueniri poterit scala constructionis conueniens, id quod aliquanto clarius exposuisse iuuabit.

8. Scilicet si in statu initiali, vbi $t = 0$, abscissae x a termino fixo A sumtae, cui respondeat abscissa ficta $= v$, adplicata sit $= \Gamma : v$, quoniam spectari potest, vt certa functio ipsius v, celeritas autem in eodem loco sit $= i\,\Delta' : v$, vbi $\Delta' : v$ in $d\,v$ ductum exprimit differentiale $\Delta : v$, comparentur hi valores cum scala relationis, atque habebimus has aequationes:

$$\Phi : v - \Phi\,(-v) = \Gamma : v \text{ et } \Delta' : v = \Phi'(v) - \Phi'(-v)$$

quae posterior aequatio in $d\,v$ ducta et integrata dat

$$\Phi\,(v) + \Phi\,(-v) = \Delta : v + F$$

ex qua aequatione cum priore deducitur

$$\Phi : v = \frac{\Delta : v + \Gamma : v}{2} + \tfrac{1}{2}F \text{ et } \Phi(-v) = \tfrac{1}{2}\Delta : v - \tfrac{1}{2}\Gamma : v + \tfrac{1}{2}F$$

ex quibus formulis scala relationis tam dextrorsum, quam sinistrorsum a termino $v = 0$, vsque ad terminum

$$v = i\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right)$$

 facile

facile construetur et super axe interuallum duplo maius

$$= 2\,i\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right)$$

complebitur, quam figuram deinceps tam dextrorsum quam sinistrorsum replicari oportet, caeterum notari conuenit, si scala celeritatum initialium super abscissis fictis v exstructa detur, ita vt eius applicata sit $i\,\Delta' : v$, tum aream huius scalae fore

$$= i\,\Delta : v\text{, ideoque } \Delta : v = \frac{\text{Areae}}{i}\text{,}$$

sicque valor huius functionis $\Delta : v$ facillime innotescit. Euidens est hanc constructionem prorsus conuenire cum illa, quae circa chordas vniformis crassitiei est tradita.

9. Caeterum diffiteri non possumus, quoniam in qualibet iunctura B, C lex continuitatis quodammodo interrumpitur, etiam aberrationem quampiam calculi a veritate admitti debere, quae autem quum tantum circa elementa chordae quam minima locum habeat, pro nihilo haberi poterit, quam ob caussam hae formulae adhiberi non poterunt, quando chorda prorsus habuerit crassitiem per totam longitudinem variabilem, quia tum aberratio in omnibus punctis vsu veniret, atque idcirco valorem finitum adquireret. Huiusmodi autem aberratio tantum in figura chordae cerneretur, dum tempus cuiusque vibrationis idem esset proditurum, vti regula hic inventa postulat, quoniam ex aliis phaenomenis iam sumus certi, tempora vibrationum non a figura chordarum pendere.

10. Quare ſi chorda craſſitie vtcunque variabili fuerit praedita, pro abſciſſa quacunque $= x$, craſſities ita ſe habeat, vt ſi corda longitudinis $= k$ fuerit aeque craſſa, eius pondus futurum ſit $= V$, quoniam ergo huius elementi longitudo eſt $= dx$, ſi ponamus

$$2bk.\frac{K}{V} = uu,$$

pro formulis illis

$$= \frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma} \text{ etc.}$$

hic indefinite habebimus $\frac{dx}{u}$, huius ergo formulae integrale, per totam cordae longitudinem ſumtum, dabit tempus ſingularum vibrationum, ita vt hoc tempus ſit

$$\int \frac{dx\sqrt{V}}{\sqrt{(2bk.K)}},$$

dum ſcilicet hoc integrale $\int dx\sqrt{V}$ per totam chordae longitudinem extenditur, quum igitur praecipua quaeſtio ſuper chordis vibrantibus in hoc verſetur, vt tempora vibrationum definiamus, ipſas autem figuras, quas chorda inter vibrandum induit, parum morari ſoleamus, quaeſtio de motu vibratorio chordarum, ex quotcunque partibus diuerſae craſſitiei eae fuerint compoſitae, ſiue adeo craſſitiem habeant vtcunque variabilem, nunc quidem pro perfecte ſoluta erit habenda.

DE