



1773

## De chordis vibrantibus disquisitio ulterior

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

Record Created:

2018-09-25

---

### Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De chordis vibrantibus disquisitio ulterior" (1773). *Euler Archive - All Works*. 439.  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/439>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).

DE  
**CHORDIS VIBRANTIBVS**  
 DISQVISITIO VLTERIOR.

Auctore

L. E V L E R O.

**E**rfi in huiusmodi quaestionibus analyticis vix vilius locus controuersis relinqui videtur; tamen, quia determinatio omnium motuum, quos chorda inter vibrandum recipere potest, nouum plane calculi genus requirit, cui Geometrae parum adhuc sunt affueti, mirum non est, quod solutio completa, quam iam olim ex his principiis deductam dederam, plerisque non parum suspecta videatur. Quam ob rem hic operam dabo, vt omnia momenta, quibus haec solutio innititur, dilucide exponam atque ab omnibus dubiis et obiectionibus vindicem, et quoniam ista dubia perumque circa ipsam methodum, qua sum vsus, moueri solent, sufficet casum simplicissimum, quo chorda per totam longitudinem eiusdem crassitiei statuitur, omni studio euoluiffe. Praeterea vero omnes vibrationes tanquam infinite paruas spectabo, quae hypothesis ab omnibus, qui hoc argumentum tractarunt, est assumpta.

§. I. Primum ergo crassitiam et massam chordae, cuius motum hic sum inuestigaturus, ita ad calculum reuocabo, vt portionis istius chordae, cuius

ius longitudo  $=k$ , massam seu pondus statuat  $=K$ ; neque enim hic ipsam materiam, ex qua chorda est confecta, considerare opus est, dummodo chorda fuerit perfecte flexilis, quandoquidem totus motus tantum ab eius longitudo et massa, praecipue autem a vi tendente pendet; quod quidem nulli dubio est subiectum.

Tab. V.  
Fig. 1.

§. 2. Sit igitur chorda in punctis A et B fixa, cuius longitudinem ponamus  $AB = a$ ; cuius ergo massa seu pondus erit  $= \frac{K a}{k}$ ; tum vero sit tensa vi quacunque, quam ponderi  $= \pi$  aequalem statuamus; id quod etiam sequenti modo menti repraesentare licet; quod chorda vtrinque secundum ipsius directionem trahatur a viribus aequalibus  $A a = B b = \pi$ ; tum vero ut inter vibrandum ipsi termini A et B immoti maneant, necesse est, ut chorda in punctis A et B insuper certis viribus  $A \alpha$  et  $B \beta$  ad priores normalibus urgeatur, quae quidem vires per se non dantur, sed quouis momento ita comparatae esse debent, ut ambo chordae termini A et B in suo loco retineantur; perspicuum autem est, quamdiu chorda situm naturalem in directum extensum  $AB$  teneat, has vires fore nullas; dum autem verbi gratia sursum incuruatur in situm  $A y B$ , evidens est, vires illas  $A \alpha$  et  $B \beta$  deorsum tendere debere; neque vero opus esse, has vires nosse, sed deinceps per ipsam solutionem pro quouis chordae statu facile determinabuntur. Hac ratione clariorem ideam consequimur earum virium, quibus chorda in punctis A et B fixa retinetur.

§. 3.

§. 3. Ponamus iam tempore quocunque elapso  $= t$ , quod in minutis secundis dari sumimus, chordam nostram incuruatam esse in figuram  $AyB$ , pro qua vocemus coordinatas  $AX = x$ ; et  $XY = y$ ; ita, ut fit  $BX = a - x$ ; et quoniam omnes vibrationes pro infinite paruis habentur, omnes applicatae  $XY = y$  erunt quam minimae; unde statim duo insignia calculi subsidia adipiscimur: 1°) quod chordae portio  $AY$  ipsi abscissae  $AX = x$  aequalis cenferi potest; cuius propterea pondus erit  $= \frac{Kx}{k}$ . 2°) quod punctum chordae  $Y$  inter vibrandum alium motum recipere nequit, nisi qui fiat secundum ipsam directionem applicatae  $YX$ , dum scilicet ad situm naturalem  $AB$  accedit; sin autem inde recedit, directio motus erit contraria secundum  $Yv$ . His constitutis evidens est, angulos  $AYX$  vbique fore tantum non rectos, seu quod eodem redit, tangentem in puncto  $Y$  tantum non parallelam axi  $AB$ . Quamquam autem haec hypothesis statim, ac vibrationes non amplius sunt quasi infinite paruae, a veritate aberrare debet; tamen contra illam ab aduersariis nullum dubium moueri solet.

§. 4. Cum igitur ad quoduis tempus  $t$  figuram chordae  $AyB$  determinari oporteat; evidens est, applicatam  $y$  tanquam functionem binarum variabilium, temporis scilicet  $t$  et abscissae  $x$ , spectari debere, ex quo applicata duplicis differentiationis est capax; prouti scilicet vel solum tempus  $t$  vel sola abscissa  $x$  variabilis reputatur. Sumta scilicet abscissa  $x$  constante, illa functio indicabit quanta ad quod-

vis

vis tempus  $t$  futura sit puncti  $Y$  distantia ab axe  $AB$ , et post quantum tempus hoc punctum  $Y$  in locum pristinum reuertatur; unde tempora vibrationum diiudicare licebit; sumto autem tempore  $t$  constante eadem functio pro quavis abscissa  $AX = x$  praebebit quantitatem adplicatae  $XY = y$ , sicque indolem curuae  $AyB$  ad datam tempus declarabit.

§. 5. Sumamus autem praesenti tempore punctum chordae  $Y$  ab axe recedere atque eius celeritas formula  $(\frac{dy}{dt})$  exprimetur, cuius differentiale denovo per  $dt$  diuisum dabit ipsam accelerationem  $= (\frac{d^2y}{dt^2})$ ; quae ut cum grauitate naturali per unitatem expressa comparari possit, diuidi debet per  $z b$ , denotante  $b$  altitudinem, ex qua grauia vno minuto secundo delabuntur; ita, ut haec acceleratio futura sit  $= \frac{z}{b} (\frac{d^2y}{dt^2})$ ; cui ergo aequalis esse debet vis, qua hoc chordae elementum versus  $Y$   $v$  vrgetur, diuisa per pondusculum huius elementi: quare cum hoc pondusculum sit  $\frac{K dx}{k}$ ; elementum chordae  $Yy = dx$  in directione  $Yv$  sollicitari debet vi  $= \frac{K dx}{z b k} (\frac{d^2y}{dt^2})$ , tanta scilicet vi in singulis chordae elementis opus est, ut motus talis prodeat, qualem formulae analyticae complectuntur. Assumimus autem nostris formulis verum chordae motum definiri, sicque necesse est, ut singula chordae elementa in directione  $Yv$  sollicitentur.

§. 6. Cum autem tales vires reuera non adsint; necesse est, ut hae vires quasi fictae illis viribus,

bus, quibus chorda reuera sollicitatur, aequiualeant, sicque quaestio huc est perducta, quomodo illae vires inuentae, quas elementares vocabimus, quoniam singulis elementis adplicatae concipiuntur, comparatae esse debeant, vt viribus, quibus chorda actu sollicitatur, perfecte aequiualeant; siue si singulis chordae elementis eadem vires in directione contraria adplicatae concipiantur, necesse est, vt hae vires cum illis, quibus chorda actu sollicitatur, in aequilibrio consistant; sicque nostra quaestio ad investigationem status aequilibrii est perducta.

§. 7. Adplicemus igitur nostras vires elementares modo contrario, ita, vt nunc elementum chordae Y sollicitetur in directione Y U. Tab. V.  
Fig. 2.

$$vi = \frac{K dx}{abk} \cdot \left( \frac{d^2 y}{dt^2} \right)$$

et quia hae vires in aequilibrio consistere debent cum illis, quae chordam actu sollicitant et quae, vti vidimus, sunt 1<sup>o</sup>. vires tendentes  $A a = B b = \pi$  deinde vero vires illae incognitae  $A \alpha$  et  $B \beta$ , quas ponamus  $A \alpha = F$  et  $B \beta = G$  quae, certae erunt functiones temporis  $t$ , vti deinceps videbimus; ante omnia necesse est, vt omnium virium momenta, quae in punctum Y agunt, vtrinque se destruant, propterea quod chorda perfecte flexilis assumitur. Inuestigemus ergo momenta omnium nostrarum virium, quae a parte anteriore seu sinistra in punctum Y agunt, vt ea deinceps ad nihilum redigamus; tum enim ex altera parte dextrorsum momenta

sponte quoque evanescent, quia omnes vires sumtae simul in aequilibrio consistunt.

§. 8. Ad partem ergo finistram primum agit vis tendens  $A\alpha = \pi$ , cuius momentum in punctum  $Y$  est  $\pi y$  in sensum  $XA$ , alterius autem vis  $A\alpha = F$  momentum in sensum contrarium agens erit  $Fx$  atque in eundem sensum etiam agent omnes illae vires elementares versus axem vrgentes. Ad harum igitur momentum inuestigandum consideremus punctum  $Y$  tanquam fixum et spectemus punctum quodcumque  $y$  tanquam variabile a termino  $A$  vsque ad  $Y$  successive promovendum, pro quo puncto sint coordinatae

$$Ax = X, \text{ et } xy = Y$$

et vis elementaris secundum  $y$   $x$  vrgens

$$= \frac{\kappa dx}{2bk} \cdot \frac{d^2y}{dt^2},$$

cuius momentum in punctum  $Y$  prodit multiplicando per intervallum

$$xX = x - X,$$

ita, vt hoc momentum fit

$$\frac{(x-X)\kappa dx}{2bk} \cdot \frac{d^2y}{dt^2},$$

cuius integrale ob  $x$  constans erit

$$= \frac{\kappa x}{2bk} \int \frac{dx d^2y}{dt^2} - \frac{\kappa}{2bk} \int \frac{x dx d^2y}{dt^2}$$

et exprimit momentum virium elementarium ad arcum  $Ay$  applicatarum, siquidem haec integralia ita sunt capienda, vt evanescant, sumto  $X = 0$ . Promoveamus nunc punctum  $y$  vsque in  $Y$  atque mome-

momentum virium elementarium per totum arcum  $Ay$  adplicatarum erit

$$\frac{\kappa}{2bk} \left( x \int \frac{dx \cdot ddy}{dt^2} - \int \frac{x dx \cdot ddy}{dt^2} \right)$$

quod reducitur sponte ad hanc expressionem

$$\frac{\kappa}{2bk} \int dx \int \frac{dx \cdot ddy}{dt^2}$$

quae gemina integratio ita institui debet, vt sumto  $x = 0$  vtraque euanescat.

§. 9. His igitur momentis collectis, quia eorum summa ad nihilum redigi debet, consequimur sequentem aequationem:

$$\pi y = Fx + \frac{\kappa}{2bk} \int dx \int \frac{dx \cdot ddy}{dt^2}$$

quam vt a signis summatoriis liberemus, quae abscissam  $x$  tanquam variabilem inuoluunt, differentiemus posita sola  $x$  variabili et per  $dx$  diuidendo obtinemus

$$\pi \left( \frac{dy}{dx} \right) = F + \frac{\kappa}{2bk} \int \frac{dx \cdot ddy}{dt^2}$$

quae denuo simili modo differentiata suppeditat hanc aequationem satis concinnam

$$\pi \cdot \left( \frac{ddy}{dx^2} \right) = \frac{\kappa}{2bk} \left( \frac{ddy}{dt^2} \right).$$

Posito ergo breuitatis gratia

$$\frac{2bk \cdot \pi}{\kappa} = c^2$$

habebimus tandem istam elegantem aequationem

$$\left( \frac{ddy}{dt^2} \right) = c^2 \cdot \left( \frac{ddy}{dx^2} \right)$$

quae aequatio rectum motum, cuius chorda est capax, in se complectitur, ita, vt resolutio nostrae quaestionis ab integratione istius aequationis differen-



tialis secundi gradus pendeat, et quae a consuetis aequationibus huius ordinis hoc potissimum discrepat, quod hic functio binarum variabilium  $t$  et  $x$  quaeritur atque ob hanc ipsam circumstantiam ista quaestio ad novam illam calculi integralis partem est referenda, quae ad functiones duarum pluriumque variabilium est accommodata.

§. 10. Hic autem statim commodissime vstrum venit, ut istam aequationem perfecte integrare liceat, dum eius integrale completum reperitur

$$y = \Phi.(ct + x) + \Psi.(ct - x)$$

cuius veritas tentanti mox facile patebit; si enim huiusmodi functiones more iam recepto differentiemus; habebimus

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = c.\Phi'(ct + x) + c.\Psi'(ct - x)$$

$$\text{et } \frac{d^2y}{dt^2} = c^2.\Phi''(ct + x) + c^2.\Psi''(ct - x)$$

similique modo, sumendo solam  $x$  variabilem, erit

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \Phi'(ct + x) - \Psi'(ct - x)$$

$$\text{et } \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \Phi''(ct + x) + \Psi''(ct - x)$$

vnde manifesto fit

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = c^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

Hic iam probe notandum est, characteribus  $\Phi$  et  $\Psi$  functiones quascunque denotari siue regulares siue utcunque irregulares: quo ipso haec analyseos species ab ordinaria plurimum discrepat, quod hic adeo functiones utcunque irregulares et nulla continuitatis lege adstrictae ingrediantur; id quod in consueta

Ana-

Analyſi nuſquam uſu venire ſolet; quae quo clarius ob oculos ponantur, quoniam functiones per lineas curuas indicare Geometrae affueverunt, formula  $\Phi(ct + x)$  denotet adplicatam curuae cuiuscuſque abſciſſae  $ct + x$  respondentem; ſimilique modo formula  $\Psi(ct - x)$  denotabit adplicatam alius curuae cuiuscuſque abſciſſae  $ct - x$  respondentem atque ne- tiquam opus eſt, ut hae duae lineae curuae certa quadam aequatione analytica exprimi queant, verum etiam curuae ex portionibus variis diuerſarum curvarum utcuſque conſtatae atque adeo curuae libero manus ductu utcuſque formatae hic locum inveniunt; dummodo omnes partes inter ſe cohaereant et nuſquam hiatu abrumpantur. Nihil ergo impedit, quominus hae curuae ex pluribus lineis rectis inter ſe iunctis vel etiam arcubus circularibus aliarumue curuarum permixtis componantur.

§ II. Ob hanc ipſam autem circumſtantiam iſta mea ſolutio Illuſtri *D' Alemberto* aliisque Geometris maxime ſuſpecta videtur, qui in hoc negotio alias lineas curuas admittere non vult, niſi quae certis aequationibus analyticis exprimantur, quaeque continuitatis lege ſtricto ſenſu contineantur. Inprimis autem hinc portiones diuerſarum curvarum, quae in iuncturis angulis promineant, excludit, dum huiusmodi anguli naturae aequationis differentio-differentialis penitus aduerſari ipſi videntur; ſaepe equidem reſpondi, hic tales angulos, quales pertinet, nullo modo locum habere poſſe, quia hic tantum vibrationes infinite paruae ſpectantur, ubi,

vti iam notauimus, omnes tangentes tantum non axi debent esse parallelae, verum tamen hoc Viro Illustri nequiquam sufficere est visum atque etiam inclinationes adeo infinite paruas reformidat. Hanc autem litem equidem prorsus dirimere spero, si ostendero, angulos adeo maxime prominentes in curvis illis functiones  $\Phi$  et  $\Psi$  repraesentantibus negotium plane non turbare, id quod hoc solo exemplo probasse sufficiet. Functio scilicet  $\Phi$  eiusmodi linea curua regulari repraesentetur, cuius abscissae cuicunque  $u$  respondeat adplicata

$$\Phi u = \sqrt[3]{(a-x)^2 a};$$

Tab. V. cuius lineae forma ita erit comparata; est scilicet notissima parabola cubicalis Neiliana, quae adeo in puncto C cuspidem infinite acutam continet; interim Fig. 3. tamen haec cuspis nequiquam impedit, quominus ista functio aequationi nostrae satisficiat; sumpta enim abscissa  $u = ct + x$  vt habeamus saltem pro functione priore

$$y = \sqrt[3]{a(a-ct-x)^2}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{-2c \cdot \sqrt[3]{a}}{3 \sqrt[3]{(a-ct-x)^2}}$$

$$\text{et } \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{-2c^2 \sqrt[3]{a}}{9 \sqrt[3]{(a-ct-x)^3}}$$

similique modo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-2 \sqrt[3]{a}}{3 \sqrt[3]{(a-ct-x)^2}}$$

et

$$\text{et } \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{-2 \sqrt{a}}{9 \cdot \sqrt{(a - ct - x)^4}}$$

quibus formulis aequationi

$$\left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = c^2 \cdot \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)$$

perfecte satisfit; nequidem excluso casu  $a = ct + x$ , vbi cuspidis occurrit, ex quo sine dubio recte concludere licet, si cuspidis adeo negotium non turbat, multo minus angulosas prominentias easque adeo infinite paruas esse pertinendendas.

§. 12. His praenotatis integrale completum nostrae aequationis ad ipsum casum propositum chordae vibrantis accommodemus, vbi duabus conditionibus erit satisfaciendum. Primum scilicet vt in A, vbi  $x = 0$ , adplicata  $y$  semper euaneſcat pro omni tempore  $t$ ; deinde vt idem eueniat in altero termino B, vbi  $x = a$ . Prima autem conditio posito  $x = 0$  praebet

$$y = \Phi ct + \Psi ct$$

qui valor cum debeat esse  $= 0$ , necesse est, vt sit

$$\Psi ct = -\Phi ct$$

hoc est, curua functione  $\Psi$  repraesentanda ita esse debet comparata, vt adplicata eidem abscissae respondens negatiua sit illius, quae in curua  $\Phi$  eidem abscissae responderet, vnde sequitur, fore generatim

$$\Psi (ct - x) = -\Phi (ct - x);$$

vnde ista conditio nobis suppeditat hanc aequationem:

$$y = \Phi (ct + x) - \Phi (ct - x)$$

ſic

fic enim factò  $x = 0$ , manifesto prodit  $y = 0$ . Pro altera conditione faciamus nunc  $x = a$ ; iterumque fieri debet

$$\Phi(ct + a) - \Phi(ct - a) = 0 \text{ siue}$$

$$\Phi(ct + a) = \Phi(ct - a);$$

vnde si faciamus

$$ct - a = u; \text{ erit } ct + a = u + 2a,$$

ita vt in genere esse debeat

$$\Phi(u + 2a) = \Phi u.$$

Curua scilicet hac functione  $\Phi$  repraesentanda ita debet esse comparata, vt quaecunque adplicata respondeat abscissae  $u$ , eadem quoque respondeat omnibus abscissis

$$u + 2a; u + 4a; u + 6a; \text{ etc.}$$

itidemque retrogrediendo his abscissis

$$u - 2a; u - 4a; u - 6a \text{ etc.}$$

ex quo intelligitur, quemadmodum hanc curuam in infinitum continuari oporteat. Talem ergo curuam  
 Tab. V  
 Fig. 4 sequenti modo construi conueniet; super portione axis  $AC = 2a$  construat pro lubitu linea curua quaecunque  $FC$ , ita tamen, vt adplicata  $CG$  aequalis fiat adplicatae  $AF$ , tum vero eadem haec curua  $FG$  ultra  $C$  dextrorsum describatur, similique modo etiam sinistrorsum ab  $F$  ita, vt singulis axis portionibus  $= 2a$  similes et aequales portiones curuae  $FG$  superstruantur; hacque sola circumstantia obseruata descriptio curuae  $FG$  penitus nostro arbitrio

trio relinquitur atque siue ex pluribus lineis rectis siue ex arcibus quarumcunque curuarum siue libero manus tractu vtcunque delinearipotuerit, dummodo vtrinque prouti modo innuimus continuetur.

§. 13. Tali autem linea curua, quam scalam constructionis adpellare liceat, erecta, semper certus quidam motus vibratorius chordae sequenti modo facillime definietur, dum scilicet figura chordae, quam ad quoduis tempus  $t$  est habitura, assignabitur. Cum enim  $c$  lineam quandam rectam,  $t$  vero numerum absolutum denotet, sumatur ab axis puncto  $A$  interuallum  $AT = ct$ , et ab hoc puncto  $T$  vtrinque abscindantur interualla  $TS = Ts = x$  et adplicatae  $SZ$  et  $sz$ ; quo facto pro figura chordae nostrae abscissae  $AX = x$  respondebit adplicata  $XY = SZ - sz$  quia in scala nostra est  $AS = ct + x$  et  $As = ct - x$ ; hic autem per se clarum est, pro ipso termino chordae  $A$ , vbi  $x = 0$ , ideoque et  $TS = 0$ ;  $ts = 0$ , adplicatam fore  $= TV - TV = 0$ . Pro altero autem termino  $B$ , vbi  $x = a$ , ideoque etiam capi oportet  $TS = ts = a$ , adplicatae  $SZ$  et  $sz$  vtique erunt aequales, quandoquidem tum interuallorum  $AS$  et  $As$  distantia est  $2a$ , consequenter earum differentia  $= 0$ , pro chorda adplicatam in termino  $B$  praebens; quare cum hoc modo ad quoduis tempus figura chordae facillime assignetur, totus chordae motus perfecte innotescit.

§. 14. Quoniam in scala abscissis interuallo  $= 2a$  continuo crescentibus aequales adplicatae re-  
 Tor, XVII. Nou. Comm. D d d spon-

spondent; manifestum est, pro alio tempore  $t'$  si fuerit  $c t' = c t + 2 a$ , chordam eandem figuram esse recuperaturam, quam tempore  $t$  habuerat; interea vero chorda duas vibrationes absoluisse censetur ita, ut  $t' - t$  exhibeat tempus duarum vibrationum; quia autem  $t' - t = \frac{2a}{c}$  tempus unius vibrationis erit  $= \frac{a}{c}$  idque iam in minutis secundis expressum, atque hic commodissime usu venit, ut tempus cuiusque vibrationis neququam pendeat ab indole figurarum, quas chorda inter vibrandum induit, sed semper simplicissima hac formula  $\frac{a}{c}$  exprimatur. Cum vero supra posuissimus  $c^2 = \frac{2 b k \cdot \pi}{K}$ ; nunc patet tempus unius vibrationis fore  $\frac{a \cdot \sqrt{K}}{\sqrt{2 b k \cdot \pi}}$  sicque pro chordis eiusdem crassitiei, pro quibus scilicet  $\frac{K}{k}$  eundem obtinet valorem, tempora vibrationum erunt uti  $\frac{a}{\sqrt{\pi}}$ ; hoc est, inter se tenent rationem compositam ex simplici longitudinum et reciproca subduplicata virium tendentium, quae quidem ratio iam dudum est cognita et per experimenta confirmata. Praeterea quoniam soni a chordis editi ex numero vibrationum dato tempore absolutarum aestimari solent; hic notasse iuuabit, numerum vibrationum a nostra chorda singulis minutis secundis editarum fore  $= \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2 b k \cdot \pi}}{a \sqrt{K}}$  sicque ipsi soni tenent rationem compositam ex directa subduplicata tensionum  $\pi$  et reciproca simplici longitudinum  $a$ .

§. 15. Si in superioribus formulis ponamus tempus  $t = 0$ ; reperiemus ipsam figuram, quam chorda

chorda initio habuerit, pro qua igitur abscissae  $x$  respondet adplicata

$$y = \Phi. x - \Phi. - x$$

vnde vicissim ex figura chordae initiali iam quodammodo natura scalae constructionis colligi poterit; neque tamen penitus inde determinatur, cuius ratio per se est manifesta, quoniam in statu initiali praeter figuram etiam motus, qui chordae potuit esse impressus, spectari debet, ita, vt status initialis duabus rebus contineatur; primo scilicet figura chordae inducta, deinde etiam motu, qui ipsi fuerit impressus. Quo igitur huius circumstantiae rationem teneamus, ex formulis generalibus celeritatem chordae puncti  $Y$  deriuemus, quae erit

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = c \Phi'(ct + x) - c \Phi'(ct - x)$$

qua exhibetur celeritas puncti  $y$  ab axe recedentis atque ipsa celeritas per spatium vno minuto percurrendum indicatur.

§. 16. Vt igitur vniuersam nostram inuestiga- Tab. V.  
tionem ad statum chordae initialem atque cognitum Fig. 5.  
adcommodemus, referat  $A Y B$  figuram chordae ini-  
tialem et ponamus adplicatam abscissae  $x$  responden-  
tem  $X Y = \Gamma. x$ ; deinde pro motu initiali super  
eodem axe  $A B = a$  extruatur scala celeritatum  
 $A Z B$ , cuius quaelibet adplicata  $X Z$  exhibeat cele-  
ritatem, qua punctum chordae ab axe recedit, quae  
cum etiam sit certa functio abscissae  $A X = x$ , re-  
praesentetur functione  $\Delta' x$ ; nunc igitur necesse est,  
vt. pro nostris formulis generalibus fiat

$$D d d a$$

$$\Phi x$$



$$\Phi x - \Phi. - x = \Gamma. x$$

similique modo pro celeritate, facto ibi  $t = 0$

$$c \Phi' x - c \Phi'. - x = \Delta' x$$

quam posteriorem aequationem per  $dx$  multiplicando et integrando reducimus ad hanc formam:

$$c \Phi x + c \Phi. - x = \Delta. x + f$$

vbi  $\Delta x$  exprimit aream curvae  $A X Z$ , sicque erit

$$\Phi x + \Phi. - x = \frac{\Delta x}{c} + f = \text{areae } \frac{A X Z}{c}.$$

Nunc igitur ex his duabus aequationibus primum elicimus

$$2 \Phi x = \Gamma x + \frac{\Delta x}{c} + f$$

$$\text{et } 2 \Phi. - x = \frac{\Delta x}{c} - \Gamma x + f.$$

Hunc in finem in fig. 5 super axe  $A B$  insuper describatur curua  $M O N$  sumendo primam adplicatam  $A M$  arbitrariae longitudinis  $= f$  et pro abscissa  $x$  fiat

$$X O = f + \text{area } \frac{A X Z}{c}.$$

§. 17. Iam ex ista figura 5. scala constructionis facile sequenti modo extruetur: cum enim sit

$$\Phi x = \frac{1}{2} x O + \frac{1}{2} X Y \text{ et } \Phi. - x = \frac{1}{2} x O - \frac{1}{2} X Y;$$

primo sumto  $x = 0$ , erit in  $A$  adplicata

$$A a = \frac{1}{2} A M;$$

Tab. V. deinde sumtis vtrinque  
Fig. 6.

$$A X = A X' = x,$$

ita, vt sit proprie

$$A X' = -x;$$

erit

erit pro  $x$  adplicata

$$Xx = \frac{1}{2}xO + \frac{1}{2}XY$$

et pro altera

$$X'a' = \frac{1}{2}xO - \frac{1}{2}XY$$

ac denique sumtis vtriusque abscissis

$$AB = a = AA'$$

tum fiet adplicata in puncto  $B = \frac{1}{2}BN$  et

$$Aa' = BN$$

sicque adplicatae extremæ  $Bb$  et  $A'a'$  fiant inter se aequales, sicque tota haec curua basi

$$A'B = 2a$$

institens ex statu chordae initiali plene est constructa; et nihil aliud superest, nisi vt haec ipsa curua  $a'b$  replicetur tam dextrorsum, quam sinistrorsum, quoties libuerit; hocque modo tota scala constructionis conficietur, ex qua deinceps ad quoduis tempus figura chordae innotescet.

§. 18. Postquam igitur ipsum chordae motum determinauimus: nunc vires illas initio memoratas  $A\alpha$  et  $B\beta$ , quae ad retinendos chordae terminos  $A$  et  $B$  immotos requiruntur et quae erant incognitae, definire poterimus. Quem in finem cunctas vires singulis chordae punctis  $X$  adplicatas propius perpendamus. Supra autem §. 8. vidimus a parte sinistra in punctum  $Y$  agere vires sequentes 1<sup>o</sup>. vim tendentem  $Aa = \pi$  2<sup>o</sup>. vim illam incognitam  $A\alpha = F$  et 3<sup>o</sup>. omnes vires elementares portioni  $Ay$  ad-

D d d 3

plica-

plicas, quarum cum quaelibet fit  $= \frac{\kappa dx}{a b k} \cdot \frac{d d y}{d t^2}$ ,  
 omnium summa erit

$$\frac{\kappa}{a b k} \int \frac{d x \cdot d d y}{d t^2} = \pi \int d x \frac{d d y}{d x^2}$$

cuius integrale est

$$\pi \cdot \frac{d y}{d x} + \text{Const.}$$

quae ita debet esse comparata, vt integrale euanescat  
 sumto  $x = 0$ . Deinde etiam harum virium mo-  
 menta pro puncto Y sumus contemplati; ac primae  
 vis A a  $= \pi$  momentum erat  $\pi y$ ; vis autem F mo-  
 mentum in sensum contrarium ageus F x, cui ad-  
 iungi debet momentum ex omnibus viribus elemen-  
 taribus ortum

$$= \frac{\kappa}{a b k} \int d x \frac{d d y}{d t^2} = \pi \int d x \left( \frac{d y}{d x} + \text{Const.} \right) = \pi (y + C x).$$

Cum igitur iam inuentum fit

$$y = \Phi (c t + x) - \Phi (c t - x)$$

$$\text{erit } \frac{d y}{d x} = \Phi' (c t + x) + \Phi' (c t - x)$$

vnde summa illa virium elementarium ob

$$\frac{d y}{d x} + C = \Phi' (c t + x) + \Phi' (c t - x) - 2 \Phi' c t$$

$$\text{erit } = \pi [\Phi' (c t + x) + \Phi' (c t - x) - 2 \Phi' c t].$$

Progenita autem inde momenta iam erunt, vis ten-  
 dentis  $\pi$  momentum

$$= \pi (\Phi (c t + x) - \Phi (c t - x))$$

alterius autem vis F momentum  $= F x$ ; virium au-  
 tem elementarium momentum

$$\pi (\Phi (c t + x) - \Phi (c t - x) - 2 x \Phi' c t)$$

quae

quae duo posteriora in contrarium sensum vrgent et quia se mutuo destruere debent, nascitur haec aequatio

$$\begin{aligned} & \pi (\Phi (ct + x) - \Phi (ct - x)) \\ & = Fx + \pi (\Phi (ct + x) - \Phi (ct - x) - 2x \Phi' ct) \end{aligned}$$

vnde manifesto innotescit vis illa incognita

$$F = 2\pi \Phi' ct$$

cui autem non aequabitur vis in altero termino  $B\beta = G$  quandoquidem adplicata  $y$  pro abscissa  $Bx = a - x$  alia functione exprimitur. Hanc autem vim  $G$  simili modo per sequens ratiocinium colligere poterimus, quod omnium virium elementarium per totam chordam  $Ay$  adplicatarum summa erit

$$\pi (\Phi' (ct + a) + \Phi' (ct - a) - 2\Phi' ct) - G$$

quae cum debeat esse  $= 0$ ; concludimus fore

$$G = \pi (\Phi' (ct + a) + \Phi' (ct - a) - 2\Phi' ct).$$

§. 19. Haecenus igitur solutionem sequentis problematis generalis tradidimus:

### Problema generale.

*Dato statu initiali chordae uniformiter crassae tam ratione figurae, quam ratione motus ipsi impressi, definire ad quoduis tempus figuram, quam chorda deinceps est habitura, quatenus scilicet eius vibrationes fuerint quam minimae.*

Perspicuum autem est, solutionem, quam dedimus, non solum esse admodum facilem et concinnam, sed etiam naturae quaestionis admodum  
con-

conformem, quandoquidem ad omnes status initialis est adcommodata, dum aliae solutiones, quae plerumque prodierunt, tantum ad certas curvarum species, ad quas chorda inter vibrandum se componere potest, sunt restrictae. Nemo autem negare potest, quin status initialis chordae penitus a nostro arbitrio pendeat nec quisquam ostendere est conatus, quod chorda semper se ad illas curvarum species formare debeat, postquam ipsi initio aliae figurae fuerint impressae; quia etiam ipse Illustr. *D' Alembertus* hoc negotium non suscepit, sed potius declaravit, illis casibus, quibus chordae initio figurae ab illis curvis discrepantes fuerint inductae, motum secuturum ope Analyseos plane assignari non posse; quod equidem de Analyse ordinaria facile concedo; atque in hoc ipso non parum mihi praestitisse videor, quod novum illud Analyseos genus, quod circa functiones duarum variabilium versatur, felici successu ad motum chordarum applicuerim. Ut autem omnibus plane dubiis occurram, aliquot casus simplicissimos, qui Analyse refragari videntur, euoluam ac deinde ostendam, meam solutionem non solum experientiae, sed et omnibus motuum principis perfecte esse consentaneam.

#### Casus primus.

Tab. V. Si chorda initio a statu naturali  $AB$  ita fuerit diducta, ut triangulum isosceles  $ADB$  constituat, cuius quidem altitudo  $CD$  fuerit quam minima, hincque subito dimittatur, ut motum a quie-

a quiete incipiat, intuenire eius motum vibratorium.

### Euolutio.

§. 20. Cum ergo initio omnia chordae elementa fuerint in quiete et singula puncta in utroque latere  $A D$  et  $B D$  nullis plane viribus sollicitentur, quoniam tensiones chordae vbique sunt aequales et contrariae, euidens est, primo instanti omnia haec puncta nullum motum adipisci, sed in quiete esse permanfura; solum supremum elementum in apice  $D$  situm ob tensionem chordae vtriusque oblique sollicitatur, secundum directiones  $DA$  et  $DB$ ; inde ergo vtriusque nascetur vis secundum directionem  $DC$  sollicitans, ex quo punctum  $D$  reuera in directione  $DC$  moueri incipiet, dum omnia reliqua chordae puncta adhuc in quiete perseverant. Statim autem atque hoc punctum  $D$  moueri incipiet ac primo quasi instante ad  $G$  vsque peruenerit, nunc puncta illa  $E$  et  $F$  ad motum concitari incipient, propterea quod tensiones vtriusque circa haec puncta non amplius in aequilibrio sunt posita, dum reliqua puncta ab  $E$  versus  $A$  et a  $F$  versus  $B$  etiam nunc manent immota. Puncta autem in spatiolo  $E G F$  sita, quia non amplius sollicitantur, motu iam acquisito versus axem  $AB$  properabunt, sicque de nouo quopiam tempusculo elapso chordae inducetur figura  $A e f B$ , hocque modo tandem ad statum naturalem  $AB$  perueniet; vnde simili modo in plagam oppositam extrauagabitur.

§. 21. Qui haec attentius perpendere voluerit, sine dubio concedere cogetur, chordam tali modo, vt diximus, ad motum se esse composituram. Videamus ergo, cuiusmodi motum solutio nostra generalis sit praebitura; si enim ea ad similem plane motum perduxerit; dubitari certe amplius non poterit, quin ea sit veritati consentanea. Sin autem alium atque diuersum motum inde inuenerimus: tum ea sine dubio pro suspecta haberi potest.

§. 22. Quia omnes celeritates initiales euanescent sicque scala celeritatum in ipsum axem  $AB$  incidit, etiam areae illae  $AXZ$  (fig. 5.) euanescent hincque linea illa  $FVG$  erit recta axi  $AB$  parallela ab eoque interuallo arbitrario  $AF = CG$  remota; ex quo scala constructionis sequenti modo erit comparata. Scilicet super interuallo principali  $AB$  existit etiam  $\Delta$  isosceles  $aab$ , cuius altitudo tantum semissis est figurae initialis  $CD$ . Interuallo autem  $AA'$  sinistrorsum simile  $\Delta$  isosceles situ inuerso imminet  $a'a'a$  atque hoc modo dextram versus super interualla aequalia similia triangula alternatim deorsum et sursum vergentia extrui debent atque ex hac scala vtique pro  $t = 0$  ipsa figura initialis resultat.

Tab. V. §. 23. Quoniam hic tempus vnus vibrationis  
Fig. 8. habetur  $= \frac{a}{c}$ ; sumto interuallo  $AT = ct = a$ ,  
punctum  $T$  incidet in ipsum punctum  $B$ , vnde figura chordae similis prodiret initiali, sed in plagam oppositam versa, vti natura vibrationum exigit;  
tempo-

tempore autem medio, quo  $t = \frac{a}{2c}$ , punctum illud T in scala constructionis sub ipso apice erit situm; hicque manifestum est, pro figura chordae omnes adplicatas in nihilum esse abituras seu momento hoc medio chorda per ipsum statum naturalem transit, id quod etiam nulli dubio est obnoxium.

§. 24. Quaeramus vero figuram chordae pro tempore  $t = \frac{a}{4c}$ ; ita, vt sit  $AT = ct = \frac{a}{4} = \frac{1}{4} AB$  et quamdiu abscissae  $x$  sunt minores, quam  $AT = \frac{1}{4} a$ , adplicatae  $y$  continuo crescere debent ideoque tantum, quantum in figura initiali a puncto A incresebant; simulac vero abscissa  $x$  euadit  $= \frac{1}{4} a$ , adplicata  $y$  aequabitur dimidiae altitudini figurae initialis. Nunc igitur capiatur abscissa  $x$  maior, quam  $\frac{1}{4} a$ , ac facile patebit, adplicatas  $y$  prodire inter se aequales et quidem  $= m a - A a$ ; quod euenit, donec fiat  $x = \frac{3}{4} a$ , sicque per hoc spatium portio chordae parallela erit axi AB; sin autem  $x > \frac{3}{4} a$ ; adplicatae denuo decrescunt vniformiter, donec in ipso termino B euanescunt. Consequenter elapso tempore  $t = \frac{a}{4c}$ ; chorda figuram habebit A E T B cum figura initialis fuisset A D B, ita, vt crura illa A D et B D in punctis E et F bisecentur et portio E F axi sit parallela; patet igitur, quod initio monuimus, solam chordae portionem E F hucusque esse promotam; portiones autem extremas A E et B F etiamnum mansisse immotas; qui ergo motus cum extra omnem dubitationem sit positus; soliditatem nostrae solutionis generalis maxime

Tab. V.  
Fig. 2.



confirmat, ita, vt nunc quidem nulli iam dubio locus relinqui videatur.

§. 25. Statim quidem oblicietur, cum initio chorda in angulum  $A D B$  fuerit efformata, hunc angulum in sequentibus vibrationibus continuo magis magisque obtusum fieri; ac fortasse adeo ad experientiam prouocabitur, quod equidem negare nequam sustineo; verum hic probe obseruari conueniet, in nostro calculo chordam perfecte flexibilem esse assumptam, ita, vt flexurae angulosae nequam resistat. Cum autem nulla chorda ex quacunque materia confecta plane omni rigore sit destituta; huic ipsi causae vtique erit adscribendum, si illi anguli inter vibrandum continue magis obtunduntur neque ergo hoc etiamsi experientiae fuerit consentaneum, nostrae methodo vllam vim inferre potest, vt eius soliditas inde suspecta reddi queat.

### Casus secundus.

Tab. V. Si initio non tota chorda  $A B$ ; sed tantum  
Fig. 20. eius semissis  $A C$  in figuram trianguli isoscelis  $A C d$  diducatur; altera parte  $C B$  manente immota, tum vero chorda subito ex hoc statu remittatur; inuestigare eius motum tremulum secuturum.

### Euolutio.

§. 26. Hic casus eo magis est memoratu dignus, quod non solum Ill. *d' Alembertus*, sed etiam alii, qui idem argumentum tractauerunt, istum casum  
sum

sum non sunt ausi attingere, eumque a seo *Ara'y* aduersari sunt arbitrati. Ante autem quam eius evolutionem suscipiamus, populari ratiocinio vtentes videamus, cuiusmodi motus insequi debeat ac primo quidem cum chorda ipso initio fuerit in quiete, euidens est, haec duo tantum puncta *d* et *C* ad motum sollicitari, propterea quod in omnibus reliquis chordae punctis tensiones vtrique se in equilibrio seruant; hinc ergo punctum *d* axem *AB* versus vrgebitur, punctum *C* vero ab axe sursum detorquebitur, quoniam alium motum nisi in directione ad axem normali recipere nequit. Sequentibus vero porro temporis punctis continuo maior trianguli *A d C* portio ad axem accedet, simul vero alterius partis *C d* portio quaedam supra axem eleuabitur, et sic mox vndatio sursum vergens *A d C* vsque ad alterum terminum *B* propagabitur, quae cum negari nequeant, videamus, qualem motum nostra solutio producere debeat.

§. 27. Quia primo instanti chorda motum ex quiete incepit, scala constructionis ita erit comparata, vti figura exhibet, scilicet interuallo *AB*, quo ipsa chorda refertur imminebit scala  $\alpha \delta \gamma \epsilon \beta$ , si- Tab. V.  
milis plane ipsi figurae initiali, triangulo nimirum Fig. 12.  
isofcele  $\alpha \delta \gamma$  et reliqua portione recta  $\gamma \beta$  consistens, hoc solo discrimine, quod hic trianguli altitudo duplo minor est, quam in figura initiali; at vero sinistrorsum eadem figura situ inuerso est delineanda, ita, vt portioni axis *A-C* immineat  $\Delta \alpha \delta \epsilon$   
E e e 3 deorsum

deorsum vergens; reliqua parte  $c^a$  existente recta, axi parallela; quo facto haec figure  $a c b \dots \beta$  axi  $\mathcal{A} B = 2 a$  insistens replicetur dextrorsum, quousque libuerit; singula porro interualla  $\mathcal{A} A$ ,  $A B$ ,  $B B'$  in quaternas partes secentur, quo facilius status chordae sequentes scrutari valeamus.

§. 28. Cum tempus vnus vibrationis supra sit inuentum  $= \frac{a}{c}$ , ipsa chordae longitudo  $A B = a$ , tempus vnus vibrationis exhibere censeatur, ideoque quartae illae partes in figura expressae etiam quartam partem durationis vnus vibrationis exhibebunt atque hinc ad temporis momenta ab initio elapsa  $\frac{1}{4} a$ ;  $\frac{2}{4} a$ ;  $\frac{3}{4} a$  et  $a$  figuram chordae exploremus.

Tab. V.  
Fig. 12.

§. 29. Pro tempore igitur  $= \frac{1}{4} a$  adplicata illa  $T V$  (fig. 4) in puncto  $D$  erit accipienda, et cum semper pro abscissa  $x = 0$  adplicata in ipsa chorda etiam sit  $= 0$ ; pro abscissa  $x = \frac{1}{4} a = A D$  adplicata erit  $C \gamma - A a = 0$  vnde patet, chordam ab  $A$  vsque ad  $D$  in ipsum axem incidere. Tum vero capiatur  $x = \frac{2}{4} a = A C$ ; atque in scala relationis adplicatae a  $T V$  vtrinque hoc interuallo distantes erunt  $E \varepsilon$  et  $\mathcal{D} d$ ; vnde pro figura chordae adplicata erit  $E \varepsilon = \mathcal{D} d = C c$ , ita, vt iam  $D c$  sit portio chordae; porro sumamus  $x = \frac{3}{4} a = A E$  atque in scala relationis a puncto  $D$  vtrinque capiantur tanta interualla  $D B = D \mathcal{C} = \frac{3}{4} a$  et iam nostra adplicata erit  $B \beta - \mathcal{C} c = 0$ , ita, vt in hoc loco punctum chordae iterum in axem incidat; denique pro

pro abscissa  $x = a$  in scala relationis a puncto D abscindantur vtrunque interualla  $DD' = D\epsilon = a$ ; et iam adplicatarum differentia in his punctis  $D'\epsilon - \epsilon\delta = 0$ ; hinc igitur cognoscimus elapso tempore  $= \frac{1}{2}a$  figuram chordae ita fore comparatam, vt vtrunque per interualla AD et BE chorda cum ipso axe conueniat; per interuallum autem DE triangulum isosceles sursum formet ACE cuius autem altitudo Cc duplo erit minor, quam in statu initiali; ita, vt vndatio vsque in spatium DE fit promoti.

§. 30. Elapsum iam ab initio sit tempus  $= \frac{1}{2}a$  et nunc adplicata illa TV constituenda erit in puncto C, a quo puncto successiue vtrunque capi debent interualla  $\frac{1}{4}a$ ;  $\frac{1}{2}a$ ;  $\frac{3}{4}a$  et  $a$  ac primo pro  $x = \frac{1}{4}a$  habebimus in scala relationis adplicatas Eε et Dδ, quarum differentia  $E\epsilon - D\delta$  fit negatiua siue pro abscissa  $x = \frac{1}{4}a$  ostendit adplicatam deorsum versam; quae iterum erit duplo minor, quam in figura initiali. Capiatur nunc  $x = AC = \frac{1}{2}a$  et in scala constructionis habebuntur binae adplicatae Bβ et Aα, quarum differentia euanescit, ita, vt in puncto C chordae adplicata iterum euanescat, ita, vt hic Δ isosceles sub axe deorsum sit versum. Porro sumto  $x = \frac{3}{4}a$ , in scala constructionis habebuntur adplicatae Dε' et Dδ, quarum differentia erit positiua et duplo minor altitudine trianguli in figura initiali. Quocirca elapso tempore  $= \frac{1}{2}a$  chorda in duo triangula isoscelia erit inflexa, priore deorsum, posteriore vero sursum vergente.

Tab. V.  
Fig. 13.

§. 31.

§. 31. Elapsum iam ab initio sit tempus  $= \frac{3}{4}a$ , et nunc adplicata  $TV$  statuenda erit in  $E$ ; hinc pro figura chordae sumatur primo  $x = \frac{1}{4}a$  et in scala constructionis habebimus binas adplicatas  $B\beta$  et  $C\gamma$ , quarum differentia  $= 0$  ostendit portionem chordae  $AD$  in ipso axe fore sitam; capiatur porro  $x = \frac{1}{2}a = AC$ , et in scala constructionis habebuntur binae adplicatae  $D'\epsilon'$  et  $D\delta$ , quarum differentia negativa aequabitur semissi altitudinis trianguli in figura initiali. Sumto autem  $x = \frac{3}{4}a$ , binae adplicatae in scala erunt  $C'\gamma'$  et  $A\alpha$ , quarum differentia  $= 0$  ostendit chordam in  $E$  in axem incidere pariter atque per totum intervallum residuum  $EB$  sicque manifestum est, hanc figuram similem prorsus esse illi, quam pro tempore elapso  $x = \frac{1}{4}a$  inuenimus; nisi quod haec situm inuersum teneat.

§. 32. Elapsum denique sit ab initio tempus  $= a$ , ita, vt hic figura chordae circa finem primae vibrationis sit definienda et nunc adplicata illa  $TV$  incidet in  $B$ , ex quo ergo vtrinque abscindamus intervalla  $\frac{1}{4}a$ ;  $\frac{1}{2}a$  et  $\frac{3}{4}a$ . Nunc ergo pro  $x = \frac{1}{4}a$  in scala habebimus binas adplicatas  $D'\epsilon'$  et  $E\epsilon$ , quarum differentia  $= 0$  praebet pro chorda  $y = 0$ . Sit nunc  $x = \frac{1}{2}a$  et binae adplicatae in scala erunt  $C'\gamma'$  et  $C\gamma$  quarum differentia iterum  $= 0$  praebet  $y = 0$ , ita, vt iam tota prior semissis chordae in ipsum axem incidat. Verum sumto  $x = \frac{3}{4}a$ ; binae adplicatae scalae erunt  $B'\delta'$  et  $D\delta$ , quarum differentia est negativa atque ipsi altitudini trianguli in

Tab. V.  
Fig. 15.

in statu initiali aequalis; ex quo patet, hanc chordae figuram prorsus similem et aequalem esse ipsi figurae initiali, nisi quod eius situs sit inuersus; et cum iam prima vibratio sit terminata, etiam sequens motus per se cognoscetur; ita, vt superfluum foret has determinationes vltius profequi.

§. 33. Omnino igitur nostra euolutio motum ostendit illi, quem coniectura collegimus, conformem; ita, vt hinc nullum amplius dubium contra hanc solutionem moueri possit; quare cum iste casus maxime aduersari sit visus, eo iam felicissime expedito meam theoriam de chordis vibrantibus abunde extra omnem dubitationem collocasse mihi equidem videor; atque adeo spero, in posterum omnibus obiectionibus sufficienter esse responsum, ita, vt superfluum foret, plures adhuc casus simili modo euoluere.