1773

Dilucidationes de tautochronismo

Leonhard Euler

DILVCIDATIONES DE TAVTOCHRONISMO.

Auctore

L. EVLERO.

Postquam olim curuas Tautochronas in fluido, cuius resistentia quadrato celeritatis proportionalis est, post plures irritos conatus elicuissem easque summus Geometra beatae memoriae *Iohannes Bernoulli* calculo suo quoque comprobasset, totum hoc argumentum in Mechanicae meae Volumine secundo fusius sum persecutus et quoniam pro descensu et ascensu Tautochronae reperiuntur diuersae ideoque ad praxin sunt inutiles, plurimum operae impendi, vt curuas duabus partibus similibus constantes inuestigarem, super quibus non quidem descensus vel ascensus seorsim forent isochroni, sed potius integrae oscillationes aequalibus temporibus absoluerentur, quod autem negotium ob summas calculi difficultates mihi non nisi pro fluidis rarissimis successit, ita vt curua, quam ibi sum adeptus, maxi[illegible]m fructu loco cycloidis in praxi adhiberi posse videatur, tum vero etiam pro aliis resistentiae hypothesibus, vel cubo, vel biquadrato vel alii cuicunque potestati celeritatis proportionalibus frustra tautochronas anquisiui, interim tamen pro casibus, vbi hae resistentiae fuerint

fuerint quam minimae, mihi licuit tautochronas tam pro descensu, quam pro ascensu assignare, neque vero deinceps has inuestigationes vlterius sum prosecutus. Deinde autem longo post temporis interuallo insignis Geometra Gallus Fontaine felicissimo successu per methodum ingeniosissimam ostendit, meas Tautochronas pro resistentia quadrato celeritatis proportionali etiamnunc locum habere, si insuper resistentia ipsi celeritati proportionalis accesserit, qua inuestigatione ardua ista de Tautochronis quaestio plurimum est illustrata. Aliquot autem abhinc annis Viri Celeberrimi *d'Alembert et la Grange* hanc quaestionem denuo insigni studio sunt aggressi, quaestionem autem ipsam ita inuerterunt, vt non pro certa quadam resistentiae hypothesi in Tautochronas inquirerent, sed vicissim eiusmodi resistentiae leges inuestigarent, pro quibus ipsis Tautochronas exhibere liceret, neque tamen ipsis licuit pro vlla hypothesi simpliciori, qua resistentia potestati cuipiam celeritatis esset proportionalis, praeter rationem simplicem et duplicatam celeritatum optatum scopum attingere. Interim tamen summo ardore eorum Analysin sum perscrutatus et ingeniosissima artificia, quibus sunt vsi, admiratus, calculis enim subtilissimis et maxime lubricis omnia sunt referta, vt non nisi summa adhibita attentione perspici queant; quae autem sunt praestita, mihi quidem sine tantis calculi tricis multo faciliori negotio expediri posse videntur, quam ob rem quae de hoc argumento sum meditatus ob rei dignitatem hic breuiter ſum expoſiturus.

Tab. IV. Fig. 7. §. 1. Sit A M E curua, ſuper qua fiant ſiue deſcenſus ſiue aſcenſus; A P axis verticalis; A M arcus quicunque $= s$; eique abſciſſa reſpondens $\mathrm{AP} = x$; ita, vt aequatio inter x et s definiat naturam curuae. Tum vero ſit celeritas corporis in $\mathrm{M} = u$, et tempus, quo arcus A M abſoluitur, $= t$, ita, vt ſemper habeatur $dt = \frac{ds}{u}$. Iam ſi corpus a ſola grauitate vrgeretur; haberetur vtique $u\,du = -g\,dx$; denotante g quantitatem grauitatis. At ſi corpus inſuper patiatur reſiſtentiam quamcunque, quae ſit $= \mathrm{R}$, quam in genere ſpectemus, vt functionem quamcunque binarum variabilium u et x ſiue u et s, quandoquidem x ab s pendere concipitur; tum, vti conſtat, pro motu deſcenſus valebit haec aequatio

$$u\,du = -g\,dx + \mathrm{R}\,ds;$$

pro motu autem aſcenſus haec:

$$u\,du = -g\,dx - \mathrm{R}\,ds.$$

Quodſi ergo ipſa curua cum reſiſtentia detur, celeritatem u ex hac aequatione definiri oportebit

$$u\,du = -g\,dx \mp \mathrm{R}\,ds$$

vbi ſignum ſuperius aſcenſum, inferius vero deſcenſum innuit. Inuenta autem celeritate tempus determinari debebit ex hac aequatione $dt = \frac{ds}{u}$.

§. 2. Sin autem viciſſim ipſum tempus t proponatur, functione quacunque binarum variabilium

u et s

u et s expreſſum; tum ipſam curuam vna cum reſiſtentia ſequenti modo inuenire licebit: differentiata ſcilicet forma pro tempore t propoſita prodeat

$$dt = M\,ds + N\,du,$$

et quia $dt = \frac{ds}{u}$ habebitur iſta aequatio

$$M\,ds + N\,du = \frac{ds}{u}$$

hincque

$$u\,du = \frac{ds.(1 - Mu)}{N},$$

quae forma cum hac

$$u\,du = -g\,dx \mp R\,ds$$

comparata praebet

$$-g\,dx \mp R\,ds = \frac{ds(1 - Mu)}{N},$$

quae aequatio poſito $g\,dx = S\,ds$ denotante S functionem ipſius s abit in hanc

$$-S \mp R = \frac{1 - Mu}{N};$$

euoluta enim formula $\frac{1 - Mu}{N}$, pars ſolam variabilem s inuoluens aequetur ipſi $-S$, vnde deinceps natura curuae definietur; reliqua vero pars ambas variabiles u et s continens ipſi $\mp R$ aequalis ponatur; hincque ipſa reſiſtentia ſiue pro deſcenſu ſiue pro aſcenſu innoteſcet.

§. 3. His praemiſſis ipſum propoſitum adgrediamur; quo curua A M tautochronismi proprietate gaudere requiritur, vbi ante omnia perpendi oportet, cuiusmodi functio binarum variabilium u et s aſſumi debeat pro tempore t, vt tempus totius ſiue

 deſcen-

descensus siue ascensus obtineat quantitatem constantem. Primum autem quia t indicat tempus, quo arcus indefinitus $AM = s$ percurritur; manifestum est, hanc functionem in nihilum abire debere, posito arcu $s = 0$, qui est vnus terminus siue descensus siue ascensus totius; alter autem terminus ibi existit, vbi celeritas corporis u fit nulla; quare cum tempus inter hos terminos interceptum debeat esse constans, functio illa pro tempore assumenda posito $u = 0$ in quantitatem constantem abire debet, quibus duabus conditionibus iunctis tempus t eiusmodi functione ipsarum u et s est exprimendum; quae facto $s = 0$ euanescat; facto autem $u = 0$ abeat in quantitatem constantem.

§ 4. Quo hoc clarius reddamus, sumamus pro tempore t hanc formulam α Arc. tang. $\frac{Ns}{u}$, quae formula vtique euanescit sumto $s = 0$; sumto autem $u = 0$ prodit α Arc. tang. ∞, siue $\frac{\alpha\pi}{2}$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$. Hinc autem fit

$$dt = \frac{\alpha . N . u\, ds - \alpha N s\, du}{u + N s}$$

vnde pro formula nostra generali

$$dt = M\, ds + N\, du \text{ fit}$$

$$M = \frac{\alpha N u}{uu + NNss} \quad \text{et} \quad N = -\frac{\alpha N s}{u^2 + N^2 s^2}$$

hincque denique

$$-S \mp R = -\frac{u^2 (1 - \alpha N) - N^2 s^2}{\alpha N s}$$

hic

hic pars a ſola variabili s pendens $-\frac{Ns}{\alpha}$ praebet $S = \frac{Ns}{\alpha}$. Altera vero pars dat

$$\mp R = -\frac{u^2(1-\alpha N)}{\alpha N s},$$

ita, vt reſiſtentia ſit directe vt quadratum celeritatis, inuerſe autem vt ipſe arcus s; at ſi capiatur $\alpha = \frac{1}{N}$, haec reſiſtentia penitus euaneſcit et curua prodit tautochrona in vacuo; cum enim ſit

$$g\,dx = S\,ds,$$

pro hoc caſu ſit

$$g\,dx = N^2 s\,ds$$

et integrando

$$g\,x = \tfrac{1}{2} N^2 s^2,$$

quae vtique eſt aequatio pro cycloide.

§. 5. Quo autem hoc argumentum generalius pertractemus, poſtquam pro tempore t talis functio, qualem deſcripſimus, fuerit aſſumta; videamus, quemadmodum in formula differentiali

$$dt = M\,ds + N\,du$$

quantitates M et N futurae ſint comparatae. Hunc in finem cum ſit $M = (\frac{dt}{ds})$; ipſa autem functio t poſito $u = 0$ fiat conſtans; neceſſe eſt, vt formula $(\frac{dt}{ds})$ ſiue littera M fiat $= 0$ poſito $u = 0$. Deinde quia $N = (\frac{dt}{du})$; functio autem t, poſito $s = 0$, euaneſcat, etiam ipſa littera N facto $s = 0$ euaneſcere debebit, ſicque tautochroniſmus poſtulat, vt in formula

$$dt = M\,ds + N\,du$$

litte-

littera M euanescat, facto $u = o$; littera autem N euanescat, facto $s = o$ quibus duabus conditionibus ex ipsa rei natura haec tertia est adiungenda, vt ipsa formula $M\,ds + N\,du$ sit verum differentiale, siue vt sit

$$\left(\frac{dM}{du}\right) = \left(\frac{dN}{ds}\right).$$

§. 6. His autem conditionibus plene satisfit statuendo

$$dt = \frac{u\,ds - s\,du}{Q},$$

denotante Q functionem quamcunque ambarum variabilium u et s; erit enim

$$M = \frac{u}{Q} \quad \text{et} \quad N = \frac{-s}{Q},$$

dummodo Q neque habeat factorem s neque u. Quod autem haec formula verum sit differentiale, facile ostenditur ponendo $u = vs$; hinc enim quia Q est functio duarum dimensionum ipsarum u et s, euadet $Q = s^2$ Funct. v; deinde vero numerator $u\,ds - s\,du$ abit in $-s^2\,dv$; sicque tota fractio fiet $= \frac{-dv}{Funct.\,v}$ quod vtique est verum differentiale. His autem pro M et N valoribus substitutis aequatio nostra finalis erit

$$-S \mp R = \frac{u^2 - Q}{s},$$

cui pro indole functionis Q facile infinitis modis satisfieri licet.

§. 7. Vt irrationalia euitemus, pro Q sumamus talem formam

$$Q = \alpha u^2 + \beta su + \gamma s^2 + \frac{\delta . u^3}{s} + \frac{\varepsilon u^4}{s^2} \text{ etc.}$$

atque

atque hinc nanciſcimur

$$-S \mp R = \frac{(1-\alpha)u^2}{s} - \beta u - \gamma s - \frac{\delta u^3}{s^2} - \frac{\varepsilon u^4}{s^3} \text{ etc.}$$

vnde pro natura curuae ſtatuemus $S = \gamma s$ ideoque $g\,dx = \gamma s\,ds$, ita, vt tautochrona iterum ſit cyclois, dummodo reſiſtentia fuerit

$$R = \frac{(1-\alpha)u^2}{s} - \beta u - \frac{\delta . u^3}{s^2} - \frac{\varepsilon . u^4}{s^3} \text{ etc.}$$

qua expreſſione inuoluitur reſiſtentia ipſi celeritati u ſimpliciter proportionalis, cui adiungere licebit generatim functionem quamcunque vnius dimenſionis ipſarum u et s, cuiusmodi ſunt termini

$$\frac{(1-\alpha)u^2}{s};\ \frac{\delta u^3}{s^2};\ \frac{\varepsilon u^4}{s^3} \text{ etc.}$$

§. 8. Denotet q functionem ipſius s, quae euaneſcat poſito $s = 0$, ac facile perſpicitur, etiam hanc formam multo generaliorem

$$dt = \frac{u\,dq - q\,du}{Q}$$

quaeſito ſatisfacere, ſi modo pro Q accipiatur functio duarum dimenſionum ipſarum u et q. Hinc autem erit

$$M = \frac{u\,dq}{Q\,ds} \quad \text{et} \quad N = \frac{-q}{Q}$$

atque inde reſultat iſta aequatio

$$-S \mp R = \frac{u^2\,dq - Q\,ds}{q\,ds};$$

cui aequationi infinitis modis ſatisfieri poteſt.

§. 9. Vnico autem modo hinc terminus a celeritate u immunis reſultare poteſt, ſumendo ſcilicet q^2 pro Q. Sit igitur $Q = \alpha q^2 + Q'$ ita, vt et-

 iam

iam Q' complectatur functiones duarum dimensionum ipsarum u et q; quare cum nunc sit

$$-S \mp R = -\alpha q - \frac{Q'}{q} + \frac{u^2 dq}{q ds}$$

statuatur $S = \alpha q$, ita, vt pro curua tautochrona habeatur $g dx = \alpha q ds$; tum vero pro resistentia obtinetur

$$\mp R = -\frac{Q'}{q} + \frac{u^2 dq}{q ds},$$

vbi pars $-\frac{Q'}{q}$ denotabit functionem quamcunque vnius tantum dimensionis ipsarum u et q; ideoque tam fractiones, quam irrationalia euitando sumi poterit

$$\frac{Q'}{q} = \beta u + \frac{\gamma u^2}{q} + \frac{\delta u^3}{q^2} + \frac{\varepsilon u^4}{q^3} + \frac{\zeta u^5}{q^4} \text{ etc.}$$

quibus insuper adiungi possunt

$$\frac{\eta q^2}{u} + \frac{\vartheta q^3}{u^2} + \frac{\iota q^4}{u^3} \text{ etc.}$$

quin etiam tales simpliciter radicales

$$f\sqrt{q u} + \frac{g u \sqrt{u}}{\sqrt{q}} + \frac{h u^2 \sqrt{u}}{q \sqrt{q}} \text{ etc.}$$

§. 10. Hic iam facile effici potest, vt in formula resistentiae R occurrat terminus $f u^2$ quadrato scilicet celeritatis simpliciter proportionalis. Ex aequatione scilicet postrema fiat

$$\frac{u^2 dq}{q ds} - \frac{\gamma u^2}{q} = f u^2, \text{ siue } \frac{dq}{q} - \frac{\gamma ds}{q} = f ds;$$

vnde deducitur

$$ds = \frac{dq}{\gamma + fq} \text{ et integrando } s = \frac{1}{f} l. (\gamma + fq) + C$$

quae constans ita definiri debet, vt q simul cum s euanescat, ita, vt sit

$$s = \frac{1}{f} l \frac{(\gamma + fq)}{\gamma} \text{ siue } e^{fs} = \frac{\gamma + fq}{\gamma} = 1 + \frac{fq}{\gamma};$$

sicque

ſicque functio de nouo introducta q ita definitur, vt ſit

$$q = \frac{\gamma}{f}(e^{fs} - 1);$$

hunc igitur valorem pro q vbique ſubſtituendo proveniet tota reſiſtentia huic caſui conueniens

$$\mp R = \beta u + f u^2 + \frac{\delta . u^3}{q^2} + \frac{\varepsilon . u^4}{q^3} \text{ etc.}$$

quibus inſuper pro lubitu functiones quaecunque vnius dimenſionis adiungi poſſunt.

§. 11. Iſta inueſtigatio tam late patet, vt fere omnes reſiſtentiae hypotheſes, quas Viri Celeberrimi, Fontaine, *D'Alembert* et *la Grange*, per methodos maxime intricatas et calculos operoſiſſimos elicuerunt, in ea contineantur. Saltem non parum difficile foret, inde eiusmodi reſiſtentiae hypotheſin eruere, quam non facile ex noſtra ſolutione deriuare liceret; neque autem hinc vlla via nobis aperitur ad eiusmodi reſiſtentiam, quae vel cubo vel alii cuipiam altiori poteſtati celeritatis eſſet proportionalis.

§. 12. Hoc autem mirum videri non debet, cum formula, quam hic pro tempore aſſumſimus, neutiquam ſit generalis, cum potius caſum ſatis particularem complectatur; facile enim quotcunque alias formulas ad inſtitutum aeque adcommodatas excogitare licet; quomodo autem eiusmodi formae inveſtigari queant, quae ad certam reſiſtentiae hypotheſin deducant, minime adhuc patet, neque etiam vlla methodus id praeſtandi etiamnunc perſpicitur. Quo autem clarius pateat, infinitas ſolutiones in noſtra euolutione non contentas facili negotio exhiberi poſſe, vnico exemplo declaraſſe ſufficiet. Sumatur ſcilicet tempus

$$t = \alpha \text{ Arc. tang } \frac{s + s u}{s + u};$$

quae formula vtique euaneſcit facto $s = 0$; facto autem $u = 0$ fit conſtans $= \alpha$. Arc. tang. 1; hinc autem oritur

$$d t = \alpha \frac{u(1+u) d s - s(1-s) d u}{2 s^2 + s u(1+s) + u^2(1+s^2)}$$

ita, vt ſit

$$M = \frac{\alpha u(1+u)}{2 s^2 + 2 s u(1+u) + u^2(1+s^2)}$$

et $N = \frac{\alpha s(s-1)}{2 s^2 + 2 s u(1+u) + u^2(1+s^2)}$;

vnde conſequimur

$$-S \mp R = \frac{2 s^2 + 2 s u(1+u) + u^2(1+s^2) - \alpha u^2(1+u)}{\alpha s.(s-1)}$$

ex quo colligimus $S = -\frac{2 s}{\alpha(s-1)}$ ſicque

$$g d x = -\frac{2 s d s}{\alpha(s-1)} \text{ et } g x = -\frac{2 s}{\alpha} - \frac{2}{\alpha} l.(s-1) + \text{Conſt.}$$
$$= -\frac{2 s}{\alpha} - \frac{2}{\alpha} l.(1-s);$$

tum vero reſiſtentia prodit

$$\mp R = \frac{2 s u(1+u) + u^2(1+s^2) - \alpha u^2(1+u)}{\alpha s.(s-1)}$$

ex quo facile perſpicitur, ſi huiusmodi formulae vllum vſum habere poſſent, ſine vlla difficultate quotcunque alias ſimiles erui poſſe; fateor autem, parum fructus pro ſcopo noſtro hinc ſperari licere.

§. 13. Inter huiusmodi autem formas maxime eminet ea ipſa, qua iam ante ſumus vſi et quae nos deduxit ad reſiſtentiam iam ab aliis tractatam, partim

partim ipſi celeritati, partim eius quadrato proportionalem; quin etiam hanc formam adhuc latius extendere licet; ſumta enim pro v functione quacunque ipſius celeritatis u, quae poſito $u = 0$ euaneſcat, etiam haec forma pari ſucceſſu

$$dt = \frac{v\,dq - q\,dv}{Q}$$

vſurpari poterit, ſi modo Q denotet functionem duarum dimenſionum ipſarum q et v, tum enim ipſum tempus t aequabitur functioni nullius dimenſionis ipſarum q et v, ſiue functioni fractionis $\frac{q}{v}$. Hinc autem pro motu corporis habebitur iſta aequatio

$$\frac{v\,dq - q\,dv}{Q} = \frac{ds}{u}; \text{ ſiue}$$

$$u\,v\,dq - q\,u\,dv = Q\,ds,$$

quae ad formam generalem

$$u\,du = -S\,ds \mp R\,ds \text{ accommodata praebet}$$

$$u\,du = \frac{u\,v\,dq}{q} \cdot \frac{du}{dv} - \frac{Q\,ds}{q} \cdot \frac{du}{dv},$$

cuius expreſſionis portio ſolam s vel q inuoluens pro termino $-S\,ds$; reliqua vero pro termino $\mp R\,ds$ accipi debebit.

§. 14. Hinc autem nullas reſiſtentiae hypotheſes concinnas deriuare licebit, niſi pro v accipiatur poteſtas u^n; tum vero iſta formula latius non patet, quam ipſa ante vſitata

$$dt = \frac{u\,dq - q\,du}{Q};$$

quia enim ibi fit t functio fractionis $\frac{q}{u^n}$, eadem ſponte reducitur ad functionem fractionis $\frac{q^{\frac{1}{n}}}{u}$, sicque nihil impedit, quominus loco $q^{\frac{1}{n}}$ ipsa littera q scribatur; quam ob caussam ipsa formula primum vsitata eo magis fit notatu digna; quocirca si loco v ipsam celeritatem u introducamus, aequatio pro tautochrona atque ipso corporis motu erit

$$u\,d\,u = \frac{u^2\,d\,q}{q} - \frac{Q\,d\,s}{q},$$

vbi cum valor ipsius Q capi queat

$$= \alpha\,q^2 + \beta\,q\,u + \gamma\,u^2 + \frac{\delta\,u^3}{q} + \frac{\varepsilon\,u^4}{q^2} + \frac{\zeta\,u^5}{q^3} \text{ etc.}$$

haec aequatio induet istam formam

$$udu = -\alpha q ds - \beta u ds + u^2\left(\frac{d\,q}{q} - \frac{\gamma\,d\,s}{q}\right) - \frac{\delta\,u^3\,d\,s}{q^2} - \frac{\varepsilon\,u^4\,d\,s}{q^3} - \frac{\zeta\,u^5 ds}{q^4} \text{ etc.}$$

ita, vt nunc habeamus

$$S = \alpha q; \text{ et } \mp R = -\beta u + u^2\left(\frac{d\,q}{q\,d\,s} - \frac{\gamma}{q}\right) - \frac{\delta\,u^3}{q^2} - \frac{\varepsilon\,u^4}{q^3} - \frac{\zeta\,u^5}{q^4} \text{ etc.}$$

neque ergo pro altioribus ipsius u potestatibus terminus ab arcu s non pendens exhiberi poterit; pro quadrato autem u^2 factor $\frac{d\,q}{q\,d\,s} - \frac{\gamma}{q}$ vtique quantitas constans reddi potest, vti supra fecimus; tum vero etiam pro lubitu functioni ipsius s cuicunque aequalis statui potest. Sumta enim hac functione $= \Sigma$, erit

$$\frac{d\,q}{q\,d\,s} - \frac{\gamma}{q} = \Sigma$$

vnde functio q ita definitur, vt sit

$$q = \gamma \cdot e^{\int \Sigma\,d\,s} \int . e^{-\int \Sigma\,d\,s} . d\,s,$$

atque hinc quaestio resolui potest, si medium in duplicata ratione celeritatis resistens non fuerit vniforme me sed eius densitas vtcunque a loco puncti M pendeat.

§. 15. Inprimis autem circa hanc formam notatu digna est haec insignis proprietas, quod etiam ipse corporis motus super tautochrona generatim definiri possit, cum enim oriatur haec aequatio

$$\frac{u\,dq - q\,du}{Q} = \frac{ds}{u};$$

prius autem membrum fit differentiale functionis ipsius $\frac{q}{u}$; perspicuum est, si id per $\frac{u}{q}$ multiplicetur, etiam nunc fore integrabile, ita, vt tum habeatur

$$\frac{u}{q}.\ \frac{u\,dq - q\,du}{Q} = \frac{ds}{q}$$

cuius ergo vtrumque membrum est integrabile; quod etiam hac simplici substitutione facillime obtinetur, ponendo $u = q\,z$, tum enim functio Q abit in formam $q^2\,z$, denotante z functionem quampiam ipsius z et quia

$$u\,dq - q\,du \text{ fit } - q^2\,dz$$

his substitutis resultat ista aequatio

$$\frac{-z\,dz}{z} = \frac{ds}{q},$$

vnde functio quaedam ipsius z aequabitur integrali $\int.\frac{ds}{q}$.

§. 16. Quicquid autem fit, in hac inuestigatione etiamnum parum praestitisse gloriari possumus; quoniam ab iis, qui hoc argumentum tractauere, ejusmodi inprimis resistentiae hypotheses desiderari solent, quae purae cuidam celeritatis u functioni sint proportionales. Huiusmodi autem casus hactenus

nus euoluere non licet, nisi vbi resistentia huic formulae $a + b\,u + c.\,u^2$ assumitur proportionalis, quae scilicet constet tribus partibus, prima prorsus constante a, altera ipsi celeritati u, tertia vero eius quadrato u^2 proportionali, qui casus cum prae reliquis maxime attentionem nostram mereatur, operae pretium erit eum maiore cura euoluisse, quandoquidem in Mechanica mea mihi tum temporis non licuit partem mediam ipsi celeritati proportionalem $b\,u$ in calculum introducere.

Problema.

§. 17. Si resistentia medii huic formulae $a + b\,u + c\,u^2$ fuerit proportionalis et corpus deorsum vrgeatur vi vniformi, determinare curuam tautochronam tam descensus quam ascensus.

Solutio.

Manentibus denominationibus ante adhibitis pro motu descensus habebimus hanc aequationem:

$$u\,d\,u = -g\,d\,x + (a + b\,u + c\,u^2)\,d\,s,$$

in qua cum resistentiae partem primam cum vi absoluta commode coniungere liceat, statuamus

$$g\,d\,x - a\,d\,s = p\,d\,s,$$

vbi p certa erit functio arcus s, mox definienda, ita, vt haec aequatio naturam curuae tautochronae sit expressura. Tum igitur erit

$$u\,d\,u = -p\,d\,s + (b\,u + c\,u^2)\,d\,s.$$

Iam

Iam introducatur functio quaepiam arcus s, quae sit $= q$ et cum ipso arcu s euanescat et statuatur tempus, quo arcus A M $= s$ percurritur,

$$t = f \text{ Arc. tang. } \frac{\alpha q}{\beta q + \gamma u}$$

quae expressio posito $q = o$ ideoque etiam $s = o$ in nihilum abit; at pro toto tempore descensus, vbi $u = o$, prodit

$$t = f \text{ Arc. tang. } \frac{\alpha}{\beta}$$

adeoque quantitas constans. Hinc autem differentiando eruimus

$$dt = \frac{\alpha \gamma f (u\,dq - q\,du)}{(\alpha^2 + \beta^2) q^2 + 2 \beta \gamma q u + \gamma^2 u^2}$$

quod differentiale cum aequari debeat ipsi $\frac{ds}{u}$, habebimus

$$\alpha \gamma f. (u^2 dq - qu\,du) = ds [(\alpha^2 + \beta^2) q^2 + 2 \beta \gamma q u + \gamma^2 u^2].$$

Hic igitur ex aequatione assumta substituamus

$$u\,du = - p\,ds + (bu + cu^2) ds,$$

ac prodibit

$$\alpha \gamma f (u^2 dq + pq\,ds - q (bu + cu^2) ds)$$
$$= ds ((\alpha^2 + \beta^2) q^2 + 2 \beta \gamma q u + \gamma^2 u^2)$$

vbi triplicis generis termini occurrunt, scilicet ab u liberi, tum vero solam u ac denique eius quadratum u^2 inuoluentes, quos seorsim ad nihilum redigi oportet; vnde tres sequentes aequationes emergunt

I. $\alpha \gamma f. p = (\alpha^2 + \beta^2) q$

II. $- \alpha \gamma f. b = 2 \beta \gamma$

III. $\alpha \gamma f (u^2 dq - c q u^2 ds) = \gamma^2 u^2 ds$

 quarum

quarum prima ſtatim praebet

$$p = \frac{(\alpha^2 + \beta^2) q}{\alpha \gamma f}$$

ſecunda vero

$$f = -\frac{2\beta}{\alpha b}$$

tertia denique dat

$$ds = \frac{\alpha f d q}{\gamma + \alpha f c q}$$

et integrando

$$c s = \log. \frac{(\alpha f c q + \gamma)}{\gamma},$$

integratione ita moderata, vt poſito $q = 0$ fiat quoque $s = 0$. Hinc ad numeros progrediendo erit

$$e^{cs} = 1 + \frac{\alpha f c}{\gamma} q;$$

vnde colligitur

$$q = \frac{\gamma}{\alpha f c}(e^{cs} - 1);$$

atque hinc

$$p = \frac{b^2 (\alpha^2 + \beta^2)(e^{cs} - 1)}{4 \beta^2 c}.$$

Quo nunc has formulas commodiores reddamus, quoniam numerorum α, β, γ tantum ratio in computum venit, faciamus $\beta = b$, eritque

$$\alpha f = -2 \text{ atque } p = \frac{(\alpha^2 + b^2)}{4c}(e^{cs} - 1)$$

et $q = -\frac{\gamma}{2c}(e^{cs} - 1)$. Sit nunc $p = \frac{k}{c}(e^{cs} - 1)$ eritque $k = \frac{\alpha^2 + b^2}{4}$, atque $\alpha = \sqrt{(4k - b^2)}$.

Hinc igitur aequatio pro curua tautochrona deſcenſus erit

$$g\,dx - a\,ds = \frac{k}{c}(e^{cs} - 1)\,ds$$

aequa-

aequatio vero motum determinans

$$u\,d\,u = -\tfrac{k}{c}\,(e^{cs}-1)\,d\,s + (b\,u + c\,u^2)\,d\,s$$

hincque tempus per arcum A M $= s$ oritur

$$t = \frac{-2}{\sqrt{(4k-b^2)}}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{(e^{cs}-1)\sqrt{(4k-b^2)}}{b\,(e^{cs}-1)-2\,c\,u}$$

ideoque tempus totius descensus

$$t = \frac{-2}{\sqrt{(4k-b^2)}}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{\sqrt{(4k-b^2)}}{b}$$

quod vtique est constans. Quodsi iam haec curua vltra A continuetur, quod fit sumendo s negatiue, ea vltro praebet tautochronam ascensus, quandoquidem sumto s et $d\,s$ negatiue aequatio pro motu erit

$$u\,d\,u = -g\,d\,x - (a + b\,u + c\,u^2)\,d\,s,$$

quae vtique motum ascensus definit.

§. 18. Dubium hic occurrere posset, quod pro tempore t expressio negatiua est inuenta: sed tenendum est, formam irrationalem $\sqrt{(4\,k-b^2)}$ negatiue accipi posse, ita, vt reuera habeatur

$$t = \frac{2}{\sqrt{(4k-b^2)}}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{-\sqrt{(4k-b^2)}}{b}$$

notum autem est, arcum tangenti negatiuae respondentem quadrante esse maiorem. Quod autem ad ipsum motum super hac curua attinet, aequatio nostra ad separabilitatem perducetur, ponendo

$$u = (e^{cs}-1)\,z$$

vnde tota aequatio per $e^{cs}-1$ diuisa reperitur

$$(e^{cs}-1)\,z\,d\,z = -\tfrac{k}{c}\,d\,s + b\,z\,d\,s - c\,z^2\,d\,s$$

 quae

quae sponte dat

$$\frac{c\,z\,d\,z}{b\,c\,z - c^2 z^2 - k} = \frac{d\,s}{e^{c\,s} - 1}$$

cuius postremi membri integrale est $\frac{1}{c} l(1 - e^{-c\,s})$ prioris autem membri integrale et logarithmos et quadraturam circuli inuoluit.

§. 19. Alii adhuc dubio hic necesse videtur occurri; scilicet cum tempus definiatur arcu circuli, cuius tangens praescribitur, eidem autem tangenti innumerabiles arcus conueniant; videri posset, hanc formulam simul omnes oscillationes super hac curua in se complecti; vnde quia hi arcus in progressione arithmetica progrediuntur, sequeretur omnes plane oscillationes inter se fore aequediurnas, quod tamen secus euenire nouimus. Haec quidem conclusio locum esset habitura, si motus tam ascensus, quam descensus super eadem curua eadem aequatione exprimeretur; at quia hoc non vsu venit, mirum non est, quod formula pro tempore data vnicam tantum oscillationem contineat, quae scilicet a dextra ad sinistram progreditur, motus vero a sinistra ad dextram alia diuersa aequatione determinatur sicque illa conclusio nullo modo hic admitti potest.

DE