



1773

# De vera tautochrone in fluido

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

## Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De vera tautochrone in fluido" (1773). *Euler Archive - All Works*. 436.  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/436>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).

DE VERA  
T A V T O C H R O N A  
IN FLUIDO.

Auctore

L. E V L E R O.

Quae hactenus de tautochronis in medio resistente ingenti studio sunt prolata, non tam ob usum practicum omni laude digna sunt aestimanda, sed vires ingenii, quibus scientia plurimum locupletari solet, non mediocriter exercuerunt. Primum enim in rerum natura vix alia resistentiae lex reperitur, nisi quae quadrato velocitatis sit proportionalis; tum vero etiam in hac ipsa resistentiae hypothese curua tautochrona a Geometris assignata nullum plane usum in praxi habere potest; propterea quod ascensus et descensus corporis peculiare et diversas curuas ad tautochronismum requirunt; etiam si enim hae duae curuae coniungantur et oscillationes in curua descensuum incipientes aequalibus absoluantur temporibus; tamen oscillationes sequentes, quae in tautochrona ascensus essent incepturae, tautochronismi proprietate erunt destitutae. Quemadmodum autem huic incommodo occurri posset, in opere meo mechanico summo studio inuestigavi, neque tamen optatum scopum mihi attingere licuit, nisi eo casu, quo resistentia fuerit quam minima;

T t 3

neque

neque vero quisquam ab eo tempore feliciori successu in hoc negotio elaborauisse videtur. Ob tantas igitur difficultates operae pretium erit, praecipua momenta, quibus haec inuestigatio innititur, perspicue exposuisse, cum nullum sit dubium, quin analysis insignia incrementa sit acceptura, si cui arduum hoc negotium expedire contigerit. Fundamentum huius inuestigationis sine dubio ex eo problemate repeti oportet, quo pro data curua quacunque, super qua corpus descensus suos absoluat, inveni curuam iungendam ascensui destinatum, ita, vt quilibet descensus cum ascensu sequente dato tempore absoluat. Nunc enim totum negotium eo reducitur, vt casus quaeratur, quo curua ascensus ipsi curuae descensus similis euadat et aequalis; sic enim omnes plane oscillationes siue in hac siue in altera curua incipiant, necessario erunt isochronae; atque hanc demum curuam licebit veram tautochronam in fluido adpellari. Quomodo igitur huius quaestionis solutionem tentari conueniat, hic accuratius sum examinaturus.

Tab. IV. §. 1. Repraesentetur igitur ista curua in figura annexa, quae circa axem verticalem  $OA$  duos ramos habeat similes et aequales  $OE$  et  $Oe$  et sumamus corpus ex  $E$  descensum inchoasse, in altero autem ramo iterum ascendere vsque ad  $e$ , ita, vt tempus totius oscillationis per arcum  $EOe$  semper eiusdem quantitatis esse debeat, vbicunque descensus inceperit.

§. 2.

§. 2. Iam vtrumque motum tam ascensus quam descensus seorsim perpendamus ac primo quidem pro descensu vocetur abscissa  $Ox = x$  et arcus  $OS = S$ ; celeritas autem in puncto  $S$  debita sit altitudini  $V$ , ac principia motus hanc praebent aequationem

$$dV = -dX + cV dS$$

$$\text{fiue } dV - cV dS = -dX$$

quae in  $e^{-cV}$  ducta et integrata dabit

$$e^{-cS} V = C - \int e^{-cS} dX$$

quod postremum integrale ita capiatur, vt in puncto infimo  $O$ , vbi et  $x = 0$  et  $S = 0$ , euanescat; pro constante autem inuenta  $C$  statuamus corporis celeritatem in puncto infimo  $O$  debitam esse altitudini  $k$ , factoque  $S = 0$  et  $V = k$ , elicitur constans  $C = k$ , ficque habebimus

$$V = e^{cS} (k - \int e^{-cS} dX).$$

§. 3. Eodem modo euoluamus motum ascensus, pro quo sit abscissa  $Ox = x$  et arcus  $Os = s$  et altitudo celeritati in  $s$  debita  $= v$ ; quo posito aequatio motum exprimens erit

$$dv = -dx - cv ds$$

$$\text{fiue } dv + cv ds = -dx$$

quae per  $e^{cs}$  multiplicata et integrata dat

$$e^{cs} v = C - \int e^{cs} dx$$

quod postremum integrale etiam euanescat in ipso puncto  $O$  et quia hic altitudo celeritati debita etiamnum

iamnum est  $k$ , facto  $s = 0$  colligitur  $C = k$ , ita, ut sit pro ascensu

$$v = e^{-cs} (k - \int e^{cs} dx).$$

§. 4. Definita utraque celeritate consideremus etiam tempora, quibus arcus  $OS$  et  $Os$  absoluuntur et quia ipsae celeritates per  $VV$  et  $Vv$  exprimuntur, erit pro descensu tempus per arcum  $OS$

$$\int \frac{dS}{V(e^{cs}[k - \int e^{-cs} dx])} = \int \frac{e^{-\frac{cs}{2}} dS}{V(k - \int e^{-cs} dx)},$$

ita sumendum, ut evanescat, facto  $S = 0$ . Pro ascensu autem erit simili modo tempus per  $Os$

$$\int \frac{e^{\frac{cs}{2}} ds}{V(k - \int e^{cs} dx)},$$

quod integrale etiam in nihilum abire debet, facto  $s = 0$ .

§. 5. Prior harum formularum integralium exprimet tempus totius descensus per arcum  $EO$ , si perfecta integratione statuatur

$$\int e^{-cs} dx = k;$$

tempus autem ascensus per totum arcum  $Oe$  ex formula posteriore elicitur, si post integrationem fiat

$$\int e^{cs} dx = k;$$

quocirca efficiendum est, ut haec duo tempora iunctim sumpta quantitati constanti fiant aequalia; in quam autem neutiquam ingredi debet quantitas  $k$ , quippe

quippe quae pro diuersis oscillationibus diuersos sortitur valores.

§. 6. Quoniam hic binae variables  $X$  et  $x$  perinde ac  $S$  et  $s$  nullo modo a se inuicem pendent, quoniam in figura punctum  $s$  respectu  $S$  nulla relatione definitur, nobis liberam relinquitur, certam quandam relationem inter haec bina puncta  $s$  et  $S$  stabilire; ad nostrum autem institutum conuenit statui

$$\int e^{-cs} dX = \int e^{cs} dx;$$

sic enim tam in ipso puncto  $O$ , ubi vtraque formula euanescit, quam pro terminis  $S$  et  $s$ , ubi vtraque formula fieri debet  $= k$ , conditio motus impletur. Denotemus autem hunc vtriusque formulae valorem littera  $= z$  sicque habebimus

$$dX = e^{cs} dz \text{ et } dx = e^{-cs} dz.$$

§. 7. Hoc facto tempus per vtrumque arcum  $OS$  et  $Os$  iunctim sumtum erit

$$\int \frac{e^{-\frac{cs}{2}} dS}{\sqrt{(k-z)}} + \int \frac{e^{\frac{cs}{2}} ds}{\sqrt{(k-z)}} = \int \frac{e^{-\frac{cs}{2}} dS + e^{\frac{cs}{2}} ds}{\sqrt{(k-z)}};$$

cuius integralis valor sumto  $z = k$  debet esse quantitas constans, non pendens a  $k$ , quae proprietas cum huic formulae conueniat

$$\int \frac{a \cdot dz}{\sqrt{(z(k-z))}}$$

quippe quae abit in  $a\pi$ , quare si huic formulae nostram aequalem statuamus, adipiscimur

$$e^{-\frac{cs}{2}} \cdot dS + e^{\frac{cs}{2}} \cdot ds = \frac{a dz}{\sqrt{z}}$$

et integrando

$$-\frac{z}{c} e^{-\frac{cs}{z}} + \frac{z}{c} e^{\frac{cs}{z}} = 2\alpha \sqrt{z}$$

vbi constante addenda non est opus, quia casu, quo  $S = 0$  et  $s = 0$ , sponte fit  $z = 0$ ; sicque obtinui-  
mus hanc formulam satis concinnam

$$-e^{-\frac{cs}{z}} + e^{\frac{cs}{z}} = \alpha c \sqrt{z}.$$

§. 8. Conditiones igitur, quibus satisfieri oportere hactenus inuenimus, sequentibus formulis continentur

$$I. dX = e^{cs} dz$$

$$II. dx = e^{-cs} dz$$

$$III. -e^{-\frac{cs}{z}} + e^{\frac{cs}{z}} = \alpha c \sqrt{z}$$

quibus facile infinitis modis satisfieri potest, atque adeo hinc clare intelligitur, quomodo si curua pro descensu  $OE$  utcumque fuerit data, inde curua pro ascensu  $Oe$  definiiri possit; quod quidem problema in opere citato fusius sum persecutus.

§. 9. Nunc autem potissimum praecipua conditio ad institutum nostrum pertinens est expenden-  
da, qua postulatur, vt curua  $Oe$  prorsus similis et aequalis prodeat curuae  $OE$ . Ad hoc autem necesse est, vt elementum  $dX$  eodem prorsus modo per arcum  $OS$  cum suo elemento  $dS$  determinetur, quo elementum  $dx$  per arcum respondentem  $Os$  cum suo elemento  $ds$ ; scilicet si statuamus

$$dX = dS \cdot \Delta : S,$$

quoque

quoque esse debet

$$dx = ds \cdot \Delta : s;$$

dum character  $\Delta$  vtrunque denotat functionem eiusdem indolis. Hac ergo conditione principali introducta sequentibus aequationibus satisfieri oportebit:

I.  $dS \cdot \Delta : S = e^{cs} dz$

II.  $ds \cdot \Delta : s = e^{-cs} dz$

III.  $-e^{-\frac{cs}{2}} + e^{\frac{cs}{2}} = ac \cdot \sqrt{z}$ .

His ergo tribus aequationibus solutio huius quaestionis difficillimae continetur, et Geometrae, qui hunc laborem suscipere voluerint, plurimum certe praestitisse erunt censendi, si his conditionibus satisfaciendi methodum inuenerint.

§. 10. Quo vim istarum formularum melius perspiciamus, consideremus casum, quo vel ipsum fluidum est rarissimum vel totus arcus vna oscillatione confectus quasi infinite paruus, quandoquidem motus ascensus et descensus inter se erunt similes et aequales, tum autem pro descensu erit:

$$1 - e^{-\frac{cs}{2}} = \frac{1}{2} ac \sqrt{z} \text{ et } e^{\frac{cs}{2}} - 1 = \frac{1}{2} ac \sqrt{z}$$

hoc enim modo tertiae aequationi manifeste satisfit. Iam pro prima aequatione, quum fit

$$\sqrt{z} = \frac{2}{ac} (1 - e^{-\frac{cs}{2}}) = a (1 - e^{-\frac{cs}{2}})$$

ponendo  $\frac{2}{ac} = a$ , erit  $z = a^2 (1 - 2e^{-\frac{cs}{2}} + e^{-cs})$

V v 2

et



$$\text{et } dz = caadS(e^{-\frac{cs}{2}} - e^{-cs}) = e^{-cs} dX,$$

$$\text{ideoque habebitur } dX = aac dS(e^{+\frac{cs}{2}} - 1).$$

quae est aequatio pro arcu descensus. Pro ascensu autem quum fit

$$\sqrt{x} = a(e^{+\frac{cs}{2}} - 1) \text{ erit } x = aa(e^{+cs} - 2e^{+\frac{cs}{2}} + 1)$$

$$\text{et } dz = aac ds(e^{+cs} - e^{+\frac{cs}{2}}) = e^{+cs} dx$$

$$\text{ideoque } dx = aac ds(1 - e^{-\frac{cs}{2}}),$$

quae duae aequationes utique conveniunt casu, quo vel  $S$  siue  $s$ , vel  $c$  est infinite paruum, tum enim fit

$$e^{+\frac{cs}{2}} - 1 = \frac{1}{2}cs \text{ et } 1 - e^{-\frac{cs}{2}} = +\frac{1}{2}cs,$$

ita ut oriatur:

$$dX = \frac{aac}{2} S dS \text{ et } dx = \frac{aac}{2} s ds,$$

ficque utraque aequatio eandem curvam exprimit.

§. 11. Generatim autem plurimum notasse iuvabit, binas aequationes inventas lege continuitatis inter se cohaerere, si enim in priori loco  $S$  scribatur  $-s$  et  $+x$  loco  $X$  aequatio abit in hanc

$$dx = aac dS(1 - e^{-\frac{cs}{2}}),$$

quae est ipsa altera aequatio, vnde patet curvam ascensus reuera esse continuationem curvae descensus eademque aequatione exprimi, etiamsi ambo rami non

non fuerint inter se aequales. Hoc casu perpenso in genere colligimus statui debere

$$y - e^{-\frac{cs}{2}} = \frac{1}{2}ac\sqrt{z} \text{ et } e^{+\frac{cs}{2}} - y = \frac{1}{2}ac\sqrt{z}$$

sic enim quoque tertiae nostrae aequationi satisfit, et nunc bina tempora descensus et ascensus non amplius sunt aequalia. Tenendum autem est, quantitatem  $y$  pro puncto infimo  $O$  in unitatem abire debere, quoniam hoc loco quantitas  $z$  evanescit, exponentialia autem abeunt in unitatem. Hinc iam pro descensu ob

$$\sqrt{z} = a(y - e^{-\frac{cs}{2}}) \text{ et } z = aa(y^2 - 2ye^{-\frac{cs}{2}} + e^{-cs}),$$

habebimus

$$dz = 2aady(y - e^{-\frac{cs}{2}}) + aacdS(ye^{-\frac{cs}{2}} - e^{-cs}) = e^{-cs} dX,$$

vnde pro curua deducitur ista aequatio

$$dX = 2aady(ye^{+cs} - e^{+\frac{cs}{2}}) + aacdS(ye^{+\frac{cs}{2}} - 1)$$

Eodem modo pro ascensu, quum fit

$$\sqrt{z} = a(e^{+\frac{cs}{2}} - y)$$

ideoque

$$z = aa(e^{+cs} - 2ye^{+\frac{cs}{2}} + yy),$$

differentiando nanciscimur

$$dz = aacds(e^{+cs} - ye^{+\frac{cs}{2}}) - 2aady(e^{+\frac{cs}{2}} - y) = e^{+cs} dx, \text{ vnde fit}$$

$$dx = aacds(1 - ye^{-\frac{cs}{2}}) - 2aady(e^{-\frac{cs}{2}} - ye^{-cs}),$$

quae aequatio ex praecedente resultat, si loco  $X$  scribatur  $x$  et  $-s$  loco  $S$  dum quantitas  $y$  eundem retinet valorem, ex quo etiam nunc intelligimus curvam ascensus cum curva descensus esse continuam, dummodo  $y$  fuerit functio par ipsius  $S$ , quae scilicet eadem maneat, etiam si arcus  $S$  negativè capiatur.

§. 18. Nunc igitur quaestio huc redit, cuiusmodi functio par ipsius  $S$  pro  $y$  accipi debeat, ut aequatio pro ascensu inter  $x$  et  $s$ , cum aequatione inter  $X$  et  $S$  plane conveniat. Attendenti autem statim perspicuum erit, hoc evenire, si  $X$  aequetur functioni pari arcus  $S$ , unde sequitur  $dX$  aequari elemento  $dS$  in functionem imparem ipsius  $S$  ducto. Hoc observato alterutram harum duarum aequationum considerasse sufficiet, quam ita comparatam esse oportet, ut si arcus  $S$  vel  $s$  negativè accipiatur manente  $y$  invariato, eadem aequatio resultare debeat, consideremus igitur aequationem posteriorem:

$$dx = aacds(1 - ye^{-\frac{cs}{2}}) - 2aady(e^{-\frac{cs}{2}} - ye^{-cs})$$

quae sumto  $s$  negativè abit in hanc

$$dx = aacds(ye^{+\frac{cs}{2}} - 1) + 2aady(ye^{+cs} - e^{+\frac{cs}{2}}),$$

quae duae aequationes ut inter se congruant, necesse est, ut sit

$$2ydy(e^{+cs} - e^{-cs}) - 2dy(e^{+\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}})$$

$$+ c y ds (e^{+\frac{cs}{2}} + e^{-\frac{cs}{2}}) - 2cds = 0$$

vbi

ut singula membra inuoluunt functiones impares ipsius  $s$ , quandoquidem  $y$  est functio par. Nam quum sit per seriem

$$e^{+cs} = 1 + cs + \frac{1}{2}c^2s^2 + \frac{1}{6}c^3s^3 + \frac{1}{24}c^4s^4 \text{ etc.}$$

$$\text{et } e^{-cs} = 1 - cs + \frac{1}{2}c^2s^2 - \frac{1}{6}c^3s^3 + \frac{1}{24}c^4s^4 - \frac{1}{120}c^5s^5 \text{ etc.}$$

erit, utique

$$e^{+cs} - e^{-cs} = 2cs + \frac{2}{6}c^3s^3 + \frac{2}{120}c^5s^5 \text{ etc.}$$

quae manifesto est functio impar, quod etiam de

$$e^{+\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}}$$

valet, simul autem hinc perspicitur formulam

$$e^{+\frac{cs}{2}} + e^{-\frac{cs}{2}}$$

fore functionem parem.

§. 13. Huc ergo ardua nostra quaestio est perducta, ut ex postrema illa aequatione valor quantitatis  $y$  eruatur, quippe quem iam nouimus fore functionem parem ipsius  $s$ . Ac primo quidem ut exponentialia elidamus, statuamus

$$e^{\frac{1}{2}cs} - e^{-\frac{1}{2}cs} = 2p,$$

ita ut  $p$  sit functio impar ipsius  $s$ , ac vicissim  $s$  impar ipsius  $p$ , hinc autem elicimus:

$$e^{\frac{1}{2}cs} = \sqrt{1+pp} + p; \quad e^{-\frac{1}{2}cs} = \sqrt{1+pp} - p$$

$$e^{cs} = 1 + 2pp + 2p\sqrt{1+pp}; \quad e^{-cs} = 1 + 2pp - 2p\sqrt{1+pp}$$

$$\text{et } cds = \frac{2dp}{\sqrt{1+pp}};$$

his

his autem valoribus substitutis aequatio nostra inducit hanc formam:

$$2ydy \cdot p\sqrt{(1+pp)} - pdy + ydp - \frac{dr}{\sqrt{(1+pp)}} = 0.$$

§. 14. Ut hanc aequationem etiam ab irrationalibus liberemus, statuamus

$$y = \frac{r}{\sqrt{(1+pp)}}$$

vbi  $r$  debet esse functio par ipsius  $p$ , vt fit

$$dy = \frac{dr}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{rpdp}{(1+pp)^{3/2}}$$

et facta multiplicatione per  $(1+pp)^{3/2}$  sequentem impetramus aequationem:

$$2rdrp(1+pp) - pdr(2+pp) - 2r^2p^2dp + rdp(1+2pp) - dp(1+pp) = 0.$$

Quia nouimus casu  $p = 0$  fieri debere  $r = 1$ , statuamus  $r = 1 + q$ , ita vt  $q$  sit functio par ipsius  $p$  euanesceus casu  $p = 0$  atque hinc peruenimus ad istam aequationem:

$$2qdq \cdot p(1+pp) + pdq(1+pp) - 2q^2p^2dp + qdp(1+2pp) - ppdp = 0.$$

Tentanti hinc facile patebit, pro littera  $q$  nullam potestatem simplicem ipsius  $p$  satisfacere posse, vnde concludere debemus, valorem ipsius  $q$  vix aliter nisi per seriem infinitam exprimi posse, quocirca ponamus:

$$q = Ap^2 + Bp^4 + Cp^6 + Dp^8 + \text{etc.}$$

vnde fit

$$\frac{dq}{dp} = 2Ap + 4Bp^3 + 6Cp^5 + 8Dp^7 + \text{etc.}$$

porro

porro

$$q^2 = A^2 p^4 + 2ABp^5 + (2AC + B^2)p^6 + \text{etc.}$$

et

$$\frac{2q dq}{dp} = 4A^2 p^3 + 12ABp^4 + 8(2AC + B^2)p^5 + \text{etc.}$$

qui valores substituantur vt sequitur:

	$p^2$	$p^4$	$p^6$	$p^8$
$\frac{2q dq}{dp} p(1+pp) =$		$+ 4A^2$	$+ 12AB$	$+ 8(2AC + B^2)$
			$+ 4A^2$	$+ 12AB$
$\frac{2dq}{dp}(1+pp) =$	$+ 2A$	$+ 4B$	$+ 6C$	$+ 8D$
		$+ 2A$	$+ 4B$	$+ 6C$
$- 2q^2 p^2 =$			$- 2A^2$	$- 4AB$
$+ q(1-2pp) =$	$+ A$	$+ B$	$+ C$	$+ D$
		$- 2A$	$- 2B$	$- 2C$
$- pp =$	$- 1$			

§. 15. Singulas igitur columnas ad nihilum redigentes reperiemus sequentes aequationes:

I.  $3A - 1 = 0$ ; ficque  $A = \frac{1}{3}$

II.  $4A^2 + 5B = 0$ ; et  $B = -\frac{4A^2}{5} = -\frac{4}{45}$

III.  $2A^2 + 12AB + 2B + 7C = 0$ ; hinc  $C = +\frac{2}{45}$

IV.  $16AC + 8B^2 + 8AB + 4C + 9D = 0$ ;  $D = -\frac{16AC + 8B^2 + 8AB + 4C}{9}$

ex quo valores ipsius  $q$  indeque ipsius  $r$  colligimus sequentes:

$$r = 1 + \frac{1}{3}p^2 - \frac{4}{45}p^4 + \frac{2}{45}p^6 - \frac{16}{9 \cdot 45^2}p^8 +$$

quo inuento habemus  $y = \frac{r}{2(1+pp)}$ , vbi recordemur esse

$$p = \frac{e^{\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}}}{2} \text{ et } \mathcal{V}(1+pp) = \frac{e^{\frac{cs}{2}} + e^{-\frac{cs}{2}}}{2},$$

ita vt nunc quantitas  $y$  nobis iam satis exacte fit explorata, quum enim in praxi nonnisi oscillationes satis paruae admitti soleant ideoque arcum  $s$  perpetuo tanquam satis paruum spectare liceat, valor inuentus vsque ad octauam potestatem ipsius  $s$  exactus, praxi omnino satisfaciens est censendus, quum sit

$$p = \frac{1}{2} cs + \frac{c^3 s^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{c^5 s^5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \frac{c^7 s^7}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 14} \text{ etc.}$$

Supra autem vidimus, quemadmodum vicissim formulae arcum  $s$  inuoluentes per  $p$  determinentur, erat scilicet

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}cs} &= \mathcal{V}(1+pp) + p \text{ et } e^{-\frac{1}{2}cs} = \mathcal{V}(1+pp) - p \\ e^{cs} &= 1 + 2pp + 2p\mathcal{V}(1+pp); \quad e^{-cs} = 1 + 2pp - 2p\mathcal{V}(1+pp) \\ s &= \frac{2}{c} L \mathcal{V}(1+pp) + p \text{ et } cds = \frac{2dp}{\mathcal{V}(1+pp)} \end{aligned}$$

§. 16. Quodsi nunc quantitatem  $y$  pro cognita habeamus, videamus, quomodo ipsa aequatio tautochronae exprimat, quoniam pro  $dx$  duplicem inuenimus aequationem

$$\begin{aligned} dx &= aacds(1 - y \cdot e^{-\frac{cs}{2}}) - 2aady(e^{-\frac{cs}{2}} - y \cdot e^{-cs}) \\ dx &= aacds(y \cdot e^{+\frac{cs}{2}} - 1) + 2aady(y \cdot e^{+cs} - e^{+\frac{cs}{2}}) \end{aligned}$$

quarum prior a posteriori subtracta nobis suppeditavit valorem ipsius  $y$ : nunc has duas aequationes invicem addamus, vt prodeat

 $2dx$

$$2dx = aa(2ydy.(e^{+cs} + e^{-cs}) - 2dy(e^{+\frac{cs}{2}} + e^{-\frac{cs}{2}})) \\ + aacyds(e^{+\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}})$$

quae aequatio, si loco  $s$  etiam nostra variabilis  $p$  introducatur, fiet

$$2dx = aa(4ydy(1 + 2pp) - 4dyV(1 + pp) + \frac{y p d p}{\sqrt{1 + p^2}})$$

siue

$$\frac{dx}{a^2} = ydy(1 + 2p^2) - dyV(1 + p^2) + \frac{y p d p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

quae ergo est aequatio pro vera curua tautochrona, quam quaesiuimus.

§. 17. Hoc modo problema nostrum per approximationem resoluimus, si autem uti in analysi sublimiori operationes algebrae communis pro concessis haberi solent, ita resolutionem aequationum differentialium primi gradus nobis tamquam concessam spectare liceat, solutio nostri problematis ita concinne expedietur. Quaeratur quantitas variabilis  $y$ , ex hac differentiali primi gradus:

$$2ydy(e^{+cs} - e^{-cs}) - 2dy(e^{+\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}}) + cyds(e^{+\frac{cs}{2}} + e^{-\frac{cs}{2}}) \\ - 2c ds = 0, \text{ integratione ita instituta, vt posito } s = 0, \text{ fiat } y = 1, \text{ quo facto aequatio pro tautochrona quaesita inter abscissam } x \text{ et arcum } s \text{ ita exprimetur:}$$

$$bdx = 2ydy(e^{+cs} + e^{-cs}) - 2dy(e^{+\frac{cs}{2}} + e^{-\frac{cs}{2}}) + cyds(e^{+\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}})$$

vnde per operationes notissimas constructio curuae confici poterit.



### 348 DE VERA TAVTOCHRONA IN FLVIDO.

§. 18. Haec ipsa autem solutio merito non parum suspecta videri potest, quoniam ratiocinia, quibus innititur, plena perspicuitate carent, quamobrem Geometrae eo magis sunt excitandi, ut arduae huius quaestionis dignitate impulsivi vires suas in eius solutione exercere velint; equidem lubens fateor me omnem hactenus operam in hoc negotio frustra consumpsisse, interim tamen solutio hic in medium allata, etiamsi sit erronea, tamen ratione ipsius analyseos attentione non indigna est visa, caeterum hoc ipsum Problema in Mechanicae meae Volumine II<sup>do</sup> pro casu quo fluidum est rarissimum, iam rite solutum dedi. Solutio autem ibi data ad praesentes denominationes translata pro vera tautochrone hanc aequationem praebuerat:

$$dx = \alpha c ds (cs + \frac{1}{q} c^2 s^2),$$

quae ad usum practicum prorsus est sufficiens; quin etiam si fluidum non fuerit admodum rarum, dummodo oscillationes admittantur satis parvae, eadem solutio valebit. Nihilo vero minus solutionem completam merito desideramus.