1773

De collisione corporum pendulorum, tam obliqua, quam motu gyratorio perturbata

Leonhard Euler

DE COLLISIONE CORPORVM PENDVLORVM, TAM OBLIQVA, QVAM MOTV GYRATORIO PERTVRBATA.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quae in differtatione praecedente funt determinata, egregie per motum pendulorum illuftrari atque experimentis comprobari poffunt. Si enim duo globi M et N ita filorum ope ex punctis A et B fufpendantur, vt dum fila fitum verticalem tenent, globi fe mutuo contingant, atque recta M N per eorum centra tranfiens fiat horizontalis; tum omnes illae collifiones, quas ante definiuimus, facili mechanismo produci poffunt. Si enim ambo globi in eodem plano verticali, in quo fila A M et B N verfantur, de fitu naturali deducantur, indeque fubito dimittantur, vt fimul ad ftatum naturalem perveniant, tum conflictus orietur directus, cuius phoenomena iam pridem funt explorata atque per huiusmodi experimenda comprobata. Si autem globi in diuerfis planis verticalibus deducantur iterumque ita dimittantur, vt fimul ad ftatum naturalem pertingant, tum conflictus eueniet obliquus, de quo etiam Tab. IV. Fig. 3.

etiam nunc regulae certae nusquam reperiuntur traditae, ſemper autem in ipſo colliſionis momento, non ſolum recta MN ſed etiam directio vtriusque motus erit horizontalis, omnino vti in ſuperiori diſſertatione aſſumſimus.

2. Hoc autem modo non ſolum vtrique globo celeritates quaecunque, quibus conflictus inchoetur, imprimi poſſunt, ſed etiam fila contorquendo vtrique motus gyratorius quicunque induci poterit, qui quum ſemper circa axem, quem ipſum filum exhibet fiat, etiam in conflictu axis vtriusque gyrationis erit verticalis, prorſus vti in ſuperiori ſcripto aſſumſimus, quin etiam durante conflictu, circa hos axes in globis motus gyratorius generari poterit, ita vt hoc modo non ſolum omnia, quae de colliſione obliqua inueſtigauimus, experimentis confirmari, ſed globis inſuper motus gyratorius imprimi poſſit, de quo motu nihil adhuc ab iis, qui de colliſione corporum tractauerunt, accurate eſt definitum.

3. Neque etiam abſolute opus eſt, vt ambo corpora ſint globi, ſed ad inſtitutum noſtrum ſufficit, vt ſint eiusmodi corpora rotunda, quorum axes incidant in ipſa fila ſuſpenſionis, tum vero etiam neceſſe eſt, vt eorum circuli maximi, quibus ſe mutuo contingunt, per vtriusque centrum grauitatis

Tab. IV. Fig. 4. tranſeant. Sint igitur centra haec in punctis M et N et vocemus pro priore radium circuli illius maximi $MC = a$, alterius vero globi N radium $NC = b$, praeterea vero pondus illius ſiue maſſa ſtatuatur $= M$,

$= M$, huius vero $= N$, praeterea autem pro motu gyratorio, sit prioris corporis M momentum inertiae respectu axis $MA = \alpha.M.aa$, alterius vero corporis N respectu axis $NB = \beta N bb$, vbi per nota praecepta, pro data vtriusque corporis figura, numeri α et β inueniri possunt.

4. Vt nunc statum motus vtriusque corporis ante conflictum accurate describamus, repraesentent circuli AaC et BbC circulos illos maximos in plano horizontali, quibus corpora se in puncto C contingunt, ita vt sit $MC = a$ et $NC = b$, hunc enim situm concipiamus in ipso collisionis initio tenere, quo ambo centra peruenerint secundum directiones μM et νN; ex quorum motuum resolutione nascatur pro corpore M celeritas secundum $pM = p$ et secundum $mM = m$, pro altero vero corpore N, celeritas secundum $qN = q$ et secundum $nN = n$, praeterea vero corpus M gyretur in sensum CaA, celeritate angulari $= \mu$, alterum vero N in sensum CbB celeritate $= \nu$, ita vt pro illo celeritas puncti $C = a\mu$, pro hoc vero celeritas puncti $C = b\nu$, hisque elementis vtriusque corporis motus ante conflictum erit definitus.

5. Hic ante omnia notandum est, vt figura initium conflictus repraesentet, interuallum centrorum MN minus esse debere, quam instanti praecedente, vbi haec distantia erat $\mu\nu$, siue rectam $\mu\nu$ maiorem esse debere, quam MN, hoc autem euenire nequit, nisi sit interuallum $pq > MN$ siue nisi

ſit $Mp > Nq$, ſiue $p - q > 0$, ſemper autem figuram ita repraeſentare licet, vt fiat p quantitas poſitiua, tum ergo vel q debet eſſe quantitas negatiua, vel ſi ſit poſitiua, debet eſſe $q < p$, quod ad reliquas quantitates attinet m, n, μ et ν; eae cenſendae ſunt poſitiuae, ſi earum directiones cum figura conueniant, ſecus eae ſumendae ſunt negatiuae, quae quidem per ſe ſatis ſunt perſpicua.

6. His circa ſtatum corporum ante conflictum definitis, pro eorum ſtatu poſt conflictum ponamus celeritates ſecundum easdem directiones ſumtas, primo quidem pro corpore M:

celer. centri ſec. $pM = p'$; ſec. $mM = m'$ et angularem in ſenſum $CaA = \mu'$

pro altero autem corpore N, ſit

celerit. centri ſec. $qN = n'$ et angularis in ſenſum $CbB = \nu'$

ſicque nunc totum negotium eo redit, vt ex datis celeritatibus ante conflictum, quae ſunt p, q, m, n, μ, ν definiantur celeritates poſt conflictum, quae ſunt $p', q', m', n', \mu', \nu'$, cognitis ſcilicet, quae initio iam indicauimus, maſſis corporum M et N, porro radiis a et b ac denique etiam momentis inertiae

$\alpha M a a$ et $\beta M b b$.

7. Antequam autem ſtatum corporum poſt conflictum definire liceat, nonnulla momenta ſunt probe perpendenda. Primo enim, quum nulla colliſio

lifio obliqua euenire queat, nifi in contactu corporum attritus contingat, frictionis ratio omnino haberi 'ebet, quoniam igitur frictio certae parti cuipiar adpreffionis mutuae aequalis cenferi folet, quae pa vulgo fiue $\frac{1}{3}$ fiue $\frac{1}{4}$, fiue etiam minor aeftimatur, prouti corpora fuerint magis minusue leuigata, loco huius fractionis hic in genere littera δ vtamur, ita vt vis qua ambo corpora fibi mutuo adprimuntur per δ multiplicata exhibeat quantitatem frictionis. Deinde vero imprimis difpiciendum eft, vtrum ambo corpora fint elaftica nec ne, et quum infiniti dentur gradus elafticitatis, hic duo praecipua corporum genera primum fumus contemplaturi. Primo fcilicet loco corpora omni elafticitate deftituta confiderabimus, deinde vero eiusmodi corpora, quae perfecte fint elaftica, feu in quibus impreffiones inter conflictum inductae perfecte reftituantur. De vtroque autem genere tenendum eft, impreffiones fibi mutuo factas, quam minimas effe debere, quia alioquin regulae, quas fumus daturi ob figuram mutatam non amplius locum habere poffent, vnde corpora molliora hinc excludi oportet. Denique quo fequentes calculi fiant faciliores breuitatis gratia loco formulae

$$\delta \frac{\alpha(\beta+1)M+\beta(\alpha+1)N}{\alpha\beta(M+N)},$$

fcribamus fimpliciter Δ; ita vt fieret $\Delta = 0$, fi frictio euanefceret.

I. Col-

I. Collisio corporum omnis elateris expertium.

8. Hic ante omnia has duas formulas probe perpendi oportet, $m + a\mu$ et $n + b\nu$, quarum illa indicat veram celeritatem puncti C quatenus ad corpus prius M pertinet, secundum directionem CD, normalem ad axem MN, haec vero indicat celeritatem eiusdem puncti C quatenus ad alterum corpus pertinet in eadem directione CD, prout enim hae duae formulae inter se fuerint vel aequales, casus collisionis sollicite distingui oportet, atque insuper casus inaequalitatis, duplici modo considerari debent, prouti differentia istarum formularum, fuerit vel minor vel maior, quam haec formula $\Delta(p-q)$, vnde cum ipsa differentia illa possit esse vel positiua vel negatiua, hinc quinque casus nascuntur, secundum quos collisionis praecepta exhiberi oportet.

Casus Primus.

quo $m + a\mu = n + b\nu$.

9. Hoc casu post collisionem habebimus

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq}{M + N};\ m' = m;\ \mu' = \mu$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{Mp + Nq}{M + N};\ n' = n;\ \nu' = \nu.$$

Casus Secundus.

quo $m + a\mu > n + b\nu$ et $m + a\mu < n + b\nu + \Delta(p-q)$, ponatur ergo $m + a\mu = n + b\nu + \gamma\Delta(p-q)$

ita

ita vt ſit γ certa fractio vnitate minor.

Pro hoc caſu poſt colliſionem habebitur

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp+Nq}{M+N};\; m' = m - \frac{\delta\gamma N(p-q)}{M+N};\; \mu' = \mu - \frac{\gamma\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore vero N:

$$q' = \frac{Mp+Nq}{M+N};\; n' = n + \frac{\gamma\delta M(p-q)}{M+N};\; \nu' = \nu + \frac{\gamma\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

Caſus Tertius.

quo $m + a\mu > n + b\nu + \Delta(p-q)$.

Pro hoc caſu poſt colliſionem habebitur

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp+Nq}{M+N};\; m' = m - \frac{\delta N(p-q)}{M+M};\; \mu' = \mu - \frac{\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore N

$$q' = \frac{Mp+Nq}{M+N};\; n' = n + \frac{\delta M(p-q)}{M+N};\; \nu' = \nu + \frac{\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

Caſus Quartus.

quo $n+b\nu > m+a\mu$, at $n+b\nu < m+a\mu+\Delta(p-q)$,

ponatur $n + b\nu = m + a\mu + \gamma\Delta(p-q)$,

ita vt ſit γ fractio vnitate minor.

Pro hoccaſu poſt colliſionem habebitur

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp+Nq}{M+N};\; m' = m + \frac{\gamma\delta N(p-q)}{M+N};\; \mu' = \mu + \frac{\gamma\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{Mp+Mq}{M+N};\; n' = n - \frac{\gamma\delta M(p-q)}{M+N};\; \nu' = \nu - \frac{\gamma\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

Casus Quintus.

pro $n+b\nu > m+a\mu+\Delta(p-q)$.

Pro hoc casu post collisionem habebitur

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp+Nq}{M+N};\quad m' = m + \frac{\delta N(p-q)}{M+N};\quad \mu' = \mu + \frac{\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{Mp+Nq}{M+N};\quad n' = n - \frac{\delta M(p-q)}{M+N};\quad \nu' = \nu - \frac{\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

10. Quemadmodum in primo casu est:

$m + a\mu = n + b\nu$,

ita si fuerit

$m + a\mu > n + b\nu$,

tum vel casus secundus vel tertius locum habet, ita vt casus secundus medium quoddam teneat inter primum et tertium, atque si sit $\gamma = 0$ in primum recidat, sin autem sit $\gamma = 1$, in tertium. Simili modo tam pro quarto, quam pro quinto casu est

$n + b\nu > m + a\mu$

et casus quartus certum tenet medium inter primum et quintum, ita vt si sit $\gamma = 0$, in primum, sin autem sit $\gamma = 1$ in quintum cadat. Praeterea etiam manifestum est, si frictio penitus euanesceret, tum omnes hos quinque casus prorsus inter se conuenire, atque ad solum primum reduci, ita vt omnis diuersitas horum casuum soli frictioni sit tribuenda. Quodsi ergo nulla esset frictio seu $\delta = 0$, in collisione tantum celeritates secundum directionem

nem ictus A B mutationem paterentur, celeritates vero laterales secundum directiones m M et n N prorsus immutatae relinquerentur, quin etiam motus gyratorius vtriusque corporis neutiquam per conflictum afficeretur. Huc autem redeunt omnia ea, quae ante de collisione corporum obliqua sunt tradita, ex quo omnes mutationes, quae hic occurrunt, a sola frictione originem ducunt.

11. Quodsi iam nostros quinque casus perpendamus, statim apparet, frictionem in celeritates p et q, quae in directione conflictus A B sunt constitutae, plane non influere, pro omnibus enim casibus semper est

$$p' = q' = \frac{Mp + Nq}{M + N},$$

ita vt secundum hanc directionem ambo corpora post conflictum communi motu progrediantur, cuius celeritas communi corporum centro grauitatis conueniat.

12. Quod deinde ad celeritates laterales attinet, quae ante conflictum sunt m et n, post conflictum vero m' et n'; manifestum est pro omnibus casibus fore

$$M m' + N n' = M m + N n$$

siue etiam in his celeritatibus quantitatem motus conseruari. Porro vero circa motus gyratorios perpetuo haec proprietas subsistet

$$\alpha M a \mu' + \beta N b \nu' = \alpha M a \mu + \beta N b \nu,$$

 quae

quae aequatio quodammodo conferuationem motus gyratorii continere eſt cenſenda. Denique vero etiam haec conditio in omnibus caſibus locum inuenit, vt ſit

$$m' - \alpha a \mu' = m - \alpha a \mu \text{ ſiue } m' - m = \alpha a (\mu' - \mu)$$

atque $n' - \beta b \nu' = n - \beta b \nu$ ſeu $n' - n = \beta b (\nu' - \nu)$.

13. Vt aliquod exemplum notatu dignum adferamus, ponamus maſſam corporis N eſſe quaſi infinitam eiusque centrum ante conflictum quieſcere ita, vt ſit $q = 0$ et $n = 0$, motum autem eius gyratorium celeritate angulari ν exhiberi, tum vero alterum corpus M in id directe incurrat ſecundum directionem A B celeritate $= p$, celeritas autem tam lateralis m, quam gyratoria μ euaneſcat, hoc poſito quum ſit

$$m + a \mu = 0 \text{ et } n + b \nu = b \nu$$

euidens eſt, hanc quaeſtionem vel ad caſum quartum vel quintum referendam eſſe, ſcilicet ad quartum caſum pertinebit, ſi ob

$$\Delta = \delta \frac{(\alpha + 1)}{\alpha} \text{ fuerit } b \nu < \frac{\delta (\alpha + 1) p}{\alpha} < \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \delta p$$

ſin autem ſit

$$b \nu > \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \delta p,$$

tum ad quintum caſum pertinebit. Pro caſu quarto quum ſit

$$\gamma = \frac{\alpha b \nu}{(\alpha + 1) \delta p}$$

poſt conflictum habebimus

$$p' = 0; \; m' = \frac{\alpha b \nu}{\alpha + 1}; \text{ et } \mu' = \frac{b \nu}{(\alpha + 1) a}$$

tum

tum vero

$$q' = 0; \quad n' = 0 \quad \text{et} \quad \nu' = \nu$$

verum si casus quintus locum habeat, post conflictum erit pro corpore M

$$p' = 0; \quad m' = \delta p \quad \text{et} \quad \mu' = \frac{\delta p}{\alpha a}.$$

II. Collisio corporum perfecte elasticorum.

14. Totum iudicium hic iterum exordiendum est a formulis $m + a\mu$ et $n + b\nu$, vtrum eae sint aequales an inaequales, hocque casu vtra maior vel minor? tum vero differentiam comparari oportet, cum formula $2\Delta(p-q)$, an ea maior sit minorue, vnde simili modo quinque casus diuersi euoluendi occurrunt.

Casus Primus.

quo $m + a\mu = n + b\nu$.

Pro hoc casu habebimus post collisionem

pro corpore M

$$p' = \frac{(M-N)p + 2Nq}{M+N}; \quad m' = m; \quad \mu' = \mu$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{(N-M)q + 2Mp}{M+N}; \quad n' = n; \quad \nu' = \nu.$$

Casus Secundus.

quo $m + a\mu > n + b\nu$ at $\mu + a\mu < n + b\nu + 2\Delta(p-q)$

ponatur ergo $m + a\mu = n + b\nu + 2\gamma\Delta(p-q)$, ita vt γ sit fractio vnitate minor.

Pro hoc casu post collisionem habebitur

 pro

pro corpore M

$$p' = \frac{(M - N)p + 2Nq}{M + N}$$

$$m' = m - \frac{2\gamma\delta N(p - q)}{M + N};\; \mu' = \mu - \frac{2\gamma\delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

pro corpore autem N

$$q' = \frac{(N - M)q + 2Mp}{M + N}$$

$$n' = n + \frac{2\gamma\delta M(p - q)}{M + N};\; \text{et } \nu' = \nu + \frac{2\gamma\delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}.$$

Casus tertius.

quo $m + a\mu > n + b\nu + 2\Delta(p - q)$.

Pro hoc casu post collisionem erit

pro corpore M

$$p' = \frac{(M - N)p + 2Nq}{M + N};\; m' = m - \frac{2\delta N(p - q)}{M + N};$$

$$\mu' = \mu - \frac{2\delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

pro corpore autem N

$$q' = \frac{(N - M)q + 2Mp}{M + N};\; n' = n + \frac{2\delta M(p - q)}{M + N};$$

$$\text{et } \nu' = \nu + \frac{2\delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}.$$

Casus Quartus.

quo $n + b\nu > m + a\mu$ at $n + b\nu < m + a\mu + 2\Delta(p - q)$ ponatur ergo $n + b\nu = m + a\mu + 2\gamma\Delta(p - q)$, ita vt sit γ fractio vnitate minor.

Hoc ergo casu post collisionem habebimus:

pro corpore M

$$p' = \frac{(M - N)p + 2Nq}{M + N};\; m' = m + \frac{2\gamma\delta N(p - q)}{M + N};\; \mu' = \mu + \frac{2\gamma\delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{(N - M)q + 2Mp}{M + N};\; n' = n - \frac{2\gamma\delta M(p - q)}{M + N};\; \nu' = \nu - \frac{2\gamma\delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}.$$

Casus

Casus Quintus.

quo $n + b\nu > m + a\mu + 2\Delta(p-q)$.

Pro hoc ergo casu, post collisionem habemus

pro corpore M

$$p' = \frac{(M-N)p + 2Nq}{M+N};\quad m' = m + \frac{2\delta N(p-q)}{M+N};\quad \mu' = \mu + \frac{2\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

et pro corpore N

$$q' = \frac{(N-M)p + 2Mq}{M+N};\quad n' = n - \frac{2\delta M(p-q)}{M+N};\quad \nu' = \nu - \frac{2\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

15. Hic iterum vt supra imprimis animaduerti conuenit, si omnis frictio euanuerit, ob $\delta = 0$, omnes hos quinque casus ad perfectum consensum reduci, ita vt celeritates post conflictum eosdem valores obtineant, qui in casu primo sunt expressi, quae determinationes conueniunt cum iis, quae vulgo ex sola motus resolutione pro collisione obliqua huiusmodi corporum deduci solent, omnis igitur diuersitas in nostris casibus a sola frictione proficiscitur.

16. In omnibus his quinque casibus, celeritates secundum directionem conflictus A B, quae sunt p' et q', prorsus inter se conueniunt, iisque propterea nulla mutatio ob frictionem infertur. Circa has celeritates autem imprimis notasse iuuabit fore

$$M p' + N q' = M p + N q,$$

prorsus vti conseruatio motus postulat. Praeterea vero notatu dignum hic occurrit esse semper

$$q' - p' = p - q,$$

ex quibus duabus proprietatibus colligitur haec maxime memorabilis, quod sit

$$M p' p' + N q' q' = M p^2 + N q^2$$

qua

qua conſeruatio virium viuarum continetur, ſi enim ad quadratum prioris aequationis quadratum alterius in MN ductum addatur et ſumma per $M+N$ diuidatur, haec ipſa formula reſultat.

17. Quod vero ad celeritates m' et n' attinet, omnes caſus in hoc conueniunt, vt ſit

$$Mm' + Nn' = Mm + Nn,$$

qua conſeruatio motus indicatur, hoc autem loco circa vires viuas nihil concluditur: Etſi enim ex primo caſu oritur

$$Mm'm' + Nn'n' = Mmm + Nnn,$$

tamen ex reliquis longe alius valor eruitur, ita vt hic vires viuae locum non habeant.

18. Ratione motus gyratorii autem, omnes quinque caſus in hoc conueniunt, quod ſit

$$\alpha M a \mu' + \beta N b \nu' = \alpha M a \mu + \beta N b \nu,$$

deinde vero ſi iſte motus cum laterali conferatur, omnibus caſibus ſequentes quoque proprietates conueniunt:

$$m' - \alpha a \mu' = m - \alpha a \mu, \text{ ſiue } m' - m = \alpha a(\mu' - \mu)$$
$$\text{et } n' - n = \beta b(\nu' - \nu).$$

19. Exempli loco, ſtatuamus iterum corporis N maſſam quaſi infinitam, cuius centrum ante conflictum quieuerit, ſolo motu gyratorio ei relicto celeritate angulari $= \nu$, pro altero autem corpore M ante conflictum fuerit $m = 0$ et $\mu = 0$, quibus poſitis habebimus caſum quartum, ob $q = 0$ et $n = 0$, ſi fuerit

$$b\nu \lessgtr 2\left(1 + \tfrac{1}{\alpha}\right)\delta p, \text{ quo caſu erit } \gamma\delta = \frac{\alpha b \nu}{2(\alpha+1)p}$$

at,

at ſi fuerit

$$b\nu < 2\left(1+\tfrac{1}{\alpha}\right)\delta p,$$

tunc caſus quintus locum habet, conſequenter pro caſu quarto corpus M poſt colliſionem his feretur celeritatibus

$$p' = -p;\ m' = +\frac{\alpha b \nu}{\alpha+1};\ \mu' = \frac{b\nu}{(\alpha+1)\alpha}.$$

pro caſu autem quinto, hae celeritates erunt

$$p' = -p;\ m' = 2\delta p;\ \mu' = \frac{2\delta p}{\alpha\alpha}$$

alterum autem corpus N, motum ſuum conſeruat.

III. Colliſio corporum non perfecte elaſticorum.

20. Ex binis praecedentibus corporum generibus facile poſſumus deducere, regulas pro colliſione corporum non perfecte elaſticorum, in quibus ſcilicet impreſſiones ſibi inuicem inductae non penitus reſtituuntur. Quoniam igitur tantum ex parte reſtituuntur, denotet littera ε eam partem, quae actu reſtituitur, ita vt ſi fuerit $\varepsilon = 0$, corpora omni elaſticitate deſtituantur, ſin autem ſit $\varepsilon = 1$, corpora habeantur perfecte elaſtica, vnde intelligitur fractionem ε gradum elaſticitatis commode exprimere, quo poſito ſi ante conflictum omnia manent eadem, vt ſupra ſunt conſtituta, regulae colliſionis per quinque caſus diſtributae ſequenti modo ſe habebunt.

Caſus Primus.

quo $m + a\mu = n + b\nu$.

Hoc caſu poſt colliſionem erit

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq - \varepsilon N(p-q)}{M+N};\ m' = m;\ \mu' = \mu$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{Mp + Nq + \varepsilon M(p-q)}{M+N};\ n' = n \text{ et } \nu' = \nu.$$

Caſus Secundus.

quo $m + a\mu > n + b\nu$ et $m + a\mu < n + b\nu + (1+\varepsilon)\Delta(p-q)$ ponatur ergo $m + a\mu = n + b\nu + \gamma(1+\varepsilon)\Delta(p-q)$ ita, vt γ ſit fractio vnitate minor.

Pro hoc ergo caſu, poſt colliſionem habebimus

$$p' = \frac{Mp + Nq - \varepsilon N(p-q)}{M+N};\ m' = m - (1+\varepsilon)\frac{\gamma\delta N(p-q)}{M+N};$$

$$\mu' = \mu - \frac{(1+\varepsilon)\gamma\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore autem N

$$q' = \frac{Mp + Nq + \varepsilon M(p-q)}{M+N};\ n' = n + (1+\varepsilon)\frac{\gamma\delta M(p-q)}{M+N}$$

$$\nu' = \nu + (1+\varepsilon)\gamma\delta.\frac{M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

Caſus Tertius.

quo $m + a\mu > n + b\nu + (1+\varepsilon)\Delta(p-q)$.

Pro hoc caſu poſt conflictionem erit

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq - \varepsilon N(p-q)}{M-N};\ m' = m - (1+\varepsilon)\delta\frac{N(p-q)}{M+N}$$

$$\mu' = \mu - (1+\varepsilon)\delta.\frac{N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore N

$$q' = \frac{Mp + Nq + \varepsilon M(p-q)}{M+N};\ n' = n + (1+\varepsilon)\delta\frac{M(p-q)}{M+N}$$

$$\nu' = \nu + (1+\varepsilon)\delta.\frac{M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

Caſus

Casus Quartus.

quo $n+b\nu > m+a\mu$, at $n+b\nu < m+a\mu+(1+\varepsilon)\Delta(p-q)$; ponatur ergo $n+b\nu = m+a\mu+(1+\varepsilon)\gamma\Delta(p-q)$, ita vt sit γ fractio vnitate minor.

Hoc casu post collisionem erit

pro corpore M

$p' = \frac{Mp+Nq-\varepsilon N(p-q)}{M+N}$; $m' = m+(1+\varepsilon)\gamma\delta.\frac{N(p-q)}{M+N}$

$\mu' = \mu+(1+\varepsilon)\gamma\delta.\frac{N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$

pro corpore vero N

$q' = \frac{Mp+Nq+\varepsilon M(p-q)}{M+N}$; $n' = n-(1+\varepsilon)\gamma\delta.\frac{M(p-q)}{M+N}$

$\nu' = \nu-(1+\varepsilon)\gamma\delta.\frac{M(p-q)}{\beta b(M+N)}$.

Casus Quintus.

quo $n+b\nu > a\mu+(1+\varepsilon)\Delta(p-q)$

Pro hoc casu post collisionem habemus

pro corpore M

$p' = \frac{Mp+Nq-\varepsilon N(p-q)}{M+N}$; $m' = m+(1+\varepsilon)\delta.\frac{N(p-q)}{M+N}$

$\mu' = \mu+(1+\varepsilon)\delta.\frac{N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$

pro corpore N

$q' = \frac{Mp+Nq+\varepsilon M(p-q)}{M+N}$; $n' = n-(1+\varepsilon)\delta.\frac{M(p-q)}{M+N}$;

$\nu' = \nu-(1+\varepsilon)\delta.\frac{M(p-q)}{\beta b(M+N)}$.

21. Hic iterum ambae celeritates p' et q' per omnes quinque casus eosdem retinent valores, atque etiamnunc quantitas motus eadem conseruatur, quum sit

$$M p' + N q' = M p + N q.$$

Quod autem ad vires viuas attinet, quoniam hic fit

$$q' - p' = \varepsilon (p - q),$$

fi ad quadratum illius aequationis addamus huius quadratum per MN multiplicatum, et per M+N, diuidamus, refultat fequens aequatio:

$$M p' p' + N q' q' = M p p + N q q - (1 - \varepsilon\varepsilon) \frac{MN}{M+N} (p - q)^2$$

ex qua patet, fummam virium viuarum poft collifionem femper minorem effe, quam ante, nifi fit $\varepsilon = 1$ et iacturam aequari

$$= (1 - \varepsilon\varepsilon) \frac{MN}{M+N} (p - q)^2.$$

22. Praeterea pro omnibus quiuque cafibus iterum erit

$$M m' + N n' = M m + N n,$$

tum vero etiam

$$\alpha M a \mu' + \beta N b \nu' = \alpha M a \mu + \beta N b \nu,$$

denique etiam hae proprietates omnibus funt communes, vt fit

$$m' - m = \alpha a (\mu' - \mu) \text{ et } n' - n = \beta b (\nu' - \nu)$$

atque adeo hae proprietates femper valent, fiue corpora fint elaftica, fiue fecus, quoniam in his formulis non folum littera δ, fed etiam littera ε ex calculo eft egreffa.