1773

De collisione corporum gyrantium

Leonhard Euler

DE COLLISIONE CORPORVM GYRANTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

Problema I.

Si globus circa axem fixum in gyrum agatur, celeritate quacunque, in eamque impingat directe alius globus; definire conflictum, siue motum, quo posterior globus post conflictum mouebitur, quandoquidem prior globus vi aliena perpetuo in motu suo gyratorio conseruetur.

Solutio.

Tab. IV. Fig. 1. 1. Axis fixus circa quem prior globus gyratur, perpendicularis concipiatur ad planum tabulae, sitque eius centrum in A et radius $AD = a$, ducaturque directio fixa, quae sit ADE, ad quam tamquam axem elementa calculi referamus; ponamus istius globi radium $AD = a$ et celeritatem gyratoriam seu angularem $= \alpha$, qua hic globus in sensum DCF in gyrum agatur, ita vt eius celeritas in puncto D vel C sit $= \alpha a$, vbi notandum α esse angulum vno minuto secundo absoluendum.

2. Quia

2. Quia conflictum fieri in directum assumimus, necessum est, vt centrum alterius globi in ipso plano tabulae proferatur, ponamus autem huius globi radium $= b$, eiusque massam $=$ B, ita autem sit comparatus, vt eius centrum inertiae in ipsum centrum globi incidat. Qualem autem motum hic globus ante conflictum habuerit, deinceps indicemus, quoniam in ipsa Analysi, quatenus ex principiis Mechanicae instituitur, nihil refert, quicunque fuerit status initialis.

3. Postquam conflictus inchoauerit et etiamnunc durat elapso tempore $= t''$, teneat alter globus situm in figura repraesentatum, cuius centrum sit B ideoque ducta recta A B, contactus mutuus in punctum C incidet, foretque centrorum distantia A B $= a + b$, nisi ob conflictum quaepiam impressio mutua esset producta, vnde ob hanc impressionem distantia A B aliquantillum erit minor, quare posito breuitatis gratia $a + b = c$, fit nunc distantia A B $= c - s$, vbi quidem tenendum est, hanc quantitatem s semper fore quam minimam, dum autem ambo globi per hoc spatiolum $= s$, in se mutuo quasi penetrarunt, in ipso contactu C nascetur certa vis vlteriori penetrationi reluctans, quae sit $=$ S, haecque in globum B aget secundum directionem C B, quamquam autem hanc vim a priori definire non licet, tamen ea certe spectari poterit, vt functio ipsius s.

4. Ponatur nunc angulus E A B $= \Phi$, et ex B ad rectam fixam A E ducta normali B X, vo-

catisque coordinatis $AX = x$ et $BX = y$, habebimus

$$x = (c-s)\cos.\Phi \text{ et } y = (c-s)\sin.\Phi$$

vnde fit

$$x\cos.\Phi + y\sin.\Phi = c - s \text{ atque } x\sin.\Phi - y\cos.\Phi = 0,$$

quas formulas in posterum plurimum notasse iuuabit. Constitutis his coordinatis motum centri globi B exprimere poterimus, quippe cuius celeritas secundum directionem A E erit $= \frac{dx}{dt}$ et secundum directionem $XB = \frac{dy}{dt}$, quatenus autem hic globus a vi S in directione C B vrgetur, inde nascetur vis in

directione $AX = S.\cos.\Phi$ et in

directione $XB = S.\sin.\Phi$.

5. Quia vero globus A in gyrum agitur in sensum D C F, simul ac alter globus eum contingere incoepit, ipsi tam ob impressionem, quam ob frictionem inducetur etiam motus gyratorius in sensum C G H, cuius celeritas angularis praesenti momento, sit $= \frac{d\zeta}{dt}$, ita vt celeritas in puncto C futura sit $= \frac{d\zeta}{dt}$, quoniam hic exiguam illam diminutionem ob particulam s negligere licet, cuius celeritatis directio erit recta $C\gamma$ ad B C normalis. Haec scilicet foret celeritas puncti C, si centrum globi B quiesceret; verum quia ipsum centrum motum habet ante assignatum, idem quoque insuper puncto C tribui debet. Quatenus autem punctum C in directione A X celeritate $= \frac{dx}{dt}$ fertur, inde in directionem $C\gamma$ resultat celeritas $-\frac{dx}{dt}\sin.\Phi$, ex altera vero

ro celeritate $\frac{dy}{dt}$ in directione X B resultat $\frac{dy}{dt}$ cos. Φ ita vt vera celeritas globi B in puncto C futura sit

$$\frac{b\,d\zeta}{dt} - \frac{dx}{dt} \text{ sin. } \Phi + \frac{dy}{dt} \text{ cos. } \Phi,$$

quum autem sit

$$x \text{ sin. } \Phi - y \text{ cos. } \Phi = 0$$

erit differentiando

$$dx \text{ sin. } \Phi - dy \text{ cos. } \Phi + d\Phi(x \text{ cos. } \Phi + y \text{ sin. } \Phi) = 0$$

vnde fit

$$dx \text{ sin. } \Phi - dy \text{ cos. } \Phi = -d\Phi(c - s),$$

quare vera celeritas illa secundum C γ obtinetur

$$= \frac{b\,d\zeta}{dt} + \frac{d\Phi}{dt}(c - s).$$

6. Quatenus autem punctum C in priori globo A accipitur, eius celeritas in eadem directione C γ est $a\alpha$, cui si illa celeritas esset aequalis, nullus attritus in contactu contingeret, nulla ergo vis exsurgeret, motum gyratorium globi B siue accelerans siue retardans. Verum quamdiu celeritas $a\alpha$ maior est celeritate

$$\frac{b\,d\zeta}{dt} + \frac{d\Phi}{dt}(c - s)$$

attritus orietur, quo celeritas gyratoria globi C γ accelerabitur, contra vero si

$$\frac{b\,d\zeta}{dt} + \frac{d\Phi}{dt}(c - s)$$

maior esset quam illa $a\alpha$, motus gyratorius globi B retardaretur, quam ob rem hi tres casus probe a se inuicem distingui conuenit.

I^{mus} Casus quo $a\alpha > \frac{b\,d\zeta}{dt} + (c-s)\frac{d\Phi}{dt}$ et motus gyratorius globi B acceleratur.

II^{dus} Quo $a\alpha = \frac{b\,d\zeta}{dt} + (c-s)\frac{d\Phi}{dt}$ et motus iste nullam alterationem patitur, ac

III^{tius} quo $a\alpha < \frac{b\,d\zeta}{dt} + (c-s)\frac{d\Phi}{dt}$ motusque ille retardatur.

7. Haec autem vis siue accelerans siue retardans motum gyratorium globi B ob frictionem nascitur, quam nouimus partim ab aspritie in contactu, partim vero a mutua pressione, qua ambo corpora se vrgent, pendere. Quum igitur hi duo globi se mutuo vrgeant vi $= S$, frictio commode exprimi solet formula δS, vbi δ est certa fractio ab aspritie pendens, quae plerumque aestimatur $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ vel si corpora fuerint probe leuigata adhuc minor, consequenter globus B in puncto C, secundum directionem Cγ ita sollicitatur, vt haec vis pro *primo* casu sit $= + \delta S$, pro *secundo* casu $= 0$ at pro *tertio* casu $= - \delta S$.

8. Ne opus habeamus hos tres casus perpetuo a se inuicem distinguere, sit $b\,a$ breuitatis gratia $= \Sigma$ vis secundum directionem Cγ agens, ita vt sit casu primo

$\Sigma = \delta S$, casu secundo $\Sigma = 0$ et casu tertio $\Sigma = - \delta S$.

Haec autem vis Σ non solum motum gyratorium globi B afficit, sed etiam eius motum progressiuum, idque perinde, ac si in ea in ipso centro B esset applicata, inde ergo orietur vis secundum

$AX = - \Sigma \sin. \Phi$

et

et ſecundum directionem

$XB = + \Sigma$ coſ. Φ

vnde omnes vires motum progreſſiuum huius globi ſollicitantes erunt:

I^a. Vis ſecundum directionem $AX = S$ coſ. $\Phi - \Sigma$ ſin. Φ

II^{da} ſecundum directionem $XB = S.$ ſin. $\Phi + \Sigma$ coſ. Φ.

Ex his viribus accelerantibus, poſita altitudine ex qua graue delabitur vno ſecundo $= g$, ſumtoque elemento dt conſtante, motus progreſſiuus globi b determinabitur his duabus aequationibus:

I. $\frac{B.ddx}{2gdt^2} = S.$ coſ. $\Phi - \Sigma$ ſin. Φ

II. $\frac{B.ddy}{2gdt^2} = S.$ ſin. $\Phi + \Sigma$ coſ. Φ,

at vero pro eius motu gyratorio, ſi globi momentum inertiae ponatur $= Bkk$, quia momentum vis Σ eſt $= \Sigma b$ habebitur iſta aequatio:

III. $\frac{Bkkdd\zeta}{2gdt^2} = \Sigma b$ ſiue $dd\zeta = \frac{2gb\Sigma dt^2}{Bkk}$.

9. Euoluamus primo duas aequationes priores, atque ex iis eliciemus has duas ſequentes:

ddx coſ. $\Phi + ddy.$ ſin. $\Phi = \frac{2gSdt^2}{B}$ et

ddy coſ. $\Phi - ddx.$ ſin. $\Phi = \frac{2g\Sigma dt^2}{B}$

quum autem ſit

x coſ. $\Phi + y$ ſin. $\Phi = c - s$ et x ſin. $\Phi - y$ coſ. $\Phi = \varphi$

erit vti iam vidimus

dx coſ. $\Phi + dy$ ſin. $\Phi = -ds$ et dx ſin. $\Phi - dy$ coſ. $\Phi = -(c-s)d\Phi$

 atque

atque vlterius differentiando

$$ddx\,\text{cof.}\,\Phi + ddy\,\text{fin.}\,\Phi = -dds - (c-s)d\Phi^2$$

$$ddy\,\text{cof.}\,\Phi - ddx\,\text{fin.}\,\Phi = (c-s)dd\Phi - 2dsd\Phi$$

confequenter binae aequationes motum progreffiuum definientes funt

$$\text{I.}\quad dds + (c-s)d\Phi^2 = -\frac{2gSdt^2}{B}\ \text{et}$$

$$\text{II.}\quad (c-s)dd\Phi - 2dsd\Phi = \frac{2g\Sigma dt^2}{B}.$$

10. In his duabus aequationibus tres occurrunt variabiles, t, Φ et s, fiquidem S et Σ funt functiones ipfius s, harum autem aequationum, quia funt differentiales fecundi gradus, refolutio maximas haberet difficultates, nifi commode vfu veniret, vt quantitatum t et Φ tantum differentialia, non vero ipfae occurrant atque hanc ob cauffam eas ad differentialia primi gradus reuocare licebit, fequenti modo. Ponatur

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{p}}\ \text{et}\ d\Phi = \frac{ds\sqrt{q}}{\sqrt{p}}$$

et quia dt erat conftans, prior pofitio praebet

$$0 = 2pdds - dsdp$$

vnde fit

$$dds = \frac{dpds}{2p},$$

altera vero praebet

$$dd\Phi = \frac{dds\sqrt{q}}{p} + \frac{dsdq}{2\sqrt{pq}} - \frac{dsdp\sqrt{q}}{2p\sqrt{p}} = \frac{dsdq}{2\sqrt{pq}},$$

quibus valoribus fubftitutis, ambae noftrae aequationes fequentes induent formas:

$$dp + 2(c-s)qds = -\frac{4gSds}{B}$$

$$(c-s)\frac{dq}{q} - 4ds = \frac{4g\Sigma ds}{B\sqrt{pq}}$$

in

in quibus adhuc insunt tres variabiles p, q et s, sicque binas priores p et q per posteriorem s definiri oportet, quo autem hoc facilius praestari possit, plurimum notasse iuuabit, quoniam s est particula admodum parua, hic loco $c-s$ scribi posse simpliciter c. Nulla autem patet via ad harum aequationum resolutionem perducens. Videtur autem hic potissimum eo spectari oportere, quod quantitas s sit quasi infinite parua, num forte hinc aliquid subsidium peti posset.

11. Quando autem s est quantitas vehementer exigua, quemadmodum vsu venit in corporibus saltem mediocriter duris; tum conflictus tam exiguo temporis puncto absoluitur, vt interea angulus Φ quam minimam mutationem subeat, ita vt quantitates s et Φ quasi infinite parua eiusdem ordinis spectari debeant, tum autem in prima aequatione secundus terminus $c\,d\,\Phi^2$ ad ordinem infinite paruorum quasi secundum pertinet ideoque respectu primi termini reiici poterit, simili modo in altera aequatione secundus terminus $-2\,d\,s\,d\,\Phi$ continens duas dimensiones infinite paruorum euanescit prae primo, vbi tantum vnica est dimensio, hoc autem admisso nostrae aequationes differentiales secundi gradus erunt:

$$d\,d\,s = -\frac{2\,g\,S\,d\,t^2}{B} \text{ et } c\,d\,d\,\Phi = 2\,g\,\frac{\Sigma\,d\,t^2}{B}$$

quarum prior per $d\,s$ multiplicata et integrata praebet

$$\frac{d\,s^2}{d\,t^2} = C - \frac{4\,g}{B}\int S\,d\,s,$$

vnde

vnde colligitur

$$dt = \pm \frac{ds}{\sqrt{(C - \frac{4g}{B} \int S\, ds)}}$$

iam secunda aequatio hoc modo expressa

$$\frac{c\, dd\Phi}{dt} = \frac{2g \Sigma\, dt}{B} = \pm \frac{2g \Sigma\, dt}{B \sqrt{(C - \frac{4g}{B} \int S\, ds)}}$$

integrale dabit

$$\frac{c\, d\Phi}{dt} = D \pm \frac{2g}{B} \int \frac{\Sigma\, ds}{\sqrt{(C - \frac{4g}{B} \int S\, ds)}}$$

quam formulam semper actu integrare licet, quia vel $\Sigma = 0$ vel $\Sigma = \pm S$.

12. Definito igitur motu progressiuo globi B, simili modo eius motum gyratorium definire poterimus, tertia enim aequatio supra inuenta

$$\frac{dd\zeta}{dt} = \frac{2gb \Sigma\, dt}{Bkk},$$ cuius integrale erit

$$\frac{d\zeta}{dt} = E \pm \frac{2gb}{Bkk} \int \frac{\Sigma\, ds}{\sqrt{(C - \frac{4g}{B} \int S\, ds)}},$$

quae formula denuo est integrabilis, et ex valoribus hic inuentis prioribus $\frac{ds}{dt}$, $\frac{d\Phi}{dt}$ celeritas motus progressiui globi B definiri potest, siquidem est

$$\frac{dx}{dt} = -c \sin. \Phi \frac{d\Phi}{dt} - \frac{ds}{dt} \cos. \Phi$$

et $\frac{dy}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} c \cos. \Phi - \frac{ds}{dt} \sin. \Phi.$

13.

13. At vero pro hoc motu perfecte cognoscendo etiam ipsum angulum Φ nosse debemus, quae inuentio nulla laborat difficultate, quum sit

$$\Phi = \int \pm \frac{ds}{\sqrt{(C - \frac{4g}{B}\int S ds)}}\left(\frac{D}{c} \pm \frac{2g}{Bc}\int \frac{\Sigma ds}{\sqrt{(C - \frac{4g}{B}\int S ds)}}\right).$$

Deinde eodem modo ipsa celeritas gyratoria globi B quae est $= \frac{d\zeta}{dt}$, ita reperietur expressa

$$\frac{d\zeta}{dt} = E \pm \frac{2gb}{Bkk}\int \frac{\Sigma ds}{\sqrt{(C - \frac{4g}{B}\int S ds)}}.$$

14. Expressiones autem has ob geminam integrationem nimis generales atque adeo vagas, ex statu initiali, quem merito vti datum spectamus, restringi et determinari oportet, iam autem innuimus initio fuisse $t = 0$ et quia tum conflictus incipit et nulla adhuc impressio facta est, erat etiam $s = 0$, ita vt posito $t = 0$, fiat etiam $s = 0$. Ponamus autem globi B ante conflictum motum ita fuisse comparatum, vt primus contactus contigerit in puncto D sicque initio fuerit $\Phi = 0$; deinde vero huius globi celeritatem secundum directionem EA fuisse $= m$ et in directione ID $= n$, ita vt hic globus in directione LD aduenerit, denique vero eidem globo ante conflictum tribuamus motum gyratorium $= \gamma$ in eundem sensum CGH, hinc igitur facto $t = 0$ debet esse

$$\frac{dx}{dt} = -m \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = n,$$

quia igitur initio erat $\sin.\Phi = 0$ et $\cos.\Phi = 1$, erat vtique

$$m = \frac{ds}{dt} \quad \text{et} \quad n = c.\frac{d\Phi}{dt},$$

 ita

ita vt pro initio fieri debeat

$$\frac{ds}{dt} = m \quad \text{et} \quad \frac{c\,d\Phi}{dt} = n.$$

Denique pro motu gyratorio initio fieri debet $\frac{d\zeta}{dt} = \gamma$.

15. Quare ſi primum integrale $\int S\,ds$ ita capiamus vt poſito $s = 0$, quod initio euenit, euaneſcat pro prima aequatione §. 11.

$$\frac{ds^2}{dt^2} = C - \frac{4g}{B}\int S\,ds,$$

fit conſtans $C = m^2$ ita, vt haec prima aequatio determinata ſit

$$\frac{ds^2}{dt^2} = mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds, \text{ hincque}$$

$$\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{(mm - \tfrac{4g}{B}\int S\,ds)} \text{ ergo } dt = \frac{ds}{\sqrt{(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}}.$$

Pro ſecunda aequatione integrata, fit conſtans illa $D = n$ ſiquidem ſequens integrale

$$\int \frac{\Sigma\,ds}{\sqrt{(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}}$$

euaneſcat ipſo initio, ſicque haec ſecunda aequatio ita ſe habebit

$$\frac{c\,d\Phi}{dt} = n + \frac{2g}{B}\int \frac{\Sigma\,ds}{\sqrt{(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}};$$

quoniam autem Σ eſt $= \pm \delta S$ niſi $= 0$, haec formula actu integrata dat

$$\frac{c\,d\Phi}{dt} = n \pm \delta\,(m - \sqrt{(mm - \tfrac{4g}{B}\int S\,ds)})$$

hincque porro ob

$$c\,d\Phi = (n \pm \delta m)\,dt \mp \delta.\,ds$$

conclu-

concluditur ipſe angulus

$$\Phi = \frac{(n \pm \delta m)t}{c} \mp \frac{\delta s}{c}$$

quae expreſſio ſponte euaneſcit in initio.

Simili modo pro motu gyratorio ſumto iterum $\Sigma = \pm \delta S$ habebimus primo

$$\frac{d\zeta}{dt} = \pm \frac{2\delta bg}{Bkk} \int \frac{S\,ds}{\sqrt{(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}} = \gamma \pm \frac{\delta b}{kk}(m - \sqrt{(mm - \tfrac{4g}{B}\int S\,ds)})$$

ſicque omnes formulae ſolutionem continentes ſunt penitus determinatae, atque ex his deducimus vtramque celeritatem progreſſiuam

$$\frac{dx}{dt} = -n\,\text{ſin.}\Phi \mp \delta\,\text{ſin.}\Phi(m - \sqrt{(mm - \tfrac{4g}{B}\int S\,ds)}) - \text{coſ.}\Phi\sqrt{(mm - \tfrac{4g}{B}\int S\,ds)}$$
$$= -\text{ſin.}\Phi(n \pm \delta m) + \sqrt{(mm - \tfrac{4g}{B}\int S\,ds)}(-\text{coſ.}\Phi \mp \delta\,\text{ſin.}\Phi)$$

et $\frac{dy}{dt} = (n \pm \delta m)\text{coſ.}\Phi - (\text{ſin.}\Phi \pm \delta\,\text{coſ.}\Phi)\sqrt{(mm - \tfrac{4g}{B}\int S\,ds)}$

quarum illa pro initio manifeſto dat

$\frac{dx}{dt} = -m$ et altera $\frac{dy}{dt} = +n$.

16. Hoc ergo modo ſatis feliciter problema reſoluimus, ſiquidem ambo corpora fuerint ita dura, vt impreſſio facta tanquam infinite parua ſpectari poſſit, quum autem omnes formulae, quae ſolutionem conſtituunt, inuoluant functionem S, cuius natura nobis neutiquam eſt cognita, quoniam tantum nouimus creſcente impreſſione s, etiam functionem S augeri, hae formulae nobis parum lucis ſuppeditant ad cognitionem omnium mutationum, quae motui globi B durante conflictu inducuntur. Verum parum refert omnes has mutationes accurate cognoviſſe,

viſſe, dummodo eius motum, quem finito conflictu eſt habiturus, aſſignare valeamus; quare in hoc nobis erit elaborandum, vt id temporis momentum inueſtigemus, quo conflictus penitus ceſſat. Hic autem finis conflictus definiri non poteſt, niſi conſtet, vtrum ambo corpora propoſita ſint elaſtica nec ne, atque hinc duo genera principalia ſunt conſtituenda, quorum priore ambos globos omni elaſticitate deſtitutos aſſumemus, altero vero vtrique perfectam elaſticitatem tribuemus.

Primum genus globorum omni elaſticitate carentium.

17. Quando ambo corpora nulla prorſus elaſticitate ſunt praedita conflictus eo vsque tantum durat, quoad impreſſio ſibi mutuo facta, ſeu ſpatium s maximum euaſerit, tum enim ſubito vis repellens S euaneſcit, quoniam impreſſiones inductae non reſtituuntur atque tum globi non amplius in ſe mutuo agunt, ceſſante enim mutua actione ipſe conflictus ceſſat. Hoc ergo genere conflictus finitur, quando valor formulae $\frac{ds}{dt}$ in nihilum abit. Quum igitur inuenerimus §. 15.

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(mm - \tfrac{4g}{B}\int S\,ds)}$$

hic valor euaneſcit, quando fit

$$mm = \tfrac{4g}{B}\int S\,ds\text{, ſiue }\int S\,ds = \tfrac{mmB}{4g};$$

ſcilicet cum initio eſſet $s = 0$ et $S = 0$ eo vsque s cum S creſcit, donec fiat

$$\tfrac{4g}{B}\int S\,ds = mm,$$

atque

atque tum conflictus subito finitur. Substituamus igitur vbique hunc valorem loco $\int S\,ds$, atque formulae ante inuentae sequenti modo determinabuntur

I°. $\frac{ds}{dt} = 0$; II°. $\frac{c\,d\Phi}{dt} = n \pm \delta m$; III°. $\Phi = \frac{(n \pm \delta m)t}{c} \mp \frac{\delta s}{c}$

IV°. $\frac{d\zeta}{dt} = \gamma \pm \frac{\delta m b}{kk}$.

18. Pro motu ergo progressiuo globi B post conflictum habebimus primo eius celeritatem, secundum directionem A X siue

$$\frac{dx}{dt} = -(n \pm \delta m)\,\text{fin.}\,\Phi,$$

deinde celeritatem in directione

$$X B = \frac{dy}{dt} = (n \pm \delta m)\,\text{cof.}\,\Phi$$

atque tertio pro eius motu gyratorio celeritatem angularem

$$\frac{d\zeta}{dt} = \gamma \pm \frac{\delta m b}{kk},$$

vnde intelligitur, ista motus momenta perfecte cognosci non posse, nisi pro fine conflictus innotescat tam tempus t, quam quantitas impressionis s, his enim inuentis etiam angulus Φ erit cognitus; at vero inter s et t hanc elicuimus relationem

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}}$$

quocirca hic nihil certi definire licet, nisi natura functionis S fuerit perspecta.

19. Quo igitur hinc saltem aliquid colligere liceat, fingamus aliquam hypothesin a veritate non adeo abhorrentem statuamusque

$$\frac{2g}{B} S = \lambda\lambda s,$$

vt fiat

$$\frac{4g}{B}\int S\, ds = \lambda\lambda ss,$$

ideoque pro fine conflictus

$$mm = \lambda\lambda ss \text{ siue } s = \frac{m}{\lambda},$$

deinde quia fit

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{(mm - \lambda\lambda ss)}}$$

erit integrando

$$t = \frac{1}{\lambda} \text{ Ang. sin. } \frac{\lambda s}{m}$$

pro fine ergo conflictus erit

$$t = \frac{1}{\lambda} \text{ Ang. sin. } 1 = \frac{\pi}{2\lambda},$$

pro hac ergo hypothesi prodit angulus

$$\Phi = \frac{(n \pm \delta m)\pi}{2c\lambda} \pm \frac{\delta m}{c\lambda} = \frac{n\pi}{2\lambda c} \pm \frac{\delta m(\pi - 2)}{2\lambda c}$$

cognito autem hoc angulo Φ reliqua momenta erunt

$$\frac{dx}{dt} = -(n \pm \delta m)\,\text{sin.}\,\Phi;\ \frac{dy}{dt} = (n \pm \delta m)\,\text{cos.}\,\Phi \text{ et}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \gamma \pm \frac{\delta m b}{kk}$$

vbi notetur, numerum λ esse quasi infinitum, propterea, quod $\lambda = \frac{m}{s}$ et s per hypothesin quar..tas infinite parua.

20. Quoniam igitur angulus Φ est quam minimus, erit

$$\text{sin.}\,\Phi = \Phi = \frac{(n \pm \delta m)\pi}{2\lambda c} \mp \frac{\delta m}{\lambda c} \text{ et cos.}\,\Phi = 1,$$

hinc ergo finito conflictu globi B celeritas in directione AX reperietur

$\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{(n \pm \delta m)^2 \pi}{2\lambda c} \pm \frac{\delta m(n \pm \delta m)}{\lambda c} = \frac{n \pm \delta m}{2\lambda c}\left(-\frac{(n \pm \delta m)\pi}{2} \pm 2\delta m\right)$$

$$= -\frac{(n \pm \delta m)}{2\lambda c}(n\pi \pm \delta m(\pi - 2))$$

et celeritas in directione X B

$$\frac{dy}{dt} = n \pm \delta m,$$

tum vero celeritas angularis in ſenſum C G H

$$\frac{d\zeta}{dt} = \gamma \pm \frac{\delta m b}{kk}$$

vnde intelligitur, primam celeritatem ſecundum A X quaſi euaneſcere, celeritatem autem angularem, quae ante conflictum erat γ, nunc mutari in $\gamma \pm \frac{\delta m b}{kk}$ et globo motum ſecundum X B relinqui, cuius celeritas ſit $= n \pm \delta m$, vbi notandum, ſignum $+$ valere,

Caſu primo, quo eſt

$$a\alpha > \frac{b\,d\zeta}{dt} + (c - s)\frac{d\Phi}{dt};\ \text{ideoque}$$

$$a\alpha > b\gamma + \frac{\delta m b^2}{kk} + n + \delta m,\ \text{ita vt ſi fuerit}$$

$$a\alpha > b\gamma + \frac{\delta m b^2}{kk} + n + \delta m,$$

tum celeritas globi poſt conflictum in directione X B futura ſit $n + \delta m$,

Caſu ſecundo, quo eſt

$$a\alpha = b\gamma - \frac{\delta m b^2}{kk} + n$$

iſta celeritas euadet $= n$.

Tertio vero caſu quo

$$a\alpha < b\gamma - \frac{\delta m b^2}{kk} + n - \delta m$$

celeritas iſta fiet $n - \delta m$.

De altero genere globorum perfecte elaſticorum.

21. Si ambo globi fuerint perfecte elaſtici, conflictus non finitur, vbi impreſſio facta eſt maxima, ſed

ſed quia haec ipſa impreſſio iterum reſtituitur, tum demum conflictus ceſſat, cum denuo euaſerit $s = 0$, ita vt tam in fine quam initio conflictus habeamus $s = 0$, vtroque ergo caſu quoque erit $S = 0$, atque adeo etiam $\int S\,ds = 0$. Neque tamen hinc ſequitur motum poſt conflictum eundem fore, qui erat ante, vbi nunc oſtendemus.

22. Quoniam enim inuenimus:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \left(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds\right),$$

hincque

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds\right)},$$

ex hac forma perſpicuum eſt poſt initium conflictus quamdiu impreſſio augetur, ſiue formula $\frac{ds}{dt}$ poſitiuum obtinet valorem, tum formulae huic radicali ſignum $+$ tribui debere; at quando iam fit reſtitutio, ſiue impreſſio s iterum diminuitur, tum ob $\frac{ds}{dt}$ negatiuum, formulam illam radicalem quoque negatiue capi oportebit, ideoque quum in fine conflictus fiat

$$\int S\,ds = 0, \text{ tum erit } \frac{ds}{dt} = -m.$$

Quum igitur poſt conflictum in noſtris formulis ſupra inuentis expreſſio

$$\sqrt{\left(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds\right)}$$

vbique fiat $= -m$, illae formulae ſequenti modo ſe habebunt:

$$\frac{e\,d\Phi}{dt} = n \pm 2\delta m; \quad \Phi = \frac{(n \pm \delta m)t}{e}; \quad \frac{d\zeta}{dt} = \gamma \pm \frac{2\delta mb}{kk};$$

ex

ex quibus colligimus ambas celeritates post conflictum

$$\frac{dx}{dt} = m \operatorname{cof.} \Phi - (n \pm 2\delta m) \operatorname{fin.} \Phi \text{ et}$$

$$\frac{dy}{dt} = m \operatorname{fin.} \Phi + (n \pm 2\delta m) \operatorname{cof.} \Phi.$$

23. Quia autem corpora admodum dura assumimus, etiam totum tempus conflictus t pro euanescente haberi poterit, ex quo simul angulus Φ euanescet, ita vt sit

$$\operatorname{fin.} \Phi = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{cof.} \Phi = 1,$$

quo circa post conflictum celeritas globi B secundum directionem

A X erit $\frac{dx}{dt} = m$,

celeritas vero secundum

A B $\frac{dy}{dt} = n \pm 2\delta m$,

tum vero celeritas gyratoria in sensum

C G H $\frac{d\zeta}{dt} = \gamma \pm \frac{2\delta m b}{kk}$,

vbi ratione celeritatis $\frac{dy}{dt}$ notari oportet, signorum ambiguorum superius valere, si fuerit

$$a\alpha > \frac{b\,d\zeta}{dt} + n + 2\delta m > b\gamma + \frac{2\delta m b^2}{kk} + n + 2\delta m$$

inferius vero, quando fuerit

$$a\alpha < \frac{b\,d\zeta}{dt} + n - 2\delta m < b\gamma - \frac{2\delta m b^2}{kk} + n - 2\delta m$$

at vero casu quo

$$a\alpha = \frac{d\zeta}{dt} + n = b\gamma + n,$$

tum celeritas illa $\frac{dy}{dt}$ erit $= n$.

24. Caeterum probe hic eſt animaduertendum, ſolutionem hanc locum habere non poſſe, niſi ambo corpora fuerint maxime dura, ita vt tam ipſa impreſſio s, quam angulus Φ pro quantitatibus euaneſcentibus haberi queant, vnde niſi tanta durities in vtroque corpore inſit, mirari non debemus, ſi hae determinationes e veritate receſſerint. Quod autem hoc problema tantis difficultatibus fuerit inuolutum, cauſa ſine dubio in hoc eſt ſita, quod globum A, vi quadam aliena perpetuo in eodem motus ſtatu conſeruari ſuppoſuimus, ad quod quum vis admodum irregularis requiratur, mirum non eſt hanc ipſam irregularitatem in noſtram ſolutionem eſſe ingreſſam, vnde ſequentis Problematis ſolutionem faciliorem ſperare poterimus.

Problema II.

Si duo corpora ſphaerica ſuper plano horizontali vtcunque mota, atque inſuper motu gyratorio circa axem verticalem praedita, in ſe mutuo incurrant, inueſtigare motus mutationem, quam haec corpora durante conflictu, ſibi mutuo inducent.

Solutio.

25. Moueantur igitur centra vtriusque globi in eodem plano tabulae et motus gyratorius vtriusque fiat circa axem ad hoc planum normalem, hoc enim modo eueniet, vt dum in ſe mutuo impingunt contactus ſemper in eodem plano fiat, et per

mutuam

mutuam actionem neque motus de hoc plano deturbetur, neque positio axium varietur.

26. Post conflictus initium elapso tempore $= t''$, reperiantur centra vtriusque globi in punctis M et N, ponaturque massa prioris $= M$ eius radius $= a$ et momentum inertiae respectu axis gyrationis $= \alpha M a a$; alterius vero globi massa sit $= N$, radius $= b$ et momentum inertiae $= \beta N b b$; vbi notandum, si ambo globi ex materia homogenea constent, fore $\alpha = \beta = \frac{2}{5}$. Posita porro summa radiorum $a + b = c$, nunc interuallum centrorum M N ob impressiones sibi mutuo inductas aliquanto minus erit quam c, ponatur igitur distantia $MN = c - s$, sitque vis, qua iam se mutuo vrgent, $= S$, quam vti functionem ipsius s spectare licet, quae euanescat facto $s = 0$, hac igitur vi S globus M sollicitabitur in directione T M alter vero globus in directione T N existente T puncto contactus, per quod ducta sit recta $t T \theta$, tangens communis ad rectam M N normalis. Tab. IV. Fig. 2.

27. Sumta iam recta fixa A B loco axis, ad quam ex centris M et N demittantur perpendicula M P et N Q vocenturque coordinatae

$$AP = = x; \; PM = y \quad \text{et} \quad AQ = x' \quad \text{et} \quad QN = y',$$

tum vero ponatur angulus, quo recta M N ad istum axem inclinatur $= \Phi$ eritque manifesto

$$x' = x + (c - s)\,\text{cos.}\,\Phi \quad \text{et} \quad y' = y + (c - s)\,\text{sin.}\,\Phi.$$

28. His positis pro temporis momento proposito t motus progressiuus globi M ita erit compara-

 tus,

tus, vt eius celeritas secundum A P futura sit $=\frac{dx}{dt}$ et secundum P M $=\frac{dy}{dt}$; alterius vero globi N celeritas secundum A Q $=\frac{dx'}{dt}$ et secundum Q N $=\frac{dy'}{dt}$; vbi obseruandum est fore

$$dx' = dx - ds \,\mathrm{cos.}\,\Phi - (c-s)\, d\Phi.\,\mathrm{sin.}\,\Phi \quad \text{et}$$

$$dy' = dy - ds \,\mathrm{sin.}\,\Phi + (c-s)\, d\Phi.\,\mathrm{cos.}\,\Phi \quad \text{vnde fit}$$

$$dx' \,\mathrm{cos.}\,\Phi + dy' \,\mathrm{sin.}\,\Phi = dx \,\mathrm{cos.}\,\Phi + dy \,\mathrm{sin.}\,\Phi - ds \quad \text{et}$$

$$dx' \,\mathrm{sin.}\,\Phi - dy' \,\mathrm{cos.}\,\Phi = dx \,\mathrm{sin.}\,\Phi - dy \,\mathrm{cos.}\,\Phi - (c-s)\, d\Phi.$$

Pro motu autem gyratorio et eodem temporis momento gyretur globus M ita, vt eius punctum T moueatur secundum directionem T t celeritate angulari $=\frac{d\zeta}{dt}$, alterius vero globi punctum T secundum eandem directionem T t celeritate angulari $=\frac{d\eta}{dt}$; vnde sequitur, si vtriusque globi centrum quiesceret, veram celeritatem puncti T quatenus ad globum M pertinet fore $=$ M T. $\frac{d\zeta}{dt}$, quatenus autem idem T pertinet ad alterum globum N, eius celeritatem fore $=$ N T. $\frac{d\eta}{dt}$; verum quia semper impressionem s vt valde exiguam spectare licet, hic tuto ponere poterimus M T $= a$ et N T $= b$.

29. Quoniam vero etiam centra globorum mouentur, eorum motus insuper ad istos motus puncti T accedet. Hinc autem per resolutionem eam tantum partem adiiciamus, quae etiam secundum directionem T t fit directa, dum altera pars incidit in directionem M N, et in impressionem fa-

ctam

ctam redundat. Hinc autem pro globo M vera celeritas puncti T secundum directionem Tt erit

$$=\frac{a\,d\zeta}{dt}-\frac{dx}{dt}\,\text{sin.}\,\Phi+\frac{dy}{dt}.\,\text{cos}\,\Phi.$$

In altero vero globo N vera celeritas puncti T, secundum directionem Tt erit

$$=\frac{b\,d\eta}{dt}-\frac{dx'}{dt}.\,\text{sin.}\,\Phi+\frac{dy'}{dt}.\,\text{cos.}\,\Phi=\frac{b\,d\eta}{dt}-\frac{dx}{dt}.\,\text{sin.}\,\Phi+\frac{dy}{dt}.\,\text{cos.}\,\Phi+\frac{(c-s)\,d\Phi}{dt}.$$

30. Hanc vtramque autem celeritatem ideo definire necesse est, vt indicare possimus, vtrum in ipso contactu attritus hincque frictio eueniat nec ne? perspicuum autem est, si ambae illae celeritates inter se fuerint aequales, nullum plane dari attritum, neque propterea ob hanc caussam motum globorum affici. Hic ergo casus locum habet, quando fuerit

$$\frac{a\,d\zeta}{dt}=\frac{b\,d\eta}{dt}+(c-s)\frac{d\Phi}{dt}$$

vel $\frac{a\,d\zeta}{dt}-\frac{b\,d\eta}{dt}=(c-s)\frac{d\Phi}{dt}$,

quem casum *primum* constituamus. *Secundus* autem casus locum habeat, quando celeritas prior maior est posteriore, quod euenit si fuerit

$$\frac{a\,d\zeta}{dt}-\frac{b\,d\eta}{dt}>(c-s)\frac{d\Phi}{dt},$$

hoc casu, quia celeritas globi M maior est quam globi N, huius punctum T abripietur ideoque accelerabitur secundum directionem Tt, contra vero ob reactionem motus gyratorius prioris M retardabitur. *Tertius* vero casus statuatur, si fuerit

$$\frac{a\,d\zeta}{dt}-\frac{b\,d\eta}{dt}<(c-s)\frac{d\Phi}{dt},$$

 atque

atque hoc casu motus gyratorius prioris globi M accelerabitur, alterius vero retardabitur.

31. Constat autem frictionem semper proportionalem esse adpressioni mutuae, quae hic est ipsa vis $= S$, vnde ponamus frictionem inde natam $= \delta S$, atque casu *secundo* globus M praeter vim ante memoratam, etiam sollicitabitur secundum directionem $t\,\theta$ vi $= \delta S$, alterum vero globum N praeterea sustinere etiam vim $= \delta S$ secundum directionem $T\,t$. Calculum autem tantum ad hunc casum secundum accommodabimus, quoniam is facillime ad casum *tertium* transferri poterit, sumendo tantum litteram δ negatiue; quin etiam pro primo valebit sumto $\delta = 0$.

32. Nunc demum accelerationes vtriusque motus definire poterimus, quum enim globus M a duabus viribus sollicitetur altera $= S$ in directione T M, altera vero δS in directione $T\,\theta$, ex his deducetur pro

directione A P vis $= - S \operatorname{cos}. \Phi + \delta S \operatorname{sin}. \Phi$ et pro directione P M vis $= - S \operatorname{sin}. \Phi - \delta S \operatorname{cos}. \Phi$.

Pro altero vero globo elicimus

vim sec. A Q $= + S \operatorname{cos}. \Phi - \delta S \operatorname{sin}. \Phi$ et

vim sec. Q N $= + S \operatorname{sin}. \Phi + \delta S \operatorname{cos}. \Phi$

quae vires ad motum progressiuum referuntur, pro motu vero gyratorio globi M vis $T\,\theta = \delta S$ praebet momentum retardans $\delta a S$, globi vero N vis $T\,t = \delta S$ praebet momentum accelerans $\delta b S$.

33.

33. His viribus inuentis, pro motu progressiuo globi M has duas adipiscimur aequationes:

I. $\frac{M\,ddx}{2g\,dt^2} = -S \operatorname{cos}. \Phi + \delta S \operatorname{sin}. \Phi;$

II. $\frac{M\,ddy}{2g\,dt^2} = -S \operatorname{sin}. \Phi - \delta S \operatorname{cos}. \Phi$

pro motu progressiuo autem globi N has:

III. $\frac{N\,ddx'}{2g\,dt^2} = S \operatorname{cos}. \Phi - \delta S \operatorname{sin}. \Phi;$

IV. $\frac{N\,ddy'}{2g\,dt^2} = S \operatorname{sin}. \Phi - \delta S \operatorname{cos}. \Phi;$

denique pro motu gyratorio globorum M et N nanciscimur adhuc has duas aequationes:

V. $\frac{\alpha M aa\,dd\zeta}{2g\,dt^2} = -\delta a S;$ VI. $\frac{\beta N bb\,dd\eta}{2g\,dt^2} = +\delta b S.$

Has aequationes inspicienti statim patet primam et tertiam iunctim sumtam dare:

$$M\,ddx + N\,ddx' = 0;$$

similique modo secundam et quartam coniunctim dare

$$M\,ddy + N\,ddy' = 0,$$

atque hinc statim deducimus integrando:

$$M dx + N dx' = A\,dt; \text{ et } M dy + N dy' = B\,dt$$

vbi A et B sunt constantes per integrationem ingressae, quas adeo vlterius integrantes, consequimur

$$M x + N x' = A t + \mathfrak{A}; \text{ et } M y + N y' = B t + \mathfrak{B}$$

quibus formulis promotio vniformis centri inertiae communis, vel etiam conseruatio quantitatis motus indicatur. Eodem autem modo aequatio quinta et sexta iunctim praebent:

$\alpha M a$

$$\alpha M a\, dd\zeta + \beta N b\, dd\eta = 0$$

ideoque

$$\alpha M a \frac{d\zeta}{dt} + \beta N b \frac{d\eta}{dt} = \text{Const.},$$

vnde intelligitur, dum motus gyratorius vnius globi vel augetur vel minuitur, tum motum gyratorium alterius vice verſa vel diminui vel augeri.

34. Si hos valores pro x et x' inuentos, in formulis ſupra datis (§. 27.) ſubſtituamus, reperiemus.

$$x = \frac{At + \mathfrak{A} - N(c-s)\cos.\Phi}{M+N}; \quad x' = \frac{At + \mathfrak{A} + M(c-s)\cos.\Phi}{M+N}$$

et $y = \frac{Bt + \mathfrak{B} - N(c-s)\sin.\Phi}{M+N}$; $y' = \frac{Bt + \mathfrak{B} + M(c-s)\sin.\Phi}{M+N}$

ex his colligimus differentiando

$$dx = \frac{A\,dt + N\,ds\cos.\Phi + N(c-s)\,d\Phi\sin.\Phi}{M+N}$$

et $dy = \frac{B\,dt + N\,ds\sin.\Phi - N(c-s)\,d\Phi\cos.\Phi}{M+N}$

denuoque differentiando

$$ddx = \frac{N\,dds\cos.\Phi - 2N\,ds\,d\Phi\sin.\Phi + N(c-s)\,dd\Phi\sin.\Phi + N(c-s)\,d\Phi^2\cos.\Phi}{M+N}$$

$$ddy = \frac{N\,dds\sin.\Phi + 2N\,ds\,d\Phi\cos.\Phi - N(c-s)\,dd\Phi\cos.\Phi + N(c-s)\,d\Phi^2\sin.\Phi}{M+N}$$

inuentis autem x et y ſponte patent x' et y'.

35. Ex his vltimis formulis ſecundi gradus, elicimus binas ſequentes concinniores

$$ddx\cos.\Phi + ddy\sin.\Phi = \frac{N\,dds + N(c-s)\,d\Phi^2}{M+N} \text{ et}$$

$$ddx\sin.\Phi - ddy\cos.\Phi = \frac{2N\,ds\,d\Phi + N(c-s)\,dd\Phi}{M+N}$$

vero ex formulis principalibus I et II. §. 32.

adipi-

adipiſcimur

$$\frac{M(ddx\cos.\Phi + ddy\sin.\Phi)}{2g\,dt^2} = -S$$

et $$\frac{M(ddx\sin.\Phi - ddy\cos.\Phi)}{2g\,dt^2} = +\delta S,$$

atque hinc duas ſequentes aequationes finales

$$dds + (c-s)d\Phi^2 = -\frac{2g(M+N)S\,dt^2}{M.N} \text{ et}$$

$$(c-s)dd\Phi - 2ds\,d\Phi = +\frac{2g\delta(M+N)S\,dt^2}{M.N},$$

ex quibus binas variabiles s et Φ ad quoduis tempus definiri oportet, ſiue quod perinde eſt, quantitates t et Φ per variabilem s, cuius functio eſt S, exprimantur. Ponamus autem breuitatis gratia

$\frac{2g(M+N)S}{M.N} = \Sigma$ vt habeamus:

$$dds + (c-s)d\Phi^2 = -\Sigma dt^2; \text{ et } (c-s)dd\Phi - 2ds\,d\Phi = +\delta\Sigma dt^2$$

hae ergo aequationes omnino ſimiles ſunt iis, ad quas praecedens problema perduximus, ideoque eas etiam ad differentialia primi gradus tantum reducere liceret, vti ſupra fecimus §. 10., quoniam autem haec reductio nihil plane ſubſidii ad noſtrum inſtitutum adfert, aliud remedium nobis relinqui non videtur, niſi vt hic etiam ambos globos valde duros ſtatuamus, vt quantitates s et Φ tuto tamquam minimas ſpectare eaque membra, in quibus eae ad plures quam vnam dimenſionem aſcendunt, reiicere queamus, quemadmodum etiam in ſuperiori problemate fecimus. Hoc autem modo noſtra tractatio non adeo limitari eſt cenſenda, quoniam omnia, quae adhuc de colliſione corporum ſunt prolata, eidem

 hypo-

hypothesi innituntur, quod corpora collidentia sint durissima.

36. Sint igitur ambo nostri globi durissimi et quia ambas quantitates s et Φ tamquam euanescentes spectare licet, siquidem axis A B ita ducatur, vt in initio conflictus per amborum globorum centra transeat, ita vt positio axis A B non amplius sit arbitraria; nostrae duae aequationes sequentes formas induent

$$dds = -\Sigma dt^2 \text{ et } c\,dd\Phi = \delta\,\Sigma\,dt^2$$

quarum illa vti supra integrata praebet

$$\frac{ds^2}{dt^2} = D - 2\int\Sigma\,ds \text{ hincque } \frac{ds}{dt} = \sqrt{(D - 2\int\Sigma\,t^2)}$$

et $dt = \frac{ds}{\sqrt{(D - 2\int\Sigma\,ds)}}$,

quam valorem si in altera aequatione substituamus, prodibit haec aequatio

$$\frac{c\,dd\Phi}{dt} = \delta\,\Sigma\,dt = \frac{\delta\,\Sigma\,ds}{\sqrt{(D - 2\int\Sigma\,ds)}}$$

cuius integrale est

$$\frac{c\,d\Phi}{dt} = E - \delta\sqrt{(D - 2\int\Sigma\,ds)}.$$

Atque simili modo pro motu gyratorio ob

$$\frac{dd\zeta}{dt} = -\frac{\delta N \Sigma\,dt}{\alpha a (M + N)} = -\frac{\delta N \Sigma\,ds}{\alpha a (M + N)\sqrt{(D - 2\int\Sigma\,ds)}}$$

et $\frac{dd\eta}{dt} = +\frac{\delta M \Sigma\,dt}{\beta b (M + N)} = \frac{\delta M \Sigma\,ds}{\beta b (M + N)\sqrt{(D - 2\int\Sigma\,ds)}}$

per integrationem obtinetur

$$\frac{d\zeta}{dt} = F + \frac{\delta N}{\alpha a (M + N)}\sqrt{(D - 2\int\Sigma\,ds)} \text{ et}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = G - \frac{\delta M}{\beta b (M + N)}\sqrt{(D - 2\int\Sigma\,ds)}.$$

37. Quo omnes iſtas conſtantes integratione ingreſſas rite definiamus, contemplemur ſtatum initialem, quo erat $t = 0$ hincque etiam $s = 0$, atque adeo $\int \Sigma\, d\, s = 0$ et pro globo M ſumamus eius celeritatem fuiſſe ſecundum A P $= p$ et ſecundum P M $= m$, eiusque celeritatem angularem in ſenſum T $t = \mu$, pro altero globo N fuiſſe celeritatem in directione A Q $= q$ et in directione Q N $= n$, celeritatem vero angularem in T $t = \nu$, ita vt initio fuerit

$$\frac{dx}{dt} = p;\ \frac{dy}{dt} = m;\ \text{et}\ \frac{d\zeta}{dt} = \mu,$$

tum vero etiam

$$\frac{dx'}{dt} = q;\ \frac{dy'}{dt} = n;\ \text{et}\ \frac{d\eta}{dt} = \nu.$$

38. Si hos valores pro ſtatu initiali in ſuperioribus aequationibus ſubſtituamus: ex §. 33. erit ob coſ. $\Phi = 1$ et ſin. $\Phi = 0$

$$\frac{dx}{dt} = p = \frac{A}{M+N} + \frac{N}{M+N} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = m = \frac{B}{M+N} - \frac{N}{M+N} \cdot \frac{c\, d\Phi}{dt}$$

deinde ex §. 28. $\frac{dx'}{dt} = q = \frac{dx}{dt} - \frac{ds}{dt} = p - \frac{ds}{dt}$ et

$$\frac{dy'}{dt} = n = \frac{dy}{dt} + \frac{c\,d\Phi}{dt} = m + \frac{c\,d\Phi}{dt}$$

vnde immediate colligimus pro initio

$$\frac{ds}{dt} = p - q \quad \text{et} \quad \frac{c\,d\Phi}{dt} = n - m;$$

hincque porro

$$A = M\,p + N\,q \quad \text{et} \quad B = M\,m + N\,n,$$

reliquae vero conſtantes hinc ita determinabuntur:

 D $=$

$D=(p-q)^2$; $E=n-m+\delta(p-q)$; $F=\mu-\frac{\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$ et $G=\nu+\frac{\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}$.

39. Definitis his constantibus durante ipso conflictu ad tempus t colligamus aequationes inuentas, et habebimus:

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{((p-q)^2-2\int\Sigma\, ds)};\quad \frac{e\,d\Phi}{dt}=n-m+\delta(p-q)$$
$$-\delta\sqrt{((p-q)^2-2\int\Sigma\, ds)}.$$
$$\frac{d\zeta}{dt}=\mu-\frac{\delta N}{\alpha a(M+N)}((p-q)-\sqrt{((p-q)^2-2\int\Sigma\, ds)}),\ \text{et}$$
$$\frac{d\eta}{dt}=\nu+\frac{\delta M}{\beta b(M+N)}(p-q-\sqrt{((p-q)^2-2\int\Sigma\, ds)})$$

vnde deducuntur ipsae celeritates progressiuae

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{Mp+Nq}{M+N}+\frac{N}{M+N}\sqrt{((p-q)^2-2\int\Sigma\, ds)}\\ \frac{dy}{dt}&=s-\frac{\delta N}{M+N}(p-q-\sqrt{((p-q)^2-2\int\Sigma\, ds)})\end{aligned}\right\}\ \text{pro globo M}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx'}{dt}&=\frac{Mp+Nq}{M+N}-\frac{M}{M+N}\sqrt{((p-q)^2-2\int\Sigma\, ds)}\\ \frac{dy'}{dt}&=n+\frac{\delta M}{M+N}(p-q-\sqrt{((p-q)^2-2\int\Sigma\, ds)})\end{aligned}\right\}\ \text{pro globo N.}$$

Applicatio ad corpora omnis elateris expertia.

40. Si ambo globi omni elasticitate careant, iam supra obseruauimus, conflictum terminari, vbi impressio facta est maxima seu $\frac{ds}{dt}=0$, quare in fine conflictus erit $2\int\Sigma\, ds=(p-q)^2$, ideoque pro hoc momento habebimus praeter $\frac{ds}{dt}=0$

$$\frac{e\,d\Phi}{dt}=n-m+\nu(p-q)$$

deinde vero celeritates progressiuas post conflictum.

Pro

Pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \text{et } \frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta N(p-q)}{M+N}$$

Pro globo N vero

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \text{et } \frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta M(p-q)}{M+N}$$

celeritates autem gyratorias in ſenſum T t vtrinque

pro globo M, $\frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$,

pro globo N, $\frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}$.

41. Antequam autem hinc vllas concluſiones deducere liceat, diligenter diſpiciendum eſt, ſub quibusnam conditionibus quilibet caſuum ſupra conſtitutorum locum habeat; quod iudicium ſeorſim tam pro initio conflictus, quam pro fine inſtitui debet. Ex allatis autem ibi criteriis, patet *primum* caſum quo $\delta = 0$ pro initio conflictus locum eſſe habiturum, ſi fuerit Primus Caſus.

$$a\mu - b\nu = n - m$$

pro fine autem conflictus ſi fuerit

$$a\mu - b\nu = n - m,$$

quae duae conditiones quum inter ſe conueniant, patet, primum caſum per totum conflictum valere, ſi modo initio valuerit. Pro hoc ergo *primo* caſu ſi fuerit

$$a\mu - b\nu = n - m,$$

poſt conflictum ſingula motus elementa ita ſe habebunt:

 $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy}{dt} = m; \quad \text{et} \quad \frac{d\zeta}{dt} = \mu$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy'}{dt} = n; \quad \text{et} \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu.$$

Vnde intelligitur poſt conflictum vtrumque globum ſecundum directionem axis A B eadem celeritate progredi, at ſecundum directionem ad A B normalem, vtrumque globum eam celeritatem, quam ante habebat, conſeruare; quia etiam vterque priſtinum motum gyratorium retinebit.

II. Caſus. 42. *Secundus* autem caſus, quo δ habet valorem poſitiuum, pro conflictus initio locum habebit, ſi fuerit

$$a\mu - b\nu > n - m,$$

at vero pro fine conflictus ſi fuerit

$$a\mu - b\nu - \frac{\delta N(p-q)}{\alpha(M+N)} - \frac{\delta M(p-q)}{\beta(M+N)} > n - m + \delta(p-q) \text{ ſeu}$$

$$a\mu - b\nu > n - m + \delta(p-q)\left(1 + \frac{\alpha M + \beta N}{\alpha\beta(M+N)}\right) > n - m$$

$$+ \frac{\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

quare dummodo poſterior conditio locum habeat, caſus ſecundus per totum conflictum vigebit, motusque poſt conflictum ſequenti modo ſe habebit:

Si conditio

$$a\mu - b\nu > n - m + \frac{\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

erit pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta N(p-q)}{M+N}; \quad \frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

at pro globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta M(p-q)}{M+N}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}$$

43. Vt porro casus tertius, quo δ sumi debet negatiue, locum habeat, pro initio conflictus haec conditio requiritur: III. Casus.

$a\mu - b\nu < n - m$, pro fine vero conflictus haec

$$a\mu - b\nu < n - m - \frac{\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

quae posterior conditio priorem iam inuoluit, vnde casus tertius per totum conflictum vigebit, si fuerit

$$a\mu - b\nu < n - m - \frac{\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

tum autem post conflictum erit pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp+Nq}{M+N};\ \frac{dy}{dt} = m + \frac{\delta N(p-q)}{M+N};\ \frac{d\zeta}{dt} = \mu + \frac{\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

et pro altero globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp+Nq}{M+N};\ \frac{dy'}{dt} = n - \frac{\delta M(p+q)}{M+N} \text{ et } \frac{d\eta}{dt} = \nu - \frac{\delta M(p-q)}{\alpha b(M+N)}.$$

44. His autem tribus casibus solutio problematis neutiquam exhauritur, supersunt enim adhuc duo casus maxime memorabiles, alter quo

$$a\mu - b\nu = n - m + k,$$

alter vero quo

$$a\mu - b\nu = n - m - k \text{ existente}$$

$$k < \frac{\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

ita tamen, vt sit $k > 0$, priori enim casu in ipso conflictus initio δ habebit valorem positiuum, sed durante conflictu frictio subito cessabit, ita vt deinceps vsque ad finem conflictus statui debeat $\delta = 0$, id quod etiam de altero casu est intelligendum, hoc tantum discrimine, quod ab initio δ habeat valorem negatiuum. Quemadmodum igitur his casibus

vtrius-

vtriusque globi motus post conflictum se sit habiturus, quaestio haud parum est ardua, quum interuallum conflictus in duas partes diuidi debeat, quae continuitatis lege destituuntur, sequenti autem modo hos casus prorsus singulares expedire poterimus.

45. Durante igitur conflictu id temporis punctum inuestigari debet, quo frictio primum euanescere incipit, id quod euenit vbi fit

$$\frac{a\,d\zeta}{dt} - \frac{b\,d\eta}{dt} = \frac{c\,d\Phi}{dt}$$

ex formulis autem §. 38. inuentis, haec conditio praebet

$$a\mu - b\nu - \frac{\delta(\alpha M + \beta N)}{\alpha\beta(M+N)}\left(p - q - V((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds)\right)$$
$$= n - m + \delta\left(p - q - V((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds)\right)$$

siue

$$a\mu - b\nu = n - m + \frac{\delta(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)(p - q - V((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds))}{\alpha\beta(M+N)}$$

ponamus hic breuitatis gratia

$$\frac{\delta(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)} = \Delta$$

vt fiat

$$a\mu - b\nu = n - m + \Delta\left(p - q - V((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds)\right)$$

et quia per hypothesin est

$$a\mu - b\nu = n - m + k,$$

hinc habebimus

$$k = \Delta\left(p - q - V(p-q)^2 - 2\int\Sigma ds)\right),$$

quare pro hoc momento temporis colligimus

$$p - q - V((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds) = \frac{k}{\Delta} \text{ ideoque}$$
$$V((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds)) = p - q - \frac{k}{\Delta}.$$

46.

46. Pro hoc iam temporis momento inuestigemus vtriusque globi motum, et habebimus, pro motu globi M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N} + \frac{N(p-q)}{M+N} - \frac{kN}{\Delta(M+N)}$$

$$\frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta k N}{\Delta(M+N)}; \quad \frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta(M+N)}$$

pro motu globi N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M+N} - \frac{M}{M+N}\left(p - q - \frac{k}{\Delta}\right)$$

$$\frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta k M}{\Delta(M+N)}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta(M+N)}$$

$$\frac{ds}{dt} = p - q - \frac{k}{\Delta} \quad \text{et}$$

$$\frac{c\, d\Phi}{dt} = n - m + \frac{\delta k}{\Delta}.$$

47. Hae ergo celeritates modo inuentae locum habent in fine prioris partis collisionis, ideoque tamquam celeritates initiales pro parte collisionis posteriori sunt spectandae, hanc igitur partem inuestigaturi, resumamus formulas integrales primum inuentas, in quibus adhuc constantes indeterminatae, A, B, C etc. insunt, easque nunc ita definiamus, vt pro initio huius temporis, quo est

$$\surd\left((p-q)^2 - 2\int \Sigma\, ds\right) = p - q - \frac{k}{\Delta},$$

celeritates eae ipsae prodeant, quas modo inuenimus, vbi notari oportet, pro hac temporis parte sumi debere $\delta = 0$, hae autem formulae nunc ita se habebunt

$$\frac{ds}{dt} = p - q - \frac{k}{\Delta}; \quad \frac{c\, d\Phi}{dt} = E \text{ hincque}$$

istae constantes ita determinantur

$E = n - m + \frac{\delta k}{\Delta}$; $A = M p + N q$;
$B = M m + N n$; $F = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta (M + N)}$
$G = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta (M + N)}$.

48. Nunc demum ad finem partis posterioris temporis progredi licet, pro quo quum sit

$2 \int \Sigma\, d s = (p - q)^2$, siue
$\surd ((p - q)^2 - 2 \int \Sigma\, d s) = 0$,

eaedem formulae generales ad hunc statum accommodatae pro fine conflictus dabunt:

$\frac{d s}{d t} = 0$; $\frac{c\, d \Phi}{d t} = n - m + \frac{\delta k}{\Delta}$

et pro globo priori M

$\frac{d x}{d t} = \frac{M p + N q}{M + N}$; $\frac{d y}{d t} = m - \frac{\delta k N}{\Delta (M + N)}$; $\frac{d \zeta}{d t} = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta (M + N)}$

et pro globo N

$\frac{d x'}{d t} = \frac{M p + N q}{M + N}$; $\frac{d y'}{d t} = n + \frac{\delta k M}{\Delta (M + N)}$; $\frac{d \eta}{d t} = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta (M + N)}$.

Quae formulae si fuerit $k = 0$, congruunt cum casu primo; at si fiat $k = \Delta (p - q)$, eae cum casu secundo conueniunt, prorsus vti natura rei postulat.

49. At si fuerit $a \mu - b \nu = n - m - k$ ratiocinium simili modo institui deberet, verum facile intelligitur inde pro fine conflictus sequentes formulas esse prodituras

pro globo M

$\frac{d x}{d t} = \frac{M p + N q}{M + N}$; $\frac{d y}{d t} = m + \frac{\delta k N}{\Delta (M + N)}$; $\frac{d \zeta}{d t} = \mu + \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta (M + N)}$

et pro globo N

$\frac{d x'}{d t} = \frac{M p + N q}{M + N}$; $\frac{d y'}{d t} = n - \frac{\delta k M}{\Delta (M + N)}$; $\frac{d \eta}{d t} = \nu - \frac{\delta k M}{\beta b \Delta (M + N)}$

vbi

vbi iterum notasse iuuabit, hunc casum in primum recidere, si $k = 0$, in tertium vero si $k = \Delta(p-q)$. Sicque tota haec determinatio quinque casibus comprehendi debet.

Applicatio ad corpora elastica.

50. Quando ambo globi sunt perfecte elastici, conflictus ante non finitur, quam impressio facta iterum ad nihilum redigatur, ita vt in fine conflictus denuo fiat $s = 0$ atque etiam $\int \Sigma\, ds = 0$. Verum formula radicalis

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{((p-q)^2 - 2\int \Sigma\, ds)}$$

quam diu impressio augetur, positiuum sortitur valorem, negatiuum vero, dum restitutio absoluitur, siquidem priori casu $\frac{ds}{dt}$ positiuum, altero vero negatiuum induit valorem. Quocirca in fine conflictus erit haec formula radicalis $= -(p-q)$.

51. Quodsi ergo hunc valorem vbique substituamus, pro fine conflictus habebimus primo

$$\frac{ds}{dt} = -(p-q) \text{ et } \frac{c\,d\Phi}{dt} = n - m + 2\delta(p-q)$$

deinde pro globo M reperiemus

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M+N} - \frac{N(p-q)}{M+N};\ \frac{dy}{dt} = m - \frac{2\delta N(p-q)}{M+N}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{2\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

et pro globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M+N} + \frac{M(p-q)}{M+N};\ \frac{dy'}{dt} = n + \frac{2\delta M(p-q)}{M+N}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{2\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

52. Hic autem imprimis ratione litterae δ animaduertendum eſt, eam habere valorem poſitiuum, quamdiu fuerit

$$\frac{a\,d\zeta}{ds} - \frac{b\,d\eta}{dt} > \frac{c\,d\Phi}{dt}$$

ſiue ſubſtitutis valoribus

$$a\mu - b\nu - \frac{\delta(\alpha M + \beta N)}{\alpha\beta(M+N)}\left(p - q - \sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds)}\right)$$
$$> n - m + \delta\left(p - q - \sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds)}\right), \text{ ſiue}$$
$$a\mu - b\nu > n - m + \frac{\delta(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}\left(p - q - \sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds)}\right)$$

vnde iam intelligitur litteram δ negatiue capi debere, quando fuerit

$$a\mu - b\nu < n - m - \frac{\delta(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}\left(p - q - \sqrt{(p-q)^2 - 2\int\Sigma ds}\right)$$

at vero quando fit

$$a\mu - b\nu = n - m,$$

tum litteram δ in nihilum abire. Vnde vt ante tres caſus reſulant, quorum *primus* fit vbi $\delta = 0$, *ſecundus* vbi δ habet valorem poſitiuum, *tertius* vero vbi negatiuum.

53. Incipiamus a caſu primo, quo $\delta = 0$ atque is in initio conflictus locum habebit, quoties fuerit

$$a\mu - b\nu = n - m,$$

in fine vero conflictus quando etiam fuerit

$$a\mu - b\nu = n - m$$

ex quo intelligitur, ſi hic caſus in initio conflictus locum habeat, tum eum per totum conflictum eſſe duraturum; quare hinc ſequentes determinationes deducimus: Si

Si fuerit $a\mu - b\nu = n - m$ erit

pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M-N)p + 2Nq}{M+N}; \quad \frac{dy}{dt} = m; \quad \frac{d\zeta}{dt} = \mu.$$

pro globo vero N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{2Mp + (N-M)q}{M+N}; \quad \frac{dy'}{dt} = n; \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu.$$

54. Consideremus nunc casum secundum, quo δ est positiuum, atque vt is iam initio conflictus eueniat oportet esse

$$a\mu - b\nu > n - m,$$

verum vt etiam in fine locum habeat, debet esse

$$a\mu - b\nu > n - m + \frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)};$$

vnde quum semper sit $p > q$; conditio posterior priorem in se continet, ideoque casus secundus per totum conflictum subsistit, vnde hae sequuntur determinationes:

Si fuerit $a\mu - b\nu > n - m + \frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$

tum erit pro globo M;

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M-N)p + 2Nq}{M+N}; \quad \frac{dy}{dt} = m - \frac{2\delta N(p-q)}{M+N} \text{ et}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{2\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

et pro altero globo N

$$\frac{dx''}{dt} = \frac{(N-M)q + 2Mp}{M+N}; \quad \frac{dy''}{dt} = n + \frac{2\delta M(p-q)}{M+N}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{2\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

55. Casus denique tertius tam in initio, quam in fine adhuc vigebit, quando fuerit

$$a\mu - b\nu < n - m - \frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

ac tum in ſuperioribus formulis δ negatiue capi debet, vnde ſequentes determinationes adipiſcimur:

Si fuerit $a\mu - b\nu < n - m - \frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M+\beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$

poſt conflictum erit pro globo M

$\frac{dx}{dt} = \frac{(M-N)p+2Nq}{M+N}$; $\frac{dy}{dt} = m + \frac{2\delta N(p-q)}{M+N}$; $\frac{d\zeta}{dt} = \mu + \frac{2\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$

et pro globo N

$\frac{dx'}{dt} = \frac{(N-M)q+2Mp}{M+N}$; $\frac{dy'}{dt} = n - \frac{2\delta M(p-q)}{M+N}$; $\frac{d\eta}{dt} = \nu - \frac{2\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}$.

56. Vt nunc etiam in caſus hinc excluſos inquiramus, qui contingunt quando fuerit:

$a\mu - b\nu = n - m \pm k$,

dum ſcilicet k inter limites o et $\frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M+\beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$ continetur; ante omnia formulas integrales ſupra inventas in genere ſumtas, neque ad certum ſtatum initialem accommodatas ob oculos ponamus:

ob $\frac{ds}{dt} = \sqrt{(D - 2\int\Sigma\, ds)}$.

$\frac{dx}{dt} = \frac{A}{M+N} + \frac{N}{M+N}.\sqrt{(D - 2\int\Sigma\, ds)}$; $\frac{dy}{dt} = \frac{B}{M+N} - \frac{N}{M+N}(E - \delta\sqrt{(D - 2\int\Sigma\, ds)})$

$\frac{d\zeta}{dt} = F + \frac{\delta N}{\alpha a(M+N)}\sqrt{(D - 2\int\Sigma\, ds)}$

$\frac{dx'}{dt} = \frac{A}{M+N} \mp \frac{M}{M+N}.\sqrt{(D - 2\int\Sigma\, ds)}$, $\frac{dy'}{dt} = \frac{B}{M+N} + \frac{M}{M+N}(E - \delta\sqrt{(D - 2\int\Sigma\, ds)})$

$\frac{d\eta}{dt} = G - \frac{\delta M}{\beta b(M+N)}\sqrt{(D - 2\int\Sigma\, ds)}$.

57.

57. Quodſi hae formulae ad ſtatum noſtrum initialem referantur, quo eſt

$\frac{dx}{dt}=p$, $\frac{dy}{dt}=m$, $\frac{d\zeta}{dt}=\mu$ et $\frac{dx'}{dt}=q$, $\frac{dy'}{dt}=n$ et $\frac{d\eta}{dt}=\nu$,

conſtantes noſtrae ſequenti modo determinabuntur:

$A=Mp+Nq$; $\sqrt{D}=p-q$; $B=Mm+Nn$;

$E=n-m+\delta(p-q)$; $F=\mu-\frac{\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$; $G=\nu+\frac{\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}$

qui ſunt ipſi valores iam ante inuenti.

His ita praeparatis aggrediamur caſum, quo

$a\mu-b\nu=n-m+k$, exiſtente

$k<2\delta\frac{(p-q)(\alpha(\beta+1)M+\beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$,

atque iam vidimus in ipſo initio caſum ſecundum $\delta>0$ valere, dehinc vero tantum ad certum quendam terminum continuari, quem reperiemus pro hoc loco, poſito vt ante breuitatis gratia

$\frac{\delta(\alpha(\beta+1)M+\beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}=\Delta$;

$p-q-\sqrt{((p-q)^2-2\int\Sigma\,ds)}=\frac{k}{\Delta}$ et

$\sqrt{((p-q)^2-2\int\Sigma\,ds)}=p-q-\frac{k}{\Delta}$;

vnde pro hoc momento valor $\int\Sigma\,ds$ determinatur, nobis autem ſufficit valorem formulae huius radicalis noſſe. Atque hinc pro hoc termino habebimus iſtas determinationes:

$\frac{dx}{dt}=\frac{Mp+Nq}{M+N}+\frac{N}{M+N}(p-q-\frac{k}{\Delta})$

$\frac{dy}{dt}=m-\frac{\delta kN}{\Delta(M+N)}$; $\frac{d\zeta}{dt}=\mu-\frac{\delta kN}{\alpha a\Delta(M+N)}$;

$\frac{dx'}{dt}=\frac{Mp+Nq}{M+N}-\frac{M}{M+N}(p-q-\frac{k}{\Delta})$

$\frac{dy'}{dt}=n+\frac{\delta kM}{\Delta(M+N)}$; $\frac{d\eta}{dt}=\nu+\frac{\delta kM}{\beta b\Delta(M+N)}$

ſcilicet

ſcilicet quoniam totum conflictus tempus in duas partes diuidi debet, hae celeritates locum habent in fine partis prioris, quae ergo eaedem locum quoque habebunt in initio ſecundae partis, vbi erit $\delta = 0$.

58. Nunc motum per ſecundam partem inveſtigemus, pro qua celeritates modo inuentae ſtatum initialem conſtituunt, quam ob cauſam nunc vti debemus formulis generalibus §. 55. allatis, quoniam autem pro initio huius partis eſt

$$\surd(D - 2\int \Sigma\, ds) = p - q - \frac{k}{\Delta},$$

hoc valore poſito ipſae illae celeritates prodire debent, vnde naſcuntur ſequentes aequationes

$$\text{I. } \frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N} + \frac{N}{M + N}\left(p - q - \frac{k}{\Delta}\right) = \frac{A}{M + N} + \frac{N}{M + N}\left(p - q - \frac{k}{\Delta}\right)$$

$$\text{II. } \frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N} - \frac{M}{M + N}\left(p - q - \frac{k}{\Delta}\right) = \frac{A}{M + N} - \frac{M}{M + N}\left(p - q - \frac{k}{\Delta}\right)$$

$$\text{III. } \frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta k N}{\Delta(M + N)} = \frac{B}{M + N} - \frac{NE}{M + N}$$

$$\text{IV. } \frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta k M}{\Delta(M + N)} = \frac{B}{M + N} + \frac{ME}{M + N}$$

$$\text{V. } \frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta(M + N)} = F; \quad \text{VI. } \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta(M + N)} = G$$

ex priore et ſecunda ſequitur

$$A = Mp + Nq,$$

quia D manet vt ante $= (p - q)^2$, deinde ex tertia et quarta

$$B = Mm + Nn \quad \text{et} \quad E = n - m + \frac{\delta k}{\Delta}$$

at ex quinta et ſexta litterae F et G immediate dantur

$$F = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta(M + N)}; \quad G = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta(M + N)}.$$

59.

59. Quodsi hos valores constantium introducamus, formulae §. 55. generales exhibebunt motum corporum per partem posteriorem temporis, vbi $\delta = 0$. Atque hinc pro fine huius partis adeoque totius conflictus statui debebit

$$V(D - 2\int \Sigma\, ds) = -(p - q),$$

vnde consequimur sequentes determinationes:

Si fuerit $a\mu - b\nu = n - m + k$ existente

$$k \lessgtr 2\Delta(p - q)$$

tum post conflictum erit pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M-N)p + 2Nq}{M+N};\quad \frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta k N}{\Delta(M+N)}$$
$$\frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta(M+N)}$$

at pro globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{(N-M)p + 2Mq}{M+N};\quad \frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta k M}{\Delta(M+N)};\quad \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta(M+N)}.$$

60. Hinc iam sponte casus adhuc residuus resoluitur in hunc modum:

Si fuerit $a\mu - b\nu = n - m - k$, existente

$$k \lessgtr 2\Delta(p - q)$$

post conflictum erit pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M-N)p + 2Nq}{M+N};\quad \frac{dy}{dt} = m + \frac{\delta k N}{\Delta(M+N)};\quad \frac{d\zeta}{dt} = \mu + \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta(M+N)}$$

et pro altero globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{(N-M)p + 2Mq}{M+N};\quad \frac{dy'}{dt} = n - \frac{\delta k M}{\Delta(M+N)};\quad \frac{d\eta}{dt} = \nu - \frac{\delta k M}{\beta b \Delta(M+N)};$$

vbi manifeſtum eſt, ſi fuerit $k = 0$, ambos hos caſus ad caſum primum reuocari, at ſi fuerit

$$k = 2 \Delta (p - q),$$

tum caſus penultimus reuoluitur ad caſum ſecundum, vltimus autem ad caſum tertium, ita vt nusquam ſaltus occurrat.

DE