1773

Digressio de traiectoriis tam orthogonalibus quam obliquangulis

Leonhard Euler

DIGRESSIO DE TRAIECTORIIS TAM ORTHOGONALIBVS QVAM OBLIQVANGVLIS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quaestionem de traiectoriis fere obsoletam, in scenam reuocaturi, primum accurate explicare debemus, qua ratione naturam et indolem curuarum secandarum in calculum introduci conueniat, deinde methodum exponere debemus, cuius ope traiectoriae determinari queant.

2. Quod primum ad curuas secandas attinet, ante omnia aequatio earum naturam exprimens est perpendenda et quoniam innumerabiles lineae sub eadem aequatione comprehendi debent, praeter coordinatas x et y quantitas quaepiam tanquam parameter, quam littera a designabimus, in aequatione inesse debet, quae in infinitum variata omnes curuas secandas exhibeat, ita scilicet vt quamdiu litterae a idem valor tribuitur, aequatio habeatur pro vna quadam determinata linea secunda, dum autem valor huius litterae successiue vel augetur vel diminuitur, ad alias continuo lineas secandas perueniamus. Ita si aequatio proposita fuerit $yy = ax$, in ea continentur omnes parabolae super eodem axe descri-

 ptae

ptae et eodem vertice praeditae, at ratione parametri a vtcunque inter ſe diſcrepantes. At haec aequatio $yy = fx + af$ vbi f ſit quantitas vere conſtans, continebit infinitas parabolas ſuper eodem axe, eadem parametro f deſcriptas, ſed quarum vertices per axem continuo proferuntur, ſcilicet eadem parabola ſuper axe promota omnes curuas ſecandas repraeſentabit. Porro aequatio $y = ax$ complectitur omnes lineas rectas ex eodem puncto eductas; at haec aequatio $yy = aa - xx$, praebet omnes circulos ex eodem centro deſcriptos.

De natura curuarum ſecandarum.

3. Ante igitur quam quaeſtio de traiectoriis ſuſcipiatur, aequatio omnes curuas ſecandas complectens, probe eſt perpendenda, quae vti iam notauimus, praeter coordinatas parametrum variabilem a continere debet, quam olim etiam moduli nomine indicauerunt, praeter quam aliae conſtantes quaecunque veluti f, g, b ineſſe poſſunt, quippe quae pro omnibus curuis eosdem valores retineant. Huiusmodi autem aequationum plura genera diuerſa conſiderari merentur, ad quorum primum merito referuntur omnes aequationes algebraicae, cuiuscunque fuerint gradus; ad ſecundum referamus eas aequationes, quae quidem ſunt tranſcendentes, verumtamen vel logarithmos vel arcus circulares inuoluunt, quandoquidem hae quantitates nunc quidem perinde ac algebraicae tractari ſolent. Veluti ſi fuerit

$$y = a \,\text{Ang. ſin.}\, \sqrt{(2ax - xx)} - \sqrt{(2ax - xx)}$$

in

in hac aequatione omnes cycloides super eadem basi descriptae exprimuntur, quomodocunque circulus genitor immutetur. Tertium vero genus destinatum sit aequationibus differentialibus, quas quidem non nisi transcendenter integrare liceat, cuiusmodi supra occurrit $dy = \frac{A\,dx}{\sqrt{(XX - AA)}}$ vbi X functio quaecunque ipsius x et A ipsius a. Circa talem aequationem nihil omnino statuere licet, nisi ante accurate fuerit definitum, qua lege integratio fieri sit intelligenda, vtrum scilicet noua constans per integrationem introducenda, pendeat a parametro a nec ne? quod iudicium ita facillime institui posse videtur, vt dicamus integrationem ita esse instituendam, vt sumto $x = b$, fiat $y = c$, quippe quo pacto integratio determinatur, tum autem liberum nobis relinquitur, vtrum hae litterae b et c sint vere constantes, an certo quodam modo a parametro a pendeant? Manifestum autem est in quaestione circa traiectorias istam indolem quantitatum b et c imprimis spectari debere, etiamsi earum neutra in ipsa aequatione differentiali occurrat.

4. Perinde fere se res habet, quando pro curvis secandis aequatio quaecunque differentialis datur, in quo quartum genus constituimus veluti $dy = V\,dx$, vbi V sit functio quaecunque tam ipsarum x, et y quam parametri a, etiamsi enim huiusmodi aequationem forsan nullo modo ad integrationem vel saltem ad separationem perducere liceat, tamen ratio integrationis apud nos constituta esse debet, vt posito

ſito $x = b$ fiat $y = c$, vbi iterum definiri oportet an et quanam ratione haec quantitates b et c a parametro a pendeant; atque hoc quidem iudicium ſi res in genere ſpectetur vtique erit difficillimum.

5. Multo vero adhuc difficilius negotium expedietur, quando aequatio pro curuis ſecandis eſt quidem tantum differentialis primi gradus, ſed vbi ipſa differentialia ad plures dimenſiones exſurgunt, quo *quintum* genus ponamus, quod ita commodiſſime deſcribi poteſt, vt ſi breuitatis gratia $\frac{dy}{dx} = p$, aequatio pro curuis ſecandis vtcunque compoſita fuerit ex quantitatibus x, y, p et parametro a, interim tamen pro determinatione curuarum ſecandarum eadem ſunt tenenda, quae iam ante praecepimus. At ſi aequatio pro curuis ſecandis adeo ad differentialia ſecundi gradus aſcendat, multo maiore circumſpectione erit opus, cum ea duplicem integrationem requirat, et vtriusque conſtantis ingreſſae indoles perfecte debeat eſſe perſpecta, quin etiam has binas conſtantes ſollicite a ſe inuicem diſtingui oportet, ex quo huiusmodi quaeſtiones etiamnunc vix in conſiderationem duci poſſunt.

De Traiectoriis in genere.

Tab. II. Fig. 1. 6. Conſtituta aequatione pro curuis ſecandis, cuiuscunque ſint generis, ſit curua A M in vna earum, pro qua parameter $= a$, pro puncto autem M coordinatae I P $= x$ et P M $= y$, ita vt detur certa aequatio inter has tres quantitates x, y et a, deinde

inde vero fit E M μ traiectoria quaecunque, cuius cum punctum M ipsi commune fit cum curua secanda A M, etiam communes habebit coordinatas x et y, verum quatenus hae coordinatae ad traiectoriam referuntur, aequatio inter x et y maxime discrepabit a superiore, dum scilicet in hac parameter a neutiquam inesse debet, quoniam eadem traiectoria ad omnes secandas aeque refertur, ex quo iam intelligitur, quemadmodum ad aequationem pro traiectoria peruenire queamus, conditio scilicet sectionis suppeditabit nobis certam aequationem, in quam tres quantitates x, y et a vtcunque ingrediantur, vnde si hanc aequationem cum praecedente combinemus, parametrum a inde per methodos notas eliminare poterimus atque aequatio resultans inter x et y erit ipsa aequatio quaesita pro traiectoria.

7. Cum nunc in problemate traiectoriarum angulus m M μ, quem traiectoria cum quauis secandarum facit, constans atque adeo datus esse debeat, ponamus eius tangentem $= \alpha$, atque vt eius valorem inuestigemus, consideretur applicata proxima $p\,m\,\mu$ curuae secandae in m, traiectoriae vero in μ occurrens, atque pro traiectoria fractio $\frac{dy}{dx}$ exprimet tangentem anguli μ M n, at pro angulo m M n inveniendo differentietur aequatio data pro curuis secandis et quia etiam parameter a ibi variabilis habetur, orietur inde huiusmodi aequatio differentialis:

$$dy = p\,dx + q\,da$$

vbi quantitates p et q quomodocunque litteras x, y et a inuoluant, quo facto, cum pro curua A M m parameter a eadem maneat, habebitur pro elemento M m, $\frac{nm}{Mn} = p$,

quae est tangens anguli m M n, vnde colligitur differentiae horum angulorum μ M m tangens

$$= \frac{dy - pdx}{dx + pdy} = \alpha$$

sicque iam habemus alteram illam aequationem quae erit $dy(1 - \alpha p) = dx(\alpha + p)$,

quam cum aequatione pro curuis secandis data coniungere, indeque parametrum a eliminare debemus, vt obtineamus aequationem inter x et y, qua natura traiectoriae exprimetur; probe autem hic animaduertendum est, etiamsi in aequatione inuenta

$$dy(1 - \alpha p) = dx(p + \alpha),$$

bina tantum differentialia dx et dy insint, tamen parametrum a quatenus scilicet in littera p inuoluitur, pro variabili haberi debere.

8. Quod si ergo eueniat, vt littera p parametrum a non inuoluat, sed tantum ex ipsis coordinatis x et y componatur, tum aequatio inuenta

$$dy(1 - \alpha p) = dx(\alpha + p)$$

quia tantum duas variabiles x et y continet, naturam traiectoriae adaequate exprimet, tantum enim opus est, vt eius integrale inuestigetur. At si quantitas p etiam parametrum a contineat, tum ex aequatione finita pro curuis secandis data quaeratur valor

valor ipsius a per x et y expressus, qui in quantitate p loco a substitutus, praebebit aequationem differentialem puram pro traiectoria quaesita, veluti si curuae secundae fuerint rectae ex eodem puncto a ductae, pro quibus habeatur haec aequatio $y = a x$ erit $p = a$ et $q = x$, vnde altera aequatio fit

$$dy(1 - \alpha a) = dx(\alpha + a)$$

in qua si ex aequatione data scribatur $a = \frac{y}{x}$, prodibit pro traiectoria haec aequatio differentialis

$$dy(x - \alpha y) = dx(\alpha x + y),$$

quae quum sit homogenea posito $y = u x$ transformatur in hanc

$$\frac{\alpha dx}{x} = \frac{du(1 - \alpha u)}{1 + uu} = \frac{du}{1 + uu} - \frac{\alpha u du}{1 + uu},$$

cuius integrale est:

$$\alpha l x = \text{Ang. Tang.}\, u - \alpha L \sqrt{(1 + uu)} + \alpha L c,$$

vnde fit

$$\alpha L \frac{x\sqrt{(1 + uu)}}{c} = \text{Ang. Tang.}\, u$$

siue etiam

$$\alpha L \frac{\sqrt{(xx + yy)}}{c} = \text{Ang. Tang.}\, \frac{y}{x},$$

qua aequatione natura spiralis logarithmicae exprimitur, nisi sit $\alpha = \infty$, seu angulus intersectionum rectus, quo casu fit $\sqrt{(xx + yy)} = c$, pro circulo.

9. Verum saepenumero vsu venit, vt ex aequatione data valorem ipsius a haud commode deriuare liceat, neque adeo eius loco substitutio in altera aequatione fieri queat, tum autem perpendendum

dum eſt, ad cognitionem traiectoriae non abſolute requiri aequationem puram inter coordinatas x et y, ſed ſufficit, dummodo eliciatur aequatio differentialis, duas tantum variabiles inuoluens, ita ſi pro curuis ſecandis applicata y aequetur functioni cuicunque ipſarum x et a eaque differentiata praebeat

$$dy = p\,dx + q\,da$$

ita vt p et q tantum ſint functiones ipſarum x et a, tum iſte valor loco dy ſcribatur in aequatione inventa, et reſultabit haec aequatio:

$$\alpha\,dx(1 + pp) - q\,da(1 - \alpha p) = 0,$$

quae quia tantum duas continet variabiles a et x, ea valor ipſius x per a determinari poterit, id quod ad traiectoriam conſtruendam ſufficit, tum enim pro qualibet curua ſecanda A M m, vbi parameter a certum ſortitur valorem, definietur abſciſſa I P $= x$ vnde ipſum punctum M, quod ſimul eſt in traiectoria, innoteſcit, ſicque omnia plane traiectoriae puncta reperientur. Veluti ſi fuerit

$$y = a\sqrt{(1 - xx)}, \text{ erit } p = \frac{-ax}{\sqrt{(1 - xx)}} \text{ et } q = \sqrt{(1 - xx)},$$

qui valores in illa aequatione ſubſtituti praebent

$$\alpha\,dx(1 - xx + aaxx) - da(1 - xx)(aax + \sqrt{(1 - xx)}) = 0.$$

Sin autem ſtatim eliminamus a ex aequatione

$$dy\left(1 + \frac{\alpha ax}{\sqrt{(1 - xx)}}\right) = dx\left(\alpha - \frac{ax}{\sqrt{(1 - xx)}}\right)$$

ponendo $a = \frac{y}{\sqrt{(1 - xx)}}$, prodibit

$$dy(1 - xx + \alpha yx) = dx(\alpha - \alpha xx - yx),$$

vnde

vnde pro casu traiectoriarum orthogonalium, vbi $\alpha = \infty$, fit

$$x y\, d y = d x\,(1 - x x),$$

quae per x diuisa et integrata praebet

$$\tfrac{1}{2} x x + \tfrac{1}{2} y y = l \tfrac{x}{c},$$

quae est aequatio finita pro traiectoria orthogonali.

10. Quo autem hoc argumentum in se maxime diffusum ordine pertractemus, sequentes casus distinctius euoluamus.

Casus Primus quo parameter aequatur functioni cuicunque binarum coordinatarum x et y. Si aequatio pro curuis secandis ita fuerit comparata, vt ex ea valor parametri a commode per functionm ipsarum x et y determinari possit, facta differentiatione prodeat:

$$d a = \mathrm{P}\, d x + \mathrm{Q}\, d y$$

vbi P et Q erunt certae functiones ipsarum x et y, quae vti constat ita a se inuicem pendent, vt sit

$$\left(\frac{d\,\mathrm{P}}{d\,y}\right) = \left(\frac{d\,\mathrm{Q}}{d\,x}\right),$$

quoniam ergo pro eadem parametro a fit

$$\frac{d y}{d x} = -\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}},$$

ponatur hic valor in superiori aequatione inuenta loco p, et pro traiectoria haec obtinebitur aequatio

$$d y\,(\mathrm{Q} + \alpha\, \mathrm{P}) = d x\,(\alpha\, \mathrm{Q} - \mathrm{P}),$$

quae ergo est aequatio differentialis, qua relatio inter ipsas coordinatas traiectoriae exprimitur, ad quam integrandam quaeri oportet eiusmodi functionem

 ipsa-

ipsarum x et y, per quam ea aequatio multiplicata reddatur integrabilis.

11. Quod hic de ipsa parametro a est allatum, valet etiam de functione quacunque parametri, quae sit $= A$, si enim pro curuis secandis fuerit $A =$ functioni ipsarum x et y, ponatur que

$$dA = P\,dx + Q\,dy$$

habebitur vtique vt ante pro traiectoriis haec aequatio:

$$dy\,(Q + \alpha P) = dx\,(\alpha Q - P),$$

ita si fuerit

$$A = a^m = x^n + y^n \text{ fit } P = n.\,x^{n-1} \text{ et } Q = n.\,y^{n-1}$$

vnde pro traiectoriis habebitur haec aequatio

$$dy\,(y^{n-1} + \alpha x^{n-1}) = dx\,(\alpha y^{n-1} - x^{n-1})$$

quod si ergo traiectoriae orthogonales esse debeant, seu $\alpha = \infty$ aequatio erit

$$x^{n-1}\,dy = y^{n-1}\,dx,$$

quae integrata dat

$$\frac{1}{y^{n-2}} - \frac{1}{x^{n-2}} = \frac{1}{c^{n-2}},$$

vbi excipi debet casus $n = 2$, quo fit

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

hincque

$$Ly = Lx + Lc, \text{ seu } y = cx.$$

12. Vt hunc casum exemplis aliquanto generalioribus quoque illustremus, sit X functio quaecunque

que ipſius x et Y functio quaecunque ipſius y, ponaturque breuitatis gratia

$$dX = X' dx \text{ et } dY = Y' dy,$$

quo poſito ſit pro curuis ſecandis

$$A = X + Y, \text{ erit } P = X' \text{ et } Q = Y',$$

vnde pro traiectoriis habebitur iſta aequatio:

$$dy(Y' + \alpha X') = dx(\alpha Y' - X'),$$

hincque pro orthogonalibus

$$X' dy = Y' dy \text{ ſeu } \frac{dy}{Y'} = \frac{dx}{X'}.$$

13. Ponamus nunc pro curuis ſecandis huiusmodi dari aequationem,

$$A = XY \text{ eritque } P = X'Y, \; Q = XY'$$

atque hinc pro traiectoriis naſcetur haec aequatio differentialis

$$dy(XY' + \alpha X'Y) = dx(\alpha XY' - X'Y)$$

hincque pro orthogonalibus

$$\frac{Y\,dy}{Y'} = \frac{X\,dx}{X'},$$

ita ſi fuerit

$$X = x^m, \; Y = y^n,$$

ita vt pro curuis ſecandis proponatur haec aequatio

$$A = x^m y^n,$$

quae aequatio infinitas tam parabolas quam hyperbolas ſuperiorum ordinum continet, tum ob

$$X' = m.\, x^{m-1} \text{ et } Y' = n y^{n-1},$$

pro traiectoriis orthogonalibus oritur haec aequatio

$$\frac{y\,dy}{n} = \frac{x\,dx}{m},$$

cuius

cuius integrale eſt

$$\tfrac{1}{n}yy - \tfrac{1}{m}xx = \pm cc,$$

quae ſemper eſt pro ſectione conica idque vel ellipſi vel hyperbola.

14. *Caſus Secundus*, quo applicata y aequatur functioni cuicunque parametri a et abſciſſae x. Pro hoc caſu prodeat per differentiationem:

$$dy = P\,dx + Q\,da$$

vbi P et Q ſunt certae functiones ipſarum a et x atque eiusmodi, vt ſit $(\frac{dP}{da}) = (\frac{dQ}{dx})$, quare quum manente a hinc ſit $\frac{dy}{dx} = P$, hic valor loco p in aequatione generali ſupra inuenta ſubſtitutus, dabit pro traiectoriis hanc aequationem

$$dy(1 - \alpha P) = dx(\alpha + P)$$

quae quum adhuc tras variabiles contineat loco dy valor modo datus ſubſtituatur, ſicque orietur haec aequatio

$$Q\,da(1 - \alpha P) = \alpha\,dx(1 + PP)$$

quae tantum duas variabiles x et a continet, vnde pro quauis parametro a hoc eſt pro qualibet curuarum ſecandarum definiri poteſt abſciſſa $1P = x$, hincque ipſum punctum M in traiectoria ſitum, quod ad curuam conſtruendam ſufficit. Pro traiectoriis ergo orthogonalibus habebitur haec aequatio

$$-PQda = dx(1 + PP) \text{ ſiue } dx(1 + PP) + PQda = 0$$

ſicque totum negotium iam huc redit, vt huius aequationis integrale inueſtigetur.

15.

15. Quodsi hic pro exemplis statuere vellemus $y = A + X$ vel $y = A X$ perspicuum est haec eadem exempla iam casu praecedente esse pertractata, contemplemur ergo hoc exemplum satis memorabile

$$y = \sqrt{(2ax - xx)},$$

ita vt curuae secandae sint circuli infiniti, se mutuo tangentes in eodem puncto A, quorum centra in eandem rectam cadant. Hinc igitur erit

$$P = \frac{a - x}{\sqrt{(2ax - xx)}}, \quad Q = \frac{x}{\sqrt{(2ax - xx)}}$$

hincque

$$1 + PP = \frac{aa}{2ax - xx},$$

vnde pro traiectoria orthogonali prouenit haec aequatio

$$aadx + (ax - xx)da = 0,$$

quae per $a^2 xx$ diuisa dat

$$\frac{adx + xda}{aaxx} - \frac{da}{a^3} = 0,$$

cuius integrale est

$$\frac{1}{ax} - \frac{1}{2aa} = \pm \frac{1}{2cc}, \text{ siue}$$

$$cc(2a - x) = \pm aax$$

quae abit in hanc

$$cc(2ax - xx) = \pm aaxx,$$

quum autem sit

$$2ax - xx = yy$$

radice extracta sit

$$cy = ax = \frac{xx + yy}{2},$$

 ita

ita vt eliminata a, pro traiectoria orthogonali oriatur haec aequatio

$$2cy = xx + yy,$$

quae etiam eſt pro circulo.

16. *Caſus Tertius*, quo abſciſſa x aequatur functioni y et parametri a. Praebeat haec aequatio differentiata

$$dx = P\,dy + Q\,da$$

vbi P et Q erunt tales functiones ipſarum y et a vt ſit $\left(\frac{dP}{da}\right) = \left(\frac{dQ}{dy}\right)$; iam quum manente a hinc fiat $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{P}$, hic valor loco p ſupra ſubſtitutus dabit pro traiectoriis hanc aequationem

$$dy\,(P - \alpha) = dx\,(1 + \alpha P)$$

in qua loco dx valor ſuperior ſubſtituatur, vt obtineatur ſequens aequatio duas tantum variabiles y et a inuoluens

$$Q\,da\,(1 + \alpha P) + \alpha\,dy\,(1 + PP) = 0$$

cuius reſolutio conſtructionem traiectoriarum ſuppeditabit.

17. Hinc ſi traiectoriae debeant eſſe orthogonales ſeu $\alpha = \infty$ pro iis habebitur haec aequatio:

$$PQ\,da + dy\,(1 + PP) = 0$$

at ſi angulus interſectionis debeat euaneſcere, quod euenit ſi traiectoria curuas propoſitas, tangat ob $\alpha = 0$ habebitur haec aequatio $Q\,da = 0$, ſiue $Q = 0$, quae eſt aequatio finita, ex qua y per a vel viciſſim a per y definiri poterit, vnde reſultabit eius-

modi

modi traiectoria, quae omnes curuas secandas contingat, veluti si fuerit, $x = \frac{2ay - aa}{f}$, quae est pro infinitis rectis certo modo in plano ductis, ob $Q = \frac{2y - 2a}{f}$, haec aequatio $y = a$ praebebit lineam curuam omnes rectas illas tangentem, cuius aequatio inter coordinatas x et y ob $a = y$ erit $x = \frac{yy}{f}$, quae est pro parabola parametro f descripta. Caeterum quum coordinatae inter se sint permutabiles, hic casus a praecedente non differre est censendus.

18. *Casus Quartus*, quo aequatio pro curuis secandis inter coordinatas x, y et parametrum a est homogenea, ita vt hae tres quantitates vbique eundem dimensionum numerum adimpleant. Quoniam aequatio inter x, y et a proposita est homogenea, si faciamus has substitutiones $x = at$ et $y = au$, parameter a per diuisionem penitus tolletur, ita vt resultet aequatio duas tantum variabiles t et u inuoluens, qua ergo certa relatio inter t et u exprimetur, vnde sumtis differentialibus prodire ponamus $du = v\,dt$, ita vt tam u quam v vt functiones ipsius t spectari queant. Hinc autem differentiando adipiscimur:

$$dx = a\,dt + t\,da \text{ et } dy = av\,dt + u\,da$$

hinc ergo pro eadem curua secanda A M, quia parameter a manet eadem, erit $dx = a\,dt$ et $dy = av\,dt$ vnde fit $\frac{dy}{dx} = v$, qui valor in aequatione generali supra inuenta loco p scribi debet, scribantur autem

 ibidem

ibidem loco dy et dx, valores modo exhibiti, atque pro traiectoriis obtinebitur ista aequatio

$$(avdt + uda)(1 - \alpha v) = (adt + tda)(\alpha + v)$$

quae tantum duas continet variabiles t et a, ex qua elicimus

$$da(u - \alpha uv - \alpha t - tv) = \alpha adt(1 + vv)$$

quae sponte est separabilis et praebet

$$\frac{da}{a} = \frac{\alpha dt(1 + vv)}{(u(1 - \alpha v) - t(\alpha + v))}.$$

19. Hac ergo aequatione parameter a aequabitur certae functioni ipsius t, quae si loco a in aequationibus principalibus, $x = at$ et $y = au$ substituatur, tam pro x quam pro y certas functiones ipsius t consequimur, vnde natura traiectoriae facillime perspicitur, quin etiam si ex his aequationibus quantitas t eliminetur; peruenietur ad aequationem puram inter ipsas coordinatas x et y pro traiectoria quaesita, quae quum nouam constantem verbi gratia c inuoluat per integrationem ingressam, ea variata infinitas nanciscemur traiectorias, quod quo facilius perspiciatur, ponamus esse

$\int \frac{\alpha dt(1 + vv)}{(u(1 - \alpha v) - t(\alpha + vv))} = LT$ eritque integrando $a = cT$, vnde pro traiectoriis has reperimus formulas $x = cTt$ et $y = cTu$.

20. Quodsi hunc casum accuratius perpendamus, facile deprehendemus, omnes curuas secandas hoc casu similes inter se fore. Consideretur enim curua determinata, cuius abscissa sit t, applicata vero u, sit

ſit igitur D V haec curua determinata, cuius abſciſſas I T $= t$ et applicata T V $= u$, vbi ſcilicet inter t et u eadem aequatio ſubſiſtat, hac autem curva deſcripta, ſi pro quocunque valore parametri a fiant hae proportiones Tab. II. Fig. 2.

$$1 : a = IT : IP \quad \text{et} \quad 1 : a = TV : PM,$$

euidens eſt fore

$$IP = at = x \quad \text{et} \quad PM = au = y,$$

ſicque punctum M erit in vna curuarum ſecandarum huic ſcilicet parametro a conueniente, ſicque haec curua A M perfecte ſimilis erit D V, quod quum de omnibus curuis ſecandis aeque valeat, patet omnes etiam inter ſe eſſe ſimiles, atque viciſſim ſi omnes curuae ſecandae fuerint ſimiles; tum deſcribatur vna earum ex parametro $a = 1$ quae ſit curua D V, vbi V ſit punctum homologum puncto M, eruntque coordinatae I T $= t$ et T U $= u$ eae ipſae; ad quas initio aequationem homogeneam reduximus. Simili autem modo intelligitur, quoniam pro traiectoriis inuentae ſunt formulae $x = c\,T\,t$ et $y = c\,T\,u$, omnes has traiectorias etiam inter ſe fore curuas ſimiles, ita vt ſi vna fuerit deſcripta verbi gratia pro valore $c = 1$, reliquae omnes ex ea ope principii ſimilitudinis conſtrui queant. Manifeſtum autem eſt, principium ſimilitudinis ad punctum fixum I referri debere, quod probe notandum, ne notio ſimilitudinis hic perperam applicetur. Hic ſcilicet non tam ſimilitudo abſoluta curuarum ſecandarum ſpectatur, quam ſimilitudo poſitionis reſpectu puncti fixi I, quam ita comparatam intelligi oportet, vt omnes rectae ex hoc puncto I eductae cunctas curuas secandas in punctis homologis similiter traiiciant.

21. Exempli loco afferamus aequationem iam supra tractatam $yy = 2ax - xx$ quippe quae est homogenea, posito autem $x = at$ et $y = au$, ea abit in hanc

$$uu = 2t - tt \text{ seu } u = \sqrt{(2t - tt)}, \text{ ita vt sit } v = \frac{1-t}{\sqrt{(2t-tt)}}$$

quibus valoribus substitutis pro traiectoriis haec elicitur aequatio differentialis:

$$\frac{da}{a} = \frac{\alpha\, dt}{(t - \alpha\sqrt{(2t - tt)})\sqrt{(2t - tt)}},$$

hinc ergo pro traiectoriis orthogonalibus habebitur

$$\frac{da}{a} = -\frac{dt}{2t - tt} = -\frac{dt}{2t} - \frac{dt}{2(2-t)}$$

cuius integrale est

$$\text{Log.}\, a = \text{L}\sqrt{\left(\frac{2-t}{t}\right)} + \text{L}\, c \text{ siue } a = c\sqrt{\left(\frac{2-t}{t}\right)}.$$

quare pro his traiectoriis habebimus

$$x = c\sqrt{(2t - tt)} \text{ et } y = c(2 - t),$$

ex posteriori fit

$$2 - t = \frac{y}{c} \quad \text{et } t = \frac{2c - y}{c}$$

hincque

$$\sqrt{(2t - tt)} = \frac{\sqrt{(2cy - yy)}}{c} = \frac{x}{c},$$

sicque resultat aequatio inter x et y haec

$$xx = 2cy - yy.$$

22. *Casus Quintus*, quo tam abscissa x quam applicata y aequatur functioni cuicunque parametri a et

et nouae cuiusdam variabilis t. Quum x ſit functio binarum variabilium t et a itidemque y functio earundem, ponamus differentiando prodire:

$$dx = P\,dt + Q\,da \quad \text{et} \quad dy = R\,dt + S\,da$$

vbi notandum eſt, fore

$$\left(\frac{dP}{da}\right) = \left(\frac{dQ}{dt}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{dR}{dt}\right) = \left(\frac{dS}{dt}\right).$$

Iam quia pro eadem curua ſecanda A M parameter a non variatur, pro ea erit $\frac{dy}{dx} = \frac{R}{P}$ qui valor loco p ſubſtitutus, in aequatione generali pro traiectoriis ſupra data, praebet iſtam aequationem:

$$(R\,dt + S\,da)(P - \alpha R) = (P\,dt + Q\,da)(\alpha P + R),$$

quae reducitur ad hanc:

$$da(PS - QR - \alpha(PQ + RS)) = \alpha\,dt(PP + RR).$$

23. Quodſi ergo traiectoriae orthogonales deſiderentur, poſito $\alpha = \infty$ pro iis habebitur iſta aequatio

$$dt(PP + RR) + da(PQ + RS) = 0$$

in cuius reſolutione vel integratione totum negotium verſatur. At ſi curua deſideretur, quae omnes propoſitas contingat poſito $\alpha = 0$, prodit haec aequatio finita $PS - QR = 0$. Talis ſcilicet curua locum habet, quando curuae ſecandae ita ſunt comparatae, vt binae proximae quaeuis ſe alicubi contingant, tum enim curua, quae per omnia haec contactus puncta traducitur, ſimul omnes tanget. Huiusmodi contactus euenire poteſt in infinitis lineis rectis,

rectis, certa lege ductis, quas in genere nostro modo repraesentare licet, vt sit

$$x = t \quad \text{et} \quad y = at + A$$

vbi A denotat functionem quamcunque ipsius a, sitque

$$dA = A' \, da,$$

hoc ergo casu fiet

$$P = 1, \; Q = 0, \; R = a \quad \text{et} \quad S = A' + t$$

vnde pro curua quaesita reperitur

$$A' + t = 0$$

ita vt fiat

$$x = -A' \quad \text{et} \quad y = A - aA'.$$

24. *Casus Sextus* quo tantum pro singulis curvis secandis aequatio differentialis inter coordinatas x et y datur.

Sollicite hic distingui oportet inter aequationem differentialem, quae tantum ad singulas curuas secandas refertur et inter aequationem differentialem, quae omnes plane curuas secandas in se simul complectitur, cuiusmodi aequationibus hactenus in casibus pertractatis sumus vsi, tali forma

$$dy = p\,dx + q\,da$$

expressis, in quas scilicet binae coordinatae x et y, atque etiam parameter a tanquam variabiles ingrediuntur, earum igitur character in hoc consistit, quod terna differentialia dx, dy et da in iis occurrant.

25. At aequationes, de quibus in hoc casu sermo est, tantum duo differentialia dx et dy inuoluunt, etiamsi parameter a in eas ingrediatur, ad quarum indolem explicandam sit V functio quaecunque abscissae x et parametri a, quaelibet autem curva secanda hoc modo definiatur, vt sit $y = \int V\, dx$, in qua integratione sola x vt variabilis spectatur, parametro a pro constante habita, hac enim ratione vna tota curua ex secandis penitus determinatur, quoniam pro ea parameter a reuera manet constans, interim tamen si pro qualibet integratione parameter a varietur, eadem formula successiue ad omnes curuas secandas adhiberi poterit, ex quo iam satis intelligitur, quomodo aequatio differentialis hinc nata $dy = V\, dx$, tantum ad singulas curuas secandas pertinere, non vero omnes simul in se complecti dicatur.

26. Proposita igitur huiusmodi aequatione differentiali $dy = V\, dx$ probe animaduertendum est, in ea parametrum a pro constanti haberi, ita vt integrale more solito expressum $\int V\, dx$, valorem applicatae y exhibeat, quum autem haec ipsa integratio nouam constantem recipiat, eius determinatio simul praescribi debet, quia alioquin ipsa quaestio non foret determinata, quare si huiusmodi casus proponatur, ante omnia in ipsa propositione definiri debet, quanam lege haec integratio sit instituenda, quae conditio ita generatim exprimi potest, vt posito $x = f$, fiat $y = g$, vbi quidem quantitates f et g vel prorsus sunt constantes vel etiam certo quo-

 dam

dam modo a parametro a pendeant, ita vt dum variando parametrum a ad alias curuas secandas transimus, etiam litteris f et g alii valores tribui debeant. Manifestum enim est, nisi talis conditio expressis verbis fuerit constituta, quaestionem neutiquam esse absolutam.

27. Etsi autem talis aequatio pro singulis curuis secandis sufficit, tamen eam neutiquam ad traiectorias determinandas adhibere licet, quoniam enim talis formula $dy = V\,dx$, ad nostrum casum secundum accedere videtur, vbi erat

$$dy = P\,dx + Q\,da,$$

primum quidem nullum est dubium, quin hic sit $P = V$, sed altera quantitas Q, a qua essentialiter determinatio traiectoriarum pendet, quandoquidem pro iis inuenimus

$$Q\,da\,(1 - \alpha P) = \alpha\,dx\,(1 + PP),$$

hic prorsus non iudicatur.

28. Quoties quidem vel formulam $\int V\,dx$ vel integrare vel saltem ad quadraturas cognitas reducere licet, huic incommodo facile remedium adfertur, namque integrale inuentum $\int V\,dx$, atque vt modo ante praecepimus rite determinatum, denuo differentietur, dum non solum x, sed etiam a variabile accipiatur, cuius differentialis quidem pars elementum dx continens erit ipsa formula proposita $V\,dx$, altera vero pars elemento da affecta dabit verum valorem membri illius $Q\,da$, vel breuius hoc membrum

brum $Q\,d\,a$ obtinebitur, si integrale $\int V\,d\,x$ per solam variabilem a differentietur. Quando autem formulam $V\,d\,x$ hoc modo integrare non licet, tum etiam nulla adhuc via patet, quantitatem Q ita cognoscendi, vt inde pro traiectoriis aequatio confici possit.

29. Cognita quidem est methodus in huiusmodi formulis differentialibus completis

$$d\,y = P\,d\,x + Q\,d\,a,$$

si detur altera pars $P\,d\,x$, alteram $Q\,d\,a$ inuestigandi, quum enim sit $\left(\frac{d\,Q}{d\,x}\right) = \left(\frac{d\,P}{d\,a}\right)$, hic valor $\left(\frac{d\,P}{d\,a}\right)$ assignari potest, hincque fiet $d\,x\left(\frac{d\,Q}{d\,x}\right) = d\,x\left(\frac{d\,P}{d\,a}\right)$, vbi quum $d\,x\left(\frac{d\,Q}{d\,x}\right)$ sit differentiale ipsius Q pro sola variabili x, manifestum est fore $Q = \int d\,x\left(\frac{d\,P}{d\,a}\right)$, si quidem in hac integratione tantum x pro variabili habeatur. Pro nostro ergo casu vbi $P = V$ haberemus $Q = \int d\,x\left(\frac{d\,V}{d\,a}\right)$ ideoque pro traiectoriis hanc aequationem

$$d\,a\,(1 - \alpha\,V)\int d\,x\left(\frac{d\,V}{d\,a}\right) = \alpha\,d\,x\,(1 + V\,V)$$

in qua quum parameter a sit essentialiter variabilis, formula $\int d\,x\left(\frac{d\,V}{d\,a}\right)$ nullum plane vsum praestare potest, nisi haec integratio actu expediri queat. His difficultatibus quibus praesens casus premitur dilucide explicatis, operae imprimis pretium erit, vnum casum inuestigasse, quo traiectorias assignare licet, etiamsi neque formula $\int V\,d\,x$ neque $\int d\,x\left(\frac{d\,V}{d\,a}\right)$, integrari possit, vnde sequens Problema proponamus.

Problema.

30. Quaeritur, quomodo pro singulis curuis secandis aequationem differentialem $dy = V dx$ (vbi V tam parametrum a quam abscissam x absoluit) comparatam esse oporteat, vt inde traiectorias definire liceat, etiamsi ipsa formula $\int V dx$ nullo modo integrabilis existat.

Solutio.

Totum ergo negotium huc redit, vt casum inuestigemus quo traiectorias sine formula $\int dx (\frac{dV}{da})$ definire liceat, ad quem inueniendum denotet tantisper Q valorem formulae $\int dx (\frac{dV}{da})$, vt aequatio differentialis completa pro omnibus curuis secandis sit

$$dy = V dx + Q da$$

vnde secundum praecepta ante data pro traiectoriis inuenta est haec aequatio

$$Q da (1 - \alpha V) = \alpha dx (1 + VV)$$

quae quum duas variabiles a et x inuoluat, dabitur certa functio ipsarum x et a, per quam haec aequatio multiplicata fiat integrabilis, verum euidens est inuestigationem talis functionis in genere non minoribus obstaculis exponi, quam id ipsum, de quo quaeritur.

31. Verum tamen datur casus quidam specialis, quo talis inuestigatio succedit, atque in hunc finem repraesentemus aequationem nostram sub hac forma:

$$\alpha dx \frac{(1 + VV)}{\alpha V - 1} + Q da = 0$$

et

et quaeramus iam functionem ipsius a tantum, quae sit A, per quam ista aequatio multiplicata fiat integrabilis, scilicet haec forma

$$\alpha A\, dx \frac{(1+VV)}{\alpha V-1} + A Q\, da = 0$$

quae comparata cum forma generali $P\,dx + Q\,da$, quae integrabilis existit, si

$$\left(\frac{dP}{da}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

nobis praescribit hanc conditionem

$$\alpha \left(\frac{d.\, A \frac{(1+VV)}{\alpha V-1}}{da}\right) = \left(\frac{d.\, A Q}{dx}\right) = A\left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

verum ex ipsa aequatione proposita

$$dy = V\,dx + Q\,da$$

quae per hypothesin est integrabilis, est

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{dV}{da}\right).$$

Differentiemus igitur fractionem

$$\frac{A(1+VV)}{\alpha V-1},$$

sumendo solam a variabilem, quod fit, si loco dV scribamus $\left(\frac{dV}{da}\right)$, similique modo $\frac{dA}{da}$ loco dA atque hinc prius membrum nostrae postremae aequationis erit

$$\frac{\alpha\, dA}{da} \cdot \frac{(1+VV)}{\alpha V-1} + \alpha A \left(\frac{dV}{da}\right) \frac{(\alpha VV - 2V - \alpha)}{(\alpha V-1)^2}$$

posterius vero membrum erit $A\left(\frac{dV}{da}\right)$ ita, vt nunc habeatur ita aequatio

$$\frac{\alpha\, dA}{da} \cdot \frac{(1+VV)}{\alpha V-1} - A\left(\frac{dV}{da}\right)\frac{(1+\alpha\alpha)}{(\alpha V-1)^2} = 0.$$

32. In hac aequatione tantum vnius generis differentialia occurrunt scilicet $\frac{dA}{da}$ et $\left(\frac{dV}{da}\right)$ ad solam

 varia-

variabilitatem ipſius a relata, ita vt abſciſſa x non aliter niſi, vt conſtans, in ea inſit, quare ſi nunc x pro conſtante habeamus clauſulis illis reiectis, quippe quae tantum ob duas variabiles fuerunt vſurpatae, habebimus hanc aequationem differentialem:

$$\alpha\, d\, A\, (1 + V\, V) - \frac{A\, d\, V\, (1 + \alpha\, \alpha)}{\alpha\, V - 1} = 0$$

qua certa relatio inter A et V exprimitur, abſciſſa ſcilicet x vt conſtante ſpectata, nunc vero inde ſtatim elicimus

$$\frac{\alpha\, d\, A}{A} = \frac{(1 + \alpha\, \alpha)\, d\, V}{(\alpha\, V - 1)(1 + V\, V)} = \frac{\alpha\, \alpha\, d\, V}{\alpha\, V - 1} - \frac{\alpha\, V\, d\, V - d\, V}{1 + V\, V}$$

cuius integrale eſt

$$\alpha LA = \alpha L(\alpha V - 1) - \alpha L\sqrt{(1 + VV)} - \text{Ang. Tang } V + \alpha LX$$

vbi loco conſtantis introduximus functionem quamcunque ipſius x, quare per hanc aequationem quantitas V certo modo determinatur per A et X, ideoque erit functio ipſarum a et x, qualis in problemate noſtro deſideratur.

33. Quod ſi enim pro ſingulis curuis ſecandis habeatur iſta aequatio differentialis $d\, y = V\, d\, x$, ſiue haec integralis $y = \int V\, d\, x$, vbi V ſit ea ipſa functio ipſarum a et x, quam modo inuenimus, tum pro traiectoriis inuenta eſt haec aequatio per hypotheſin integrabilis

$$\alpha\, A\, d\, x \frac{(1 + V\, V)}{\alpha\, V - 1} + A\, Q\, d\, a = 0,$$

cuius integrale reperietur, ſi ſolum prius membrum integretur poſito a conſtante, vnde hoc integrale erit

$$\alpha\, A \int d\, x \frac{(1 + V\, V)}{\alpha\, V - 1} = C,$$

vbi

vbi quantitas C vel eſt vere conſtans, vel certo modo a parametro a pendebit, qui modus ex ea conditione, qua prius integrale $\int V\,d\,x$ capi debet, eſt petendus. Pro qualibet ſcilicet curua ſecanda ex eius parametro a hinc colligitur abſciſſa x, indeque punctum M, quod ſimul eſt in traiectoria quaeſita.

34. Illa autem aequatio logarithmica, qua natura functionis V definitur, commodius ita repraeſentari poteſt Tab. II. Fig. 1.

$$\text{Ang. Tang. } V = \alpha\, L \frac{(\alpha V - 1)X}{A\sqrt{(1+VV)}},$$

vnde generatim pro angulo interſectionis quocunque valorem ipſius V neutiquam elicere licet; conſideremus autem caſum quo traiectoriae requiruntur orthogonales, quia enim tum fit $\alpha = \infty$, ideoque $\alpha V - 1 = \alpha V$ aequatio noſtra fiet

$$\tfrac{1}{\alpha}\text{ Ang. Tang. } V = \alpha\, L \frac{VX}{A\sqrt{(1+VV)}} = 0$$

vnde ſequitur eſſe debere

$$\frac{\alpha VX}{A\sqrt{(1+VV)}} = 1, \text{ ſiue } \frac{V}{\sqrt{(1+VV)}} = \frac{A}{\alpha X},$$

vbi quum nihil impediat, quo minus pro αX ſcribamus X, habebimus

$$\frac{V}{\sqrt{(1+VV)}} = \frac{A}{X},$$

hinc vero porro colligimus

$$V = \frac{A}{\sqrt{(XX-AA)}} \text{ et } \sqrt{(1+VV)} = \frac{X}{\sqrt{(XX-AA)}}.$$

35. Conſequenter ſi pro curuis ſecandis propoſita fuerit haec aequatio differentialis:

$$dy = \frac{A\,dx}{\sqrt{(XX-AA)}},$$

vbi

vbi X denotat functionem quamcunque ipsius x et A ipsius a, poterimus traiectorias orthogonales inuenire, pro iis enim habebimus istam aequationem

$$\int \frac{XX\,dx}{\sqrt{(XX - AA)}} = C$$

vbi C vel est quantitas constans vel certo quodam modo a parametro a pendet, quemadmodum scilicet conditio integrationis formulae

$$\int \frac{A\,dx}{\sqrt{(XX - AA)}} \text{ postulat.}$$

Hic ergo praeter omnem exspectationem ad easdem traiectorias peruenimus, quas supra ex natura brachystochronarum sumus adepti.

36. Quo autem clarius appareat, quomodo quantitas C pendeat a conditionibus integrationis pro curuis secandis, sequenti ratione colligere poterimus, ponamus istam integrationem ita institui vt fiat

$$y = \int \frac{A\,dx}{\sqrt{(XX - AA)}} + B,$$

vbi B denotet vel quantitatem vere constantem, vel vtcunque ab a pendentem, prouti libuerit, dum ipsum integrale euanescit posito $x = 0$ vel cuipiam valori dato et quia aequationem differentialem in genere sumsimus

$$dy = P\,dx + Q\,da,$$

hoc postremum membrum $Q\,da$ complectetur dB, atque adeo reiectis terminis ab x pendentibus erit

$$Q\,da = dB.$$

Iam quia pro traiectoriis orthogonalibus inuenimus hanc aequationem integralem

$$\int \frac{XX\,dx}{\sqrt{(XX - AA)}} - C = 0,$$

huius-

huiusque differentiale contineri debet in forma

$$\alpha A \frac{dx(1+VV)}{\alpha V-1} + A Q d a = 0$$

necesse est, vt hoc postremum membrum $A Q d a$ aequetur ipsi $-d C$, reiectis scilicet terminis ab x pendentibus, dum etiam haec integratio eadem lege instituatur vti prior, quare quum sit

$$Q d a = d B$$

fiet nunc

$$d C = - A d B$$

ideoque

$$C = E - \int A d B$$

vbi E denotat quantitatem vere constantem. Quando ergo vti in brachystochronis vsu venit littera B vel euanescit vel vera est constans, tum posterior littera C denotabit veram constantem, quemadmodum ibi inuenimus. Quocirca haec determinatio multo latius patet quam illa, quae erat ex brachystochronis petita, quandoquidem hic pro B functionem quamcunque ipsius A assumere licet, cum ibi fuisset $B = 0$.

37. *Casus Septimus* quo aequatio pro curuis secandis refertur ad punctum fixum. Sit igitur I punctum illud fixum, ad quod primum curuae secandae $A M m$ referantur, per distantiam $I M = v$ et angulum $C I M = \Phi$, a directione fixa I C sumtum ac pro hac quidem curua $A M m$ sit parameter $= a$, variabilis si ad alias curuas secandas transimus, constans vero quamdiu in eadem remanemus. Tab. II. Fig. 3.

Dabitur ergo pro curuis fecandis aequatio inter v, Φ et a, ex cuius differentiatione prodeat

$$d\Phi = p\,dv + q\,da\,,$$

vnde pro eadem curua fecanda A M m,

erit $d\Phi = p\,dv$,

vnde definire licet angulum A M I, quem haec curva cum recta I M conftituit quippe cuius tangens, quae in genere eft $\frac{v\,d\Phi}{dv}$, pro hoc cafu erit $= p\,v$.

38. Sit iam curua E M μ traiectoria quaecunque fecans curuam A M fub angulo A M E cuius tangens fit vt ante $= \alpha$, et quia eaedem variabiles v et Φ etiam ad traiectoriam pertinent, pro qua parameter a vtique variabilis haberi debet, erit anguli I M E tangens $= \frac{v\,d\Phi}{dv}$, quo angulo cum praecedente comparato colligetur tangens differentiae eorum hoc eft

$$\text{Tang. A M E} = \frac{p\,v - \frac{v\,d\Phi}{dv}}{1 + \frac{p\,v\,v\,d\Phi}{dv}} = \frac{v(p\,dv - d\Phi)}{dv + p\,v\,v\,d} = \alpha,$$

ita vt pro traiectoriis refultet ifta aequatio

$$(v\,p - \alpha)\,dv = v\,d\Phi\,(1 + \alpha\,p\,v)$$

quae pro traiectoriis orthogonalibus ob $\alpha = \infty$ abit in hanc

$$dv + p\,v\,v\,d\Phi = 0$$

hanc ergo aequationem cum praecedente ita coniungi oportet, vt in ea duae tantum variabiles infint, hocque modo inuentio traiectoriarum perducetur ad aequationem differentialem ordinariam, inter duas variabiles.

39.

39. Quodſi ergo aequatio pro curuis ſecandis ita fuerit comparata, vt angulus Φ commode per functionem ipſarum v et a exprimi poſſit, tum in aequatione differentiali

$$d\Phi = p\,dv + q\,da$$

litterae p et q datae erunt functiones ipſarum v et a ita vt ſit $(\frac{dp}{da}) = (\frac{dq}{dv})$; hoc valore iam pro $d\Phi$ ſubſtituto pro traiectoriis in genere orietur haec aequatio

$$qv\,da(1 + \alpha pv) + \alpha\,dv(1 + ppvv) = 0$$

hincque pro orthogonalibus:

$$pqv^2\,da + dv(1 + ppvv) = 0.$$

40. Ponamus lineas ſecandas omnes eſſe rectas ex ipſo puncto I eductas et quia anguli A M I euaneſcunt; manifeſtum eſt fore $p = 0$, ideoque aequatio erit pro lineis ſecandis $d\Phi = q\,da$ ſiue $d\Phi = da$ nihil enim impedit quominus angulum Φ, tamquam ipſam parametrum a ſpectemus ita vt ſit $q = 1$, tum ergo pro traiectoriis habebimus hanc aequationem:

$$v\,da + \alpha\,dv = 0 \text{ ſiue ob } da = d\Phi$$

hanc

$$v\,d\Phi + \alpha\,dv = 0,$$

ita vt ſit

$$\frac{v\,d\Phi}{dv} = -\alpha,$$

vnde patet traiectoriam eſſe ſpiralem logarithmicam, omnes radios I M ſub angulo conſtante, cuius tan-

 gens

gens $= -\alpha$, secantem, ac si fuerit $\alpha = \infty$, fit $dv = 0$ seu $v = c$ ideoque $v = c$, quo casu traiectoria erit circulus centro c descriptus.

41. Retineamus aequationem generalem:

$$d\Phi = p\,dv + q\,da$$

ita vt pro vnaquaque curua secanda, fit $\Phi = \int p\,dv$ sumamusque hanc formulam integrari non posse, ita vt hinc q non liqueat, et quaeramus vti in problemate casui sexto annexo indolem functionis p, vt traiectoria construi possit, pro qua quum aequatio sit

$$q\,da + \frac{\alpha\,dv(1 + ppvv)}{v(1 + \alpha pv)} = 0,$$

ponamus vt supra hanc aequationem integrabilem reddi, si multiplicetur per A functionem quamcunque ipsius a, ne autem in ambages incidamus; consideremus tantum traiectorias orthogonales, pro quibus haec aequatio

$$\mathrm{A}\,q\,da + \mathrm{A}\,dv\frac{(1 + ppvv)}{pvv} = 0$$

debet esse integrabilis; necesse igitur est, vt sit

$$\mathrm{A}\left(\frac{dq}{dv}\right) = \frac{d\mathrm{A}}{da}\left(\frac{1}{pvv} + p\right) + \mathrm{A}\left(\frac{d\left(\frac{1}{pvv} + p\right)}{da}\right)$$

at vero est

$$\left(\frac{dq}{dv}\right) = \left(\frac{dp}{da}\right)$$

vnde ista aequatio induet hanc formam

$$\mathrm{A}\left(\frac{dp}{da}\right) = \frac{d\mathrm{A}}{da}\left(\frac{1}{pvv} + p\right) + \mathrm{A}\left(\left(\frac{dp}{da}\right) - \frac{1}{ppvv}\left(\frac{dp}{da}\right)\right).$$

42.

42. Quia in his differentialibus sola parameter a vt variabilis occurrit, spectemus revera v vt constantem et adipiscemur hanc aequationem

$$d\,A\left(\frac{1}{pvv}+p\right)=\frac{A\,dp}{ppvv}$$

vnde fit

$$\frac{dA}{A}=\frac{dp}{p(1+ppvv)}=\frac{dp}{p}-\frac{pvv\,dp}{1+ppvv},$$

quae integrata dat

$$LA=L\frac{p}{\sqrt{(1+vvpp)}}+LV \text{ siue } \frac{p}{\sqrt{(1+vvpp)}}=\frac{A}{V}$$

vnde colligitur

$$p=\frac{A}{\sqrt{(VV-AAvv)}} \text{ et } \sqrt{(1+ppvv)}=\frac{V}{\sqrt{(VV-AAvv)}}.$$

43. Consequenter si pro curuis secandis haec detur aequatio

$$\Phi=\int\frac{A\,dv}{\sqrt{(VV-AAvv)}},$$

vbi V denotat functionem quamcunque ipsius v et A ipsius a, tum pro traiectoriis orthogonalibus colligitur ista aequatio differentialis:

$$A\,q\,da+\frac{VV\,dv}{vv\sqrt{(VV-AAvv)}}=0$$

quae quum per se sit integrabilis; aequatio finita ita se habebit

$$\int\frac{VV\,dv}{vv\sqrt{(VV-AAvv)}}=C,$$

in qua integratione parameter a pro constante habetur. Atque haec aequatio pro curuis secandis eadem est, quam in superiori dissertatione §. 30. ex brachystochronis deduximus, si modo hic loco v scribamus u, loco V vero vuu.

EVOLVTIO VBERIOR CASVVM, QVIBVS LINEAE SECANDAE SVNT RECTAE.

Problema I.

Si rectae secandae ita fuerint ductae, vt singulae tangant datam lineam curuam, inuenire lineam curuam, quae has rectas ad angulum datum secat.

Solutio.

Tab. II. Fig. 4. Sit curua DU ad axem AT relata eaque proponitur, pro qua sit abscissa $AT = t$ et applicata $TU = u$, ita vt u sit functio quaecunque ipsius t data, iam ex huius curuae puncto U ducatur tangens indefinita US, quae ergo erit vna ex nostris lineis secandis, vnde si in ea capiatur punctum quodcunque M, coordinatae supra adhibitae erunt nunc $AP = x$ et $PM = y$, inter quas iam aequationem erui oportet, introducendo scilicet parametrum variabilem a. Quoniam autem haec linea secanda a reliquis distinguitur eo, quod haec ipsam curuam datam in puncto U tangat, hoc ipsum punctum U continebit notionem parametri, atque abscissam $AT = t$ tamquam parametrum spectare licet, atque nunc u erit functio parametri t, ex natura autem huius functionis innotescit angulus quo recta haec US ad axem nostrum inclinatur, cuius quippe tangens est $\frac{du}{dt} = v$.

At

At vero etiam hunc angulum ex noſtris coordinatis x et y cum t et u comparatis poterimus definire, erit enim etiam tangens c iſtius anguli $\frac{u-y}{t-x} = v$ vnde variando t aequatio pro omnibus curvis ſecandis erit,

$$y = vx + u - tv,$$

quae praeter variabiles x et y continet inſuper parametrum t eiusque functiones u et v, quae in locum litterae a ſubſtitui intelligi debent. Quoniam vero iam poſuimus $du = dv$ ſit porro $dv = w\,dt$ atque nunc aequatio differentialis pro curuis ſecandis erit:

$$dy = v\,dx + (xw - wt)\,dt = v\,dx + (x-t)w\,dt,$$

quae cum forma noſtra generali comparata

$$dy = p\,dx + q\,da$$

ob $a = t$ praebet $p = v$ et $q = (x-t)\,w$.

Hinc igitur pro traiectoriis quibuscunque, dum anguli interſectionis tangens eſt $= \alpha$, habebimus hanc aequationem

$$q\,dt\,(1 - \alpha p) = \alpha\,dx\,(1 + pp),$$

vbi p eſt functio parametri t, quae ſubſtitutis valoribus abit in hanc formam

$$w\,dt\,(1 - \alpha v)\,(x - t) = \alpha\,dx\,(1 + vv) \text{ ſiue}$$

$$dv\,(1 - \alpha v)\,(x - t) = \alpha\,dx\,(1 + vv),$$

quae ergo eſt aequatio pro omnibus traiectoriis.

Ponamus primo $\alpha = 0$, ita vt omnes lineae ſecandae a traiectoria tangi debeant, atque habebimus $x = t$ vnde fit $y = u$, ſicque prodit ipſa linea curva va cuius per hypothefin noftrae lineae funt tangentes, qui cafus per fe eft obuius.

Ponamus autem porro $\alpha = \infty$, vt traiectoriae prodeant orthogonales, vnde nafci debent omnes illae curuae, quae ex euolutione curuae DU oriuntur, facto autem $\alpha = \infty$ noftra aequatio abit in hanc,

$$-vdv(x-t) = dx(1+vv) \text{ feu } -\frac{vdv}{1+vv} = \frac{dx}{x-t},$$

quae tantum duas variabiles continet, hac forma repraefentata

$$tvdv = dx(1+vv) + xvdv,$$

quae per $\sqrt{(1+vv)}$ diuifa manifefto fit integrabilis

$$\frac{tvdv}{\sqrt{(1+vv)}} = dx\sqrt{(1+vv)} + \frac{xvdv}{\sqrt{(1+vv)}}$$

integralis enim eft

$$x\sqrt{(1+vv)} = \int\frac{tvdv}{\sqrt{(1+vv)}} = t\sqrt{(1+vv)} - \int dt\sqrt{(1+vv)} + C$$

vbi formula

$$\int dt\sqrt{(1+vv)}$$

denotat arcum curuae propofitae DU, deinde fi ex puncto A erigatur ad axem perpendicularis rectam MS fecans in R erit

$$UR = t\sqrt{(1+vv)}$$

ideoque

$$RM = RU - DU + C,$$

ita vt fit

$$DU = MU + C$$

abfcindatur ergo in figura arcus $DC = C$, vt fiat recta UM aequalis UC, atque nunc manifeftum eft punctum

punctum M esse in curua ex euolutione nata CM, initio euolutionis in puncto C facto. Verum si aequationem pro hac curua CM desideremus, ex aequatione inuenta habemus statim

$$x = t - \frac{\int dt\sqrt{(1+vv)}}{\sqrt{(1+vv)}},$$

hincque porro

$$y = u - \frac{v\int dt\sqrt{(1+vv)}}{\sqrt{(1+vv)}},$$

vnde si liceret variabilem t eliminare, haberetur aequatio pura inter x et y pro curua quaesita.

Sed videamus etiam, qualis futura sit traiectoria, si angulus interfectionis fuerit quicunque constans, tum autem aequatio inuenta reducatur ad hanc formam

$$\alpha dx(1+vv) - x dv(1-\alpha v) = t dv(\alpha v - 1) \text{ siue}$$

$$dx - \frac{x dv(1-\alpha v)}{\alpha(1+vv)} = \frac{t dv(\alpha v - 1)}{\alpha(1+vv)},$$

quae cum forma generali

$$dx + Pxdv = Qdv,$$

comparata integrabilis redditur, si multiplicetur per $e^{\int Pdv}$, tum enim integrale erit

$$xe^{\int Pdv} = \int e^{\int Pdv} Qdv,$$

quum igitur hic sit

$$Pdv = \frac{dv(\alpha v - 1)}{\alpha(1+vv)} \text{ erit } \int Pdv = L\sqrt{(1+vv)} - \tfrac{1}{\alpha}\text{Arc.Tang.}v,$$

ideoque

$$e^{\int Pdv} = e^{-\frac{1}{\alpha}\text{Arc.Tang.}v}\sqrt{(1+vv)},$$

 quo-

quocirca ob

$$Q = \frac{t(\alpha v - 1)}{\alpha(1+vv)} = tP$$

vnde erit

$$\int e^{\int P dv}.\, Q dv = \int e^{\int P dv} t P dv = t e^{\int P dv} - \int dt\, e^{\int P dv}$$

ita vt fiat

$$x = t - e^{-\int P dv} \int dt.\, e^{\int P dv}$$

ex quo facta substitutione habebimus

$$x = t - \frac{e^{\frac{1}{\alpha}\text{Arc. Tang.}v}}{\sqrt{(1+vv)}} \int dt.\, e^{-\frac{1}{\alpha}\text{Arc. Tang.}v} \sqrt{(1+vv)}$$

hincque

$$y = u - \frac{v e^{\frac{1}{\alpha}\text{Arc. Tang.}v}}{\sqrt{(1+vv)}} \int dt.\, e^{-\frac{1}{\alpha}\text{Arc. Tang.}v} \sqrt{(1+vv)}.$$

Problema II.

Sint rectae secandae ita ductae, vt singulae earum U M sint normales in curuam datam A U et quaerantur traiectoriae pro quouis angulo intersectionis.

Solutio.

Pro curua data A U sit iterum abscissa $AT = t$ et applicata $TU = u$, tum vero sit $du = v\,dt$, ita vt hae quantitates tanquam functiones parametri variabilis spectentur, ducta iam ad punctum U normali U N M constat anguli T U N tangentem fore $= v$ ob subnormalem

$$TN = \frac{u\,du}{dt} = uv$$

hinc-

hincque normalem

$$UN = u\sqrt{(1+vv)}.$$

Quia nunc recta UNM est vna ex secandis, sumatur in ea punctum quodcunque M et vocatis coordinatis

$$AP = x \text{ et } PM = y \text{ erit}$$

$$TP = x - t \text{ et } UT + PM = u + y,$$

manifestum autem est fore $v = \frac{x-t}{u-y}$, vnde deducitur haec aequatio

$$y = \frac{x}{v} - u - \frac{t}{v} \text{ et.}$$

Differentietur nunc ista aequatio et reperietur:

$$dy = \frac{dx}{v} - \frac{xdv}{vv} - vdt - \frac{dt}{v} + \frac{tdv}{vv},$$

quae comparata cum forma generali

$$dy = pdx + qda,$$

praebet $p = \frac{1}{v}$ hinc

$$1 + pp = \frac{1+vv}{vv} \text{ et } qda = -\frac{xdv}{vv} - dt\frac{(1+vv)}{v} + \frac{tdv}{vv}$$

at vero pro traiectoriis inuenta est haec aequatio

$$\alpha dx(1+pp) = qda(1-\alpha p).$$

Ponamus hic primo $\alpha = 0$, vt inueniamus eam traiectoriam, quae omnes nostras lineas rectas tangat, quam patet esse euolutam curuae propositae AV; pro hac ergo habebimus istam aequationem $qda = 0$, vnde fit

$$(x-t)dv + vdt(1+vv) = 0$$

hincque

$$x = t - \frac{v\,dt(1+vv)}{dv},$$

hincque porro

$$y = -u - \frac{dt(1+vv)}{dv}$$

quae sunt coordinatae pro euoluta curuae propositae, praeterea vero notasse iuuabit, quum sit

$$TP = x - t = -\frac{v\,dt(1+vv)}{dv}$$

hanc proportionem

$$TN : UN = TP : UM$$

ita vt sit

$$UN = -\frac{dt(1+vv)^{3:2}}{dv},$$

quae est ipsa expressio cognita pro radio osculi UM.

Contemplemur etiam casum, quo $\alpha = \infty$, vt omnes traiectorias orthogonales eliciamus. Tum vero aequatio inuenta abit in hanc

$$dx(1+pp) + pq\,da = 0$$

hoc est

$$dx(1+vv) - \frac{x\,dv}{v} + \frac{t\,dv}{v} - dt(1+vv) = 0,$$

quae reducitur ad hanc formam

$$dx - \frac{x\,dv}{v(1+vv)} = dt - \frac{t\,dv}{v(1+vv)}$$

quae cum forma generali

$$dx + P\,dx\,dv = Q\,dv$$

compa-

comparata, dat

$$P\,dv = -\frac{dv}{\sqrt{(1+vv)}},$$

hinc

$$\int P\,dv = L\,\frac{\sqrt{(1+vv)}}{v} \text{ et } e^{\int P\,dv} = \frac{\sqrt{(1+vv)}}{v}$$

per quam quantitatem noſtra aequatio multiplicata fit

$$\frac{dx\sqrt{(1+vv)}}{v} - \frac{x\,dv}{vv\sqrt{(1+vv)}} = \frac{dt\sqrt{(1+vv)}}{v} - \frac{t\,dv}{vv\sqrt{(1+vv)}},$$

cuius integrale eſt

$$\frac{x\sqrt{(1+vv)}}{v} = \frac{t\sqrt{(1+vv)}}{v} + c,$$

ita vt fit

$$x = t + \frac{cv}{\sqrt{(1+vv)}}$$

hincque

$$y = \frac{c}{\sqrt{(1+vv)}} - u.$$

Quodſi iam hic conſtantem c ponamus $=0$, habebimus $x=t$ et $y=-u$, quo caſu traiectoria orthogonalis eſt ipſa curua noſtra propoſita A U, ſed praeter hanc infinitae adhuc aliae dantur, quae inueniuntur, ſi c non ſit $=0$, capiantur enim in ſingulis noſtris rectis portiones $U\mu = c$, atque manifeſtum eſt fore

$$\frac{cv}{\sqrt{(1+vv)}} = T\pi \text{ et } \frac{c}{\sqrt{(1+vv)}} = TU - \mu\pi,$$

quibus ſubſtitutis habebimus

$$x = AT + T\pi = A\pi \text{ et } y = \frac{c}{\sqrt{(1+vv)}} - u = -\mu\pi,$$

ex quo intelligitur omnes curuas per puncta haec μ ductas, quae parallelae vocari ſolent curuae A U,

 eſſe

esse traiectorias orthogonales, constat enim omnes has curuas communem habere euolutam.

Sin autem angulus interfectionis fuerit quicunque; aequatio inuenta erit

$$\alpha dx(1+vv) = -(v-\alpha)\frac{x\,dv}{v} - (v-\alpha)(1+vv)dt + (v-\alpha)\frac{t\,dv}{v}$$

quae reducatur ad hanc formam:

$$dx + \frac{(v-\alpha)x\,dv}{\alpha v(1+vv)} = -\frac{(v-\alpha)dt}{\alpha} + \frac{(v-\alpha)t\,dv}{\alpha v(1+vv)} = -\frac{du}{\alpha} + dt + \frac{(v-\alpha)t\,dv}{\alpha v(1+vv)}$$

vnde fit

$$\int P\,dv = \tfrac{1}{\alpha}\,\text{Ang. Tang. } v + L\,\frac{\sqrt{(1+vv)}}{v},$$

vnde calculus reducitur ad quantitatem exponentialem, in cuius exponentem ingreditur angulus, cuius Tangens est v.

Problema III.

Proposita curua quacunque AU per coordinatas $AT = t$ et $TA = u$ data, si ad singula eius puncta U secundum legem quamcunque datam educantur rectae UM, inuenire traiectorias, quae omnes has rectas sub angulo dato traiiciant.

Solutio.

Ponamus vt ante $du = v\,dt$ et vocemus angulum $TUM = \Phi$ qui vel ipse vel cuius Sinus, Tangensue, per quantitates ad curuam pertinentes vtcunque determinetur, ita vt sit $d\Phi = \varrho\,dt$, atque

que omnes iſtae quantitates, tanquam functiones parametri ſpectari queant. Quum igitur U M ſit vna ex rectis ſecandis, ſumto in ea puncto quocunque M habebimus pro traiectoriis A P $= x$ et P M $= y$, atque nunc vt ante euidens eſt fore

$$\text{Tang. } \Phi = \frac{x-y}{u+y},$$

vnde definitur

$$y = \frac{x}{\text{Tang. } \Phi} - u - \frac{t}{\text{Tang. } \Phi}.$$

Differentietur haec aequatio:

$$dy = dx \cot. \Phi - \frac{x\, d\Phi}{\sin. \Phi^2} - v\, dt - dt \cot. \Phi + \frac{t\, d\Phi}{\sin. \Phi^2}$$

eritque

$$p = \cot. \Phi \quad \text{et} \quad 1 + pp = \frac{1}{\sin. \Phi^2} \quad \text{et}$$

$$q\, da = \frac{(t-x)\, d\Phi}{\sin. \Phi^2} - v\, dt - dt \cot. \Phi,$$

quare quum pro traiectoriis inuenta ſit haec aequatio

$$\alpha\, dx (1 + pp) + q\, da (\alpha p - 1) = 0,$$

quae duas tantum variabiles complectitur et altera x vnam dimenſionem non ſuperat, eius reſolutio erit in noſtra poteſtate.

Euoluamus autem potiſſimum caſum, quo $\alpha = 0$, vt curua inueniatur omnes has rectas propoſitas tangens, pro hac igitur curua aequatio erit $q\, da = 0$ ſiue

$$x = t - \frac{v\, dt . \sin. \Phi^2}{d\Phi} - \frac{dt \sin. \Phi . \cos. \Phi}{\rho} = t - \frac{v \sin. \Phi^2}{p} - \frac{\sin. \Phi \cos. \Phi}{\rho}$$

hinc-

hincque

$$y = -u - \frac{v \sin.\Phi \cos.\Phi}{\rho} - \frac{\cos.\Phi^2}{\rho},$$

quum ergo hinc fit

$$x - t = -\frac{v \sin.\Phi^2}{\rho} - \frac{\sin.\Phi.\cos.\Phi}{\rho},$$

inde concluditur ipsa recta

$$\mathrm{U\,M} = -\frac{v \sin.\Phi - \cos.\Phi}{\rho},$$

notandum autem M esse punctum, in quo duae huiusmodi rectae sibi proximae conueniunt.

PHYSI-