1773

Observationes circa bina biquadrata, quorum summam in duo alia biquadrata resolvere liceat

Leonhard Euler

OBSERVATIONES CIRCA BINA BIQVADRATA QVORVM SVMMAM IN DVO ALIA BIQVADRATA RESOLVERE LICEAT.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quum demonstratum sit, neque summam neque differentiam duorum biquadratorum, quadratum esse posse, multo minus biquadratum esse poterit; haud minori autem fiducia negari solet, summam trium adeo biquadratorum vnquam biquadratum esse posse, etiamsi hoc nusquam demonstratum reperiatur. Vtrum autem quatuor biquadrata reperire liceat, quorum summa sit biquadratum; merito dubitamus, quum a nemine adhuc talia biquadrata sint exhibita.

2. Quamuis autem demonstrari posset, non dari terna biquadrata, quorum summa quoque sit biquadratum; id tamen neutiquam ad differentias extendere liceret, neque enim propterea affirmari posset, talem aequationem $A^4 + B^4 - C^4 = D^4$ esse impossibilem; obseruaui enim hanc aequationem adeo infinitis modis resolui posse. Neque tamen asseuerare ausim, hoc a nemine adhuc esse praestitum et nunc quidem

quidem minime vacat, omnia monumenta in hoc Analysis genere euoluere; quicquid autem fit, spero, methodum, qua sum vsurus, non omni attentione fore indignam. Manifestum autem est, hanc quaestionem versari circa bina biquadratorum paria, quorum siue summae siue differentiae inter se sint aequales, si enim fuerit $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$; vtique etiam erit $A^4 - D^4 = C^4 - B^4$; vnde hoc Problema nobis fit propositum.

Problema.

Inuenire bina biquadrata A^4 *et* B^4, *quorum summam in alia duo biquadrata resoluere liceat, ita vt habeatur talis aequalitas* $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$.

Solutio.

3. Quum igitur hinc esse debeat $A^4 - B^4 = C^4 - D^4$, ponamus

$$A = p + q;\ D = p - q;\ C = r + s \text{ et } B = r - s$$

vt prodeat ista aequatio concinnior

$$p q (p p + q q) = r s (r r + s s)$$

cui quidem satisfieri liquet, sumendo $r = p$ et $s = q$, verum inde nihil plane lucraremur, quum oriatur casus per se obuius $C = A$ et $B = D$, interim tamen hic ipse casus ad alias solutiones manuducere valet.

4. Iam statuamus:

$$p = a x;\ q = b y;\ r = k x \text{ et } s = y$$

 vt

vt obtineat iſta aequatio reſoluenda

$$ab(aaxx+bbyy)=k(kkxx+yy)$$

vnde ſtatim deducimus $\frac{yy}{xx}=\frac{k^3-a^3.b}{ab^3-k}$

quam ergo fractionem quadratum reddi oportet. Hic autem ſtatim in oculos incurrit caſus, quo hoc vſu venit, ſcilicet ſumendo $k=ab$, tum enim fit

$$\frac{yy}{xx}=\frac{a^3b(bb-1)}{ab(bb-1)}=aa,$$

vnde fieret $y=a$, $x=1$ hincque $p=a$, $q=ab$, $r=ab$, $s=a$, qui valores producunt ipſum illum caſum per ſe obuium.

5. Hunc igitur caſum proſequentes, ſtatuamus $k=ab(1+z)$ et aequatio noſtra transfundetur in hanc formam

$$\frac{yy}{xx}=\frac{a^3b((bb-1)+3bbz+3bbz^2+bbz^3)}{ab(bb-1-z)}=aa\frac{(bb-1+3bbz+3bbz^2+bbz^3)}{bb-1-z}$$

atque ex hac aequatione elicimus

$$\frac{y}{x}=\frac{a\sqrt{((bb-1)^2+(3bb-1)(bb-1)z+3bb(bb-2)z^2+bb(bb-4)z^3bbz^4)}}{bb-1-z}.$$

Quo igitur formulam:

$$(bb-1)^2+(bb-1)(3bb-1)z+3bb(bb-2)zz+bb(bb-4)z^3-bbz^4$$

ad quadratum perducamus, ſtatuamus eius radicem $=$

$$bb-1+fz+gzz$$

et litteras f et g ita aſſumamus, vt terni termini priores deſtruantur, quare quum huius formae quadratum ſit:

$$(bb-1)^2+2(bb-1)fz+2(bb-1)gzz+2fgz^3+ggz^4$$
$$+ffzz$$

primi

primi quidem termini ſe ſponte deſtruunt, vt autem idem in ſecundis eueniat, ſumi debet

$$f = \frac{3bb - 1}{2},$$

atque pro tertiis habebimus

$$3bb(bb - 2) = 2(bb - 1)g + \frac{9b^4 - 6bb + 1}{4},$$

vnde colligitur

$$g = \frac{3b^4 - 18bb - 1}{8(bb - 1)},$$

quibus valoribus definitis, aequatio reſoluenda fit

$$(gg + bb)z = bb(bb - 4) - 2fg$$

vnde colligimus

$$z = \frac{bb(bb - 4) - 2fg}{bb + gg}.$$

6. Hinc igitur littera b adhuc arbitrio noſtro permittitur; ea igitur pro lubitu aſſumta, ſimul atque hinc quantitatem z determinauerimus, ſtatim habebimus

$$x = bb - 1 - z \quad \text{et} \quad y = a(bb - 1 + fz + gzz)$$

hincque porro

$$p = a(bb - 1 - z) \qquad r = ab(1 + z)(bb - 1 - z)$$
$$q = ab(bb - 1 + fz + gzz) \quad s = a(bb - 1 + fz + gzz)$$

quae formulae quum omnes ſint per a diuiſibiles, eam diuiſione tollere licebit, ita vt ſit

$$p = bb - 1 - z \qquad r = b(1 + z)(bb - 1 - z)$$
$$q = b(bb - 1 + fz + gzz) \quad s = bb - 1 + fz + gzz$$

vbi notandum, ſi numeri x et y communem habuerint factorem, eum diuiſione ante tolli poſſe, quam

 litterae

litterae p, q, r, s inde definiuntur. Operae igitur pretium erit, solutiones quasdam speciales euoluere; at vero statim apparet, sumi non posse $b = 1$, quia fieret $g = \infty$; multo vero minus ponere licet $b = 0$, quia fieret $q = 0$; ex quo casus expediamus duos tantum, primo scilicet $b = 2$, tum vero $b = 3$.

I^ma Solutio Specialis.

7. Sit $b = 2$ ac superiores valores colliguntur, vt sequitur:

$$f = \tfrac{11}{2};\ g = -\tfrac{25}{24};\ z = \tfrac{6600}{2929},$$

deinde quia littera a plane non in computum ingreditur, eius loco vnitas scribatur, tum vero erit

$$x = 3 - \tfrac{6600}{2929} = \tfrac{2187}{2929};\ y = 3 + \tfrac{11}{2}\cdot\tfrac{6600}{2929} - \tfrac{25}{24}\cdot\tfrac{6600^2}{2929^2} =$$

$$3 + \frac{55407\cdot 1100}{2929^2} = \frac{3\cdot 28894941}{2929^2},$$

totum autem negotium redit ad rationem inter x et y, quae quum sit

$$\frac{y}{x} = \frac{3\cdot 28894941}{2187\cdot 2929} = \frac{28894941}{2929\cdot 729} = \frac{3210549}{2929\cdot 81} = \frac{1070183}{27\cdot 2929},$$

habebimus

$$x = 79083 \quad \text{et } y = 1070183,$$

tum igitur ob

$$k = 2(1 + z) = \frac{2\cdot 9529}{2929} = \frac{19058}{2929}, \text{ concludimus fore}$$

$p = 79083$; $\quad r = 27\cdot 19058 = 514566$

$q = 2\cdot 1070183 = 2140366 \quad s = 1070\cdot 183$.

Consequenter pro ipsis radicibus biquadratorum nanciscimur

$A = p$

$A = p + q = 2219449$; $C = 1584749$
$B = r - s = -555617$; $D = 2061283$

eritque propterea $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$.

II^{da} Solutio Specialis.

8. Sit $b = 3$ eritque $f = 13$; $g = \frac{5}{4}$, hinc $z = \frac{200}{169}$ ideoque

$$k = \frac{3.369}{169} = \frac{1107}{169} = \frac{9.123}{169} = \frac{27.41}{169}, \text{ porro } x = \frac{8.144}{169} = \frac{128.9}{169} \text{ et}$$

$$y = 8 + \frac{200}{169}\left(13 + \frac{5}{4}.\frac{200}{169}\right) = 8 + \frac{200}{169}.\frac{2447}{169} = \frac{8.150911}{169^2}$$

Atque erit:

$$x : y = 8.144.169 : 8.150911 = 144.169 : 150911$$

ideoque

$$x = 144.169 = 24336 \text{ et } y = 150911$$

ex quibus valoribus consequimur

$p = 24335$; $r = 159408 = 144.1107$
$q = 452733$; $s = 150911$.

Atque hinc ipsae litterae A, B, C, D colliguntur

$A = 477069$; $C = 310319$
$B = 8497$; $D = 428397$

eritque iterum $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$, atque hi numeri videntur minimi quaestioni nostrae satisfacientes.