



1772

Considerationes cyclometricae

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Considerationes cyclometricae" (1772). *Euler Archive - All Works*. 423.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/423>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

CONSIDERATIONES CYCLOMETRICAE.

Auctore

L. EULER O.

1.

Lunularum quadrabilium constructio ab inuentione binorum angulorum pendet, qui inter se rationem duplicatam sinuum teneant, binos scilicet eiusmodi angulos m et n inuestigari oportet, vt fit

$$m : n = \sin. m^2 : \sin. n^2 \text{ seu } \frac{m}{\sin. m^2} = \frac{n}{\sin. n^2}$$

quam aequalitatem hic accuratius perpendere constitui.

2. Dato autem angulo quocunq; m valorem expressionis inde natae $\frac{m}{\sin. m^2}$ haud difficulter assignare licet, idque duplici modo vel in gradibus, si angulus m ita detur, vel in partibus radii $= 1$, si arcus angulum metiens in partibus radii exprimat, facile autem altera expressio ad alteram reducitur.

3. De hac autem expressione $\frac{m}{\sin. m^2}$ obseruo, eam primo, si angulus m euanescat, euadere infinitam, tum vero diminui ad certum vsque terminum, quo superato denuo augetur siquidem angulo m ad duos rectos aucto ob $\sin. m = 0$, iterum fit infinita. Quod quo clarius appareat, sit r nota anguli recti, et quia

$$\sin. \frac{1}{3} r = \frac{1}{2}; \sin. \frac{1}{2} r = \frac{1}{\sqrt{2}}; \sin. \frac{2}{3} r = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin. r = 1$$

si fue-

CONSIDERATIONES CYCLOMETRICAE. 161

si fuerit

$$m = 0r; \frac{1}{3}r; \frac{1}{2}r; \frac{2}{3}r; r; \frac{4}{3}r; \frac{5}{3}r; \frac{5}{2}r; 2r$$

erit

$$\frac{m}{\sin. m^2} = \infty r; \frac{4}{3}r; r; \frac{5}{3}r; r; \frac{16}{5}r; 3r; \frac{20}{3}r; \infty r.$$

4. Antequam igitur angulus m nonaginta gradus attingit formula $\frac{m}{\sin. m^2}$ fit minima; colligitur autem hoc euenire ubi fit $m = \frac{1}{2} \text{ tang. } m$, seu arcus angulum metiens aequalis femissi tangentis. Hunc angulum nonnisi proxime assignare licet, qui calculo instituto reperitur $= 66^\circ, 46', 54\frac{1}{2}''$ vnde prodit valor omnium minimus $\frac{m}{\sin. m^2} = 79, 07102$ grad.

5. Hunc angulum tam insigni proprietate praeditum littera a denotabo, ita vt fit $a = 66^\circ, 46', 54\frac{1}{2}''$ in gradibus, in partibus radii autem $a = 1, 165561$, ubi obseruare licet hunc angulum neque ad peripheriam neque ad radium rationem commensurabilem tenere, sed vtriusque respectu pro transcendente esse habendum.

6. Interim tamen iuuabit praecipuas affectiones huius anguli perpendisse reperitur autem:

$\sin. a = 0, 9190096$; $\cos. a = 0, 3942360$; $\text{tang. } a = 2, 331122$
tum vero

$\sin. 2a = 0, 7246132$ et $\text{cofec. } 2a = 1, 380050$
duplum angulum ideo considero, quia ob $a = \frac{1}{2} \text{ tang. } a$, fit formula nostra $\frac{a}{\sin. a^2} = \frac{1}{\sin. 2a} = \text{cofec. } 2a$, ita vt $1, 380050$ fit valor minimus quem formula $\frac{m}{\sin. m^2}$
Tom. XVI. Nou. Comm. X affe-

affequi potest. Idem autem in gradibus expressus dat ut ante $79^{\circ}, 07102$.

7. Vt ergo bini anguli m et n rationem teneant duplicatam sinuum, seu ut sit $\frac{m}{\sin. m^2} = \frac{n}{\sin. n^2}$, necesse est alterum eorum m infra a , alterum vero n supra a existere, et quo magis angulus m infra a deprimitur, eo magis alter n superabit, neque tamen simili ratione, cum sumto $m = 0$, fiat $n = 180^{\circ}$, neque vero angulus a in horum terminorum medium incidit.

8. Si igitur angulus m fit minimus, ponatur $m = \mu$ in partibus radii, et denotante π semicircumferentiam seu mensuram duorum rectorum, angulus n quam minime a π deficiet, statuatur ergo $n = \pi - \nu$, eritque

$$\mu \sin. \nu^2 = (\pi - \nu) \sin. \mu^2 \text{ seu } \mu(1 - \cos. 2\nu) = (\pi - \nu)(1 - \cos. 2\mu)$$

Iam vero est

$$1 - \cos. \Phi = \frac{1}{2} \Phi^2 - \frac{1}{24} \Phi^4 + \frac{1}{720} \Phi^6 - \text{etc.}$$

Ergo

$$\mu(2\nu\nu - \frac{2}{3}\nu^3 + \frac{4}{45}\nu^5) = (\pi - \nu)(2\mu\mu - \frac{2}{3}\mu^3 + \frac{4}{45}\mu^5)$$

vnde colligitur proxime

$$\nu = \sqrt{\pi\mu - \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{3 + \frac{4}{3}\pi}{24 + \sqrt{\pi}} \mu^3}.$$

9 Sin autem angulus m fit parumper minor angulo a , alter n parumper erit maior. Statuatur ergo $m = a - \mu$ et $n = a + \nu$; atque formula $\frac{m}{\sin. m^2}$ abit in

$$\frac{2(a - \mu)}{1 - \cos. 2(a - \mu)} = \frac{2(a - \mu)}{1 - \cos. 2a \cos. 2\mu - \sin. 2a \sin. 2\mu}$$

quae

quæ ob angulum μ minimum in talem seriem euolvatur :

$$A - B\mu + C\mu^2 - D\mu^3 + E\mu^4 - \text{etc.}$$

vbi litteræ A, B, C, D etc. hoc modo definiuntur

$$A \sin. a^2 - a = 0 \text{ hinc } A = \frac{a}{\sin. a^2} = \frac{1}{\sin. 2a}$$

$$B \sin. a^2 + A \sin. 2a - 1 = 0 \text{ hinc } B = 0 \text{ ob } A = \frac{1}{\sin. 2a}$$

$$C \sin. a^2 + B \sin. 2a + A \cos. 2a = 0$$

$$D \sin. a^2 + C \sin. 2a + B \cos. 2a - \frac{2}{3} A \sin. 2a = 0$$

$$E \sin. a^2 + D \sin. 2a + C \cos. 2a - \frac{2}{3} B \sin. 2a - \frac{1}{3} A \cos. 2a = 0$$

$$F \sin. a^2 + E \sin. 2a + D \cos. 2a - \frac{2}{3} C \sin. 2a - \frac{1}{3} B \cos. 2a + \frac{2}{15} A \sin. 2a = 0$$

etc.

vbi coefficientes numerici continuo per fractiones $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}$ etc. multiplicantur.

10. His litteris determinatis, erit

$$\frac{m}{\sin. m^2} = A - B\mu + C\mu^2 - D\mu^3 + E\mu^4 - F\mu^5 \text{ etc. et}$$

$$\frac{n}{\sin. n^2} = A + B\nu + C\nu^2 + D\nu^3 + E\nu^4 + F\nu^5 \text{ etc.}$$

quæ series cum inter se æquari debeant, ex dato angulo μ , alter ν ita definitur, vt quia $B = 0$ posito

$$\nu = \mu + P\mu^2 + Q\mu^3 + R\mu^4 + S\mu^5 \text{ etc.}$$

fit

$$P = \frac{-D}{C}; Q = \frac{D D}{C^2}; R = \frac{-2 D^2}{C^3} + \frac{2 D E}{C^2} - \frac{F}{C}$$

et

$$S = \frac{4 D^3}{C^4} - \frac{6 D D E}{C^3} + \frac{3 D F}{C^2}$$

X 2

Calculo

Calculo autem subducto reperitur

$$A = 1,380050; C = 1,126090; P = 0,265937$$

$$B = 0, \quad D = -0,299469; Q = 0,070722.$$

11. At sumto utcumque angulo m , alter angulus n per cognitam appropinquandi methodum proxime saltem definiri potest; veluti si sumatur $m = 60^\circ$, reperitur $n = 73^\circ, 41', 32'' \frac{22}{100}$ acposito $m = 30^\circ$, prodit $n = 108^\circ, 14', 30'' \frac{18}{100}$ tum vero si $n = 135^\circ$ fit $m = 12^\circ, 20', 54'' \frac{82}{100}$ sin autem angulus m ita accipiatur, ut fit tang. $m = \sqrt{2}$, ideoque $m = 54^\circ, 44', 8'' \frac{11}{100}$, inuenitur $n = 79^\circ, 14', 23'' \frac{36}{100}$ nullo autem horum casuum angulum alterum geometricè assignare licet.

12. Talis autem inuestigatio ad lunularum quadrabilium constructionem nihil iuuat, cum necesse sit, ut vterque angulus m et n geometricè assignari possit, quod euenit, si vtriusque sinum vel tangentem geometricè exhibere licuerit. Magna ergo hinc exoritur quaestio, quomodo binos eiusmodi angulos m et n geometricè assignabiles inuestigari oporteat ut fiat

$$\frac{\sin m}{\sin m^2} = \frac{\sin n}{\sin n^2}, \text{ seu } m(1 - \cos 2n) = n(1 - \cos 2m).$$

13. Ad hoc problema soluendum vulgo assumi solet, binos angulos m et n inter se commensurabiles esse debere; nondum autem est demonstratum nullo alio casu solutionem obtineri non posse. Sinus certe horum angulorum rationem algebraicam tenere oportet, quia alioquin anguli geometricè assignari

non

non possent, ex quo etiam ipsa angulorum ratio algebraice assignabilis esse debet; neque vero hinc conficitur, hanc rationem numeris integris contineri debere.

14. Infinitis certe modis anguli geometricae assignari possunt, qui inter se non sunt commensurabiles, veluti anguli quorum sinus sunt $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$; num autem huiusmodi anguli non rationem quandam irrationalem tenere possint, neutiquam adhuc satis constat? Eximium autem foret inuentum si huiusmodi anguli quorum ratio esset exempli gratia ut $1:\sqrt{2}$ geometricae exhiberi possent.

15. Quodsi inter angulos m et n ratio statuatur $= 1:\sqrt{2}$ resolutio aequationis $\frac{\sin m}{\sin n} = \frac{m}{n}$ praebet hos valores.

$$m = 55^{\circ}, 28', 18'' \text{ et } n = 78^{\circ}, 27', 0''$$

qui autem anguli geometricae assignabiles non videntur. Cum autem hinc nihil concludi possit, methodum adhuc deesse cogimus fateri, cuius beneficio hoc problema per angulos etiam non commensurabiles resolui queat.

16. Videamus autem quot modis hos angulos inter se commensurabiles statuendo ista quaestio per circulum et normam resolui possit, ita ut problema pro plano haberi possit: Statuatur ergo $m = \frac{1}{2}\mu\omega$ et $n = \frac{1}{2}\nu\omega$, ut sit $m:n = \mu:\nu$, fierique debet

$$\mu(1 - \cos \nu\omega) = \nu(1 - \cos \mu\omega).$$

X 3

Sit

Sit $\cos \omega = z$, ac notetur esse:

$$\cos 2\omega = 2z^2 - 1$$

$$\cos 3\omega = 4z^3 - 3z$$

$$\cos 4\omega = 8z^4 - 8z^2 + 1$$

$$\cos 5\omega = 16z^5 - 20z^3 + 5z$$

$$\cos 6\omega = 32z^6 - 48z^4 + 18z^2 - 1$$

etc.

17. Hinc percurramus casus praecipuos aequationis inventae

$$\nu - \mu = \nu \cos \mu \omega - \mu \cos \nu \omega$$

I. $\mu = 1$ et $\nu = 2$ hinc $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \omega$
erit

$$1 = 2z - 2z^2 + 1, \text{ seu } z - z^2 = 0,$$

vnde per $z - 1$ diuidendo, id quod semper succedit, fit $z = 0$; ideoque $\omega = 90^\circ$, et $m = 45^\circ$ et $n = 90^\circ$, qui est casus lunulae Hippocratis

II. $\mu = 1$, et $\nu = 3$, hinc $m = \frac{1}{3}\omega$ et $n = \frac{2}{3}\omega$

Erit ergo $2 = 3z - 4z^3 + 3z$ seu

$$1 - 3z + 2z^3 = 0,$$

quae aequatio per $1 - z$ diuisa dat

$$1 - 2z - 2z^2 = 0, \text{ hincque}$$

$$z = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} = \cos \omega \text{ et } \cos 2\omega = 1 - \sqrt{3};$$

problema planum.

III.

III. Sit $\mu=2$ et $\nu=3$ hinc $m=\omega$ et $n=\frac{3}{2}\omega$.

Erit ergo $1=6zz-3-8z^5+6z$ seu $4-6z-6zz+8z^5=0$
 quae aequatio per $2(1-z)$ diuisa dat $2-z-4zz=0$
 vnde colligitur $z=\frac{-1+\sqrt{33}}{8}=\cos\omega$ et $\cos 2\omega=\frac{-1-\sqrt{33}}{16}$;
 problema planum.

IV. Sit $\mu=1$ et $\nu=4$ hinc $m=\frac{1}{2}\omega$ et $n=2\omega$

Erit ergo $3=4z-8z^4+8zz-1$ seu $1-z-2zz+2z^4=0$
 quae aequatio per $1-z$ diuisa dat

$$1-2zz-2z^5=0 \text{ problema solidum.}$$

V. Sit $\mu=3$ et $\nu=4$ hinc $m=\frac{3}{2}\omega$ et $n=2\omega$.

Erit ergo $1=16z^3-12z-24z^4+24zz-3$ seu

$$1+3z-6zz-4z^5+6z^4=0$$

quae per $1-z$ diuisa dat

$$1+4z-2zz-6z^5=0 \text{ problema solidum.}$$

VI. Sit $\mu=1$ et $\nu=5$ hinc $m=\frac{1}{2}\omega$ et $n=\frac{5}{2}\omega$.

Erit ergo $4=5z-16z^5+20z^5-5z$ seu

$$1-5z^5+4z^5=0$$

quae per $1-z$ diuisa praebet

$$1+z+zz-4z^5-4z^4=0$$

et in hanc formam transfunditur:

$$(2zz+z-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4} \text{ seu } 2zz+z-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

hinc $z=\frac{-1+\sqrt{(5+4\sqrt{5})}}{4}=\cos\omega$ et $\cos 2\omega=\frac{2\sqrt{5}-1-\sqrt{(5+4\sqrt{5})}}{4}$

ita vt hic prodeat problema planum,

VII.

VII. Sit $\mu = 2$ et $\nu = 5$ hinc $m = \omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$.
 Erit ergo $3 = 10zz - 5 - 32z^5 + 40z^3 - 10z$ feu
 $4 + 5z - 5zz - 20z^5 + 16z^3 = 0$ et per $1-z$ diuidendo
 $4 + 9z + 4zz - 16z^5 - 16z^3 = 0$ problema solidum

VIII. Sit $\mu = 3$ et $\nu = 5$ hinc $m = \frac{3}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$.
 Ergo $2 = 20z^3 - 15z - 48z^5 + 60z^3 - 15z$ feu
 $1 + 15z - 40z^3 + 24z^5 = 0$ et per $1-z$ diuidendo
 $1 + 16z + 16zz - 24z^3 - 24z^5 = 0$

quae reducitur ad hanc formam

$$(1 + 8z + 6zz)^2 = 60(z + zz)^2$$

vnde fit, $zz\sqrt{60} + z\sqrt{60} = 6zz + 8z + 1$ ideoque

$$z = \frac{4 - 3\sqrt{15} + \sqrt{(25 - 6\sqrt{15})}}{2\sqrt{15} - 6} \text{ feu } \frac{1}{z} = -4 + \sqrt{15} + \sqrt{(25 - 6\sqrt{15})}$$

$$\text{vel } z = \frac{\sqrt{15} - 1 + \sqrt{(60 - 5\sqrt{15})}}{12} = \cos. \omega \text{ et } \cos. 2\omega = \frac{1 + \sqrt{(25 - 6\sqrt{15})}}{6}$$

ficque etiam hoc casu problema est planum.

IX. Sit $\mu = 4$ et $\nu = 5$ hinc $m = 2\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$.
 Ergo $1 = 40z^4 - 40zz + 5 - 64z^5 + 80z^3 - 20z$ feu
 $1 - 5z - 10zz + 20z^3 + 10z^4 - 16z^5 = 0$ et per $1-z$
 diuidendo

$$1 - 4z - 14zz + 6z^3 + 16z^4 = 0$$

at haec aequatio nonnisi constructionem solidam admittit.

18. Quinque ergo casus sumus adepti, quibus ope circuli et normae lunulas quadrabiles exhibere, vel hanc aequationem $\frac{m}{\sin. m^2} = \frac{n}{\sin. n^2}$ construere licet:

- I. Casus $m = 45^\circ$ et $n = 90^\circ$
- II. Casus $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \frac{3}{2}\omega$ existente
 $\text{cof. } \omega = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ vel $\text{cof. } 2\omega = 1 - \sqrt{3}$
- III. Casus $m = \omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$ existente
 $\text{cof. } \omega = \frac{\sqrt{35}-1}{8}$ vel $\text{cof. } 2\omega = \frac{1-\sqrt{35}}{16}$
- IV. Casus $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$ existente
 $\text{cof. } \omega = \frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})}-1}{4}$
- V. Casus $m = \frac{3}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$ existente
 $\text{cof. } \omega = \frac{\sqrt{15-3}+\sqrt{(60+6\sqrt{15})}}{12}$ vel $\text{cof. } 2\omega = \frac{1+\sqrt{(25-6\sqrt{15})}}{6}$

19. Pro aliis rationibus inter arcus m et n assumtis constructio lunularum ad altiores locos geometricos affurgit, neque vero minus pro geometrica est habenda. Vtrum autem praeter hos casus nullae aliae lunulae geometricae assignari queant, nec ne? in dubio relinquendum videtur. Neque contra valeret argumentum afferri vulgo solitum, quod inde circuli quadratura consequeretur, etiam si et id, nisi quadratura indefinita spectetur, parum roboris habere videatur. Etsi enim satis constet rationem peripheriae ad diametrum* per numeros racionales exprimi non posse, minus tamen adhuc perspicitur, numeros etiam irracionales ad hunc scopum esse ineptos. Verum etiam si esset euictum, hanc rationem ne surdis quidem numeris villo modo exhiberi posse, tamen inde vix quicquam pro arcubus ad totam circumferentiam incommensurabilibus concludere liceret. Veluti si quis arcum circuli sinu ver-

bi gratia $= \frac{2}{3} = 0,666666$ determinatum geometricè assignare docuerit, inde minime adhuc quantitas peripheriae colligi posset; ex quo huiusmodi re-ctificatio impossibilitati quadraturae circuli aduersari haud videatur; nisi forte ad ipsam methodum, qua quis ad valorem arcus, cuius sinus est $= \frac{2}{3}$ perue-nerit, respiciamus, cum enim eidem sinui innume-ri arcus conueniant, ob legem continuitatis metho-dus simul omnes istos arcus complecti deberet, ideo-que algebraica expressione contineri non posset; prae-terquam quod differentia vel summa horum arcuum etiam integram peripheriam esset ostensura. Hac igitur ratione demum confirmata pronuciare lice-bit, nullius prorsus arcus circularis, geometricè as-ignabilis, quantitatem geometricè defini posse.